




Действия над целыми неотрицательными числами




Нина нашла 3 гриба, а Маша- 2 гриба.
Сколько всего грибов нашли девочки?

Чтобы ответить на вопрос задачи, надо к грибам Нины добавить (присоединить) грибы Маши, т.е. **объединить два множества и сосчитать сколько элементов получилось в новом множестве.**

$$3+2=5$$

Сложение тесно связано с операцией объединения множеств.



Найдите число элементов в объединении
множеств

$$A = a, b, c, d$$

$$B = c, x, y.$$

Сумма

Суммой целых неотрицательных чисел a и b называют число элементов в объединении непересекающихся множеств A и B .

Какие бы два целых неотрицательных числа не взяли, всегда можно найти их сумму, которая будет единственной для этих чисел.

Действие, при помощи которого находят сумму, называют сложением, а числа, которые складывают, - слагаемыми.

Законы сложения:

- **Переместительный:**


для любых целых неотрицательных чисел a и b выполняется равенство $a+b=b+a$

- **Сочетательный:**


для любых целых неотрицательных чисел a, b, c выполняется равенство $(a+b)+c=a+(b+c)$

Вычислите, используя законы сложения:

$$109+36+191+64+27$$



Ребята сделали 8 кормушек для птиц,
5 кормушек повесили на деревья.
Сколько кормушек осталось повесить
ребятам?



Решение данной задачи тесно связано с выделением из данного множества подмножества и нахождением числа элементов в дополнении этого подмножества, т.е.

вычитание связано с операцией дополнения подмножества.

Разность

Разностью целых неотрицательных чисел a и b называется число элементов в дополнении множества B до множества A при условии, что B является подмножеством A .

$$5-2=3.$$


Пусть $A = \{a, b, c, d, e\}$ $B = \{c, d\}$.

Видим, что элементы B принадлежат и A .

Найдем дополнение множества B до множества A .

Получаем, что $A \setminus B = \{a, b, e\}$.

Следовательно, $5-2=3$.



Разность $a-b$ существует тогда и только тогда, когда b больше, либо равно a .

Действие, при помощи которого находят разность $a-b$ называется вычитаем, число a – уменьшаемым, число b – вычитаемым.

связь между сложением и вычитанием

Разностью целых неотрицательных чисел a и b называется такое целое неотрицательное число c , сумма которого и числа b равна a .

$$\underline{a-b=c \longleftrightarrow a=b+c}$$

Говорят, что действие вычитание является обратным сложению.


Отношения «больше на», «меньше на»

Действие вычитание используется не только при решении задач, где необходимо найти дополнение одного множества до другого. Существуют задачи, когда необходимо определить какое число больше (меньше) и на сколько.

Пусть a и b – целые неотрицательные числа, и установлено, что a больше b . Это значит, что в множестве A можно выделить подмножество, равномощное множеству B . Тогда в множестве A столько элементов, сколько в множестве B , да еще c элементов.

В этом случае говорят:

- число a больше числа b на c
- число b меньше числа a на c .

- 
- **Чтобы узнать, на сколько одно число меньше или больше другого, надо из большего числа вычесть меньшее.**



*У школы посадили 4 дуба и 9 лип.
На сколько больше посадили лип?*

*У школы посадили 4 дуба, а лип на 5 больше.
Сколько лип посадили?*

*У школы посадили 9 лип, а дубов на 3 меньше.
Сколько дубов посадили?*

Правила вычитания числа из суммы

$$(28 + 13) - 18$$

$$(28 + 13) - 3$$

$$(28 + 12) - 15$$

Правила вычитания числа из суммы

**Чтобы вычесть число из суммы,
достаточно вычесть это число из
одного из слагаемых и к
полученному результату
прибавить другое слагаемое.**

Правила вычитания суммы из числа

$$52 - (20 + 11)$$


$$52 - (20 + 12)$$

Правила вычитания суммы из числа

Чтобы вычесть из числа сумму чисел, достаточно вычесть из этого числа последовательно каждое слагаемое одно за другим.

Применение правил при решении задач

Утром ушли в море 20 маленьких и 8 больших рыбачьих лодок. 6 лодок вернулись. Сколько лодок с рыбаками должно еще вернуться?



Арифметические задачи,
решение которых связано с
действиями $+$ и $-$

Выделяют три вида ситуаций, связанных с действием сложения:

А) составление одного предметного множества из двух данных

Б) увеличение данного предметного множества на несколько предметов

В) увеличение на несколько предметов множества равносильного данному

А) Составление одного предметного множества из двух данных

Например, детям предлагается картинка, на которой Миша и Маша запускают рыбок в аквариум.

Задание: Расскажите что делают Миша и Маша?

Ответы детей:

- Запускают рыбок в один аквариум;
- вместе запускают рыбок;
- Миша запускает 2, а Маша -3 и др.



Числовые выражения под картинкой. Анализируя выражения дети находят подходящие: $2+3$ и $3+2$.



Выясняется, чем похожи и чем отличаются выражения



В результате, дети записывают равенства, знакомятся с компонентами сложения.

Б) Увеличение данного предметного множества на несколько предметов

Указанием к выполнению предметных действий может стать задание: «Покажи...».

Например, учитель предлагает задание: У Коли было 4 марки. Ему подарили ещё 2. Покажи сколько марок стало у Коли.

Действия детей: выкладывают 4 марки (круг, квадрат, треугольник) и показывают движением руки сколько марок было. Затем, добавляют 2 марки и движением руки показывают сколько стало.

Выясняется, как можно записать, используя для этого цифры, знаки «+» и «=».

$$4+2=6.$$

Целесообразно на этом этапе использовать термины «выражение» и «равенство».

В) Увеличение на несколько предметов множества равносильного данному

Например, учитель даёт задание: На одной тарелке 5 яблок, а на другой на 3 яблока больше. Покажи сколько яблок на второй тарелке?



В процессе выполнения таких предметных действий, у школьников формируются понятие «больше на...» («увеличить на...»), представления о котором связаны с построением совокупности равночисленной данной («взять столько же»), и её увеличением на несколько предметов («и ещё»).

При формировании у детей представлений о вычитании можно условно ориентироваться на следующие предметные ситуации:

А) уменьшение данного предметного множества на несколько предметов (предметы, которые удаляются, зачеркиваются).

Б) уменьшение множества, равносильного данному, на несколько предметов.

В) Сравнение двух предметных множеств, т. е. ответ на вопрос: «На сколько предметов в одном множестве больше (меньше), чем в другом?».

А) уменьшение данного предметного множества на несколько предметов (предметы, которые удаляются, зачеркиваются).

Например, предлагается задание: « У Маши было шесть шаров. Два она подарила Тане. Покажи шары, которые у неё остались?»



Дети рисуют 6 шаров, 2 зачёркивают и показывают движением руки количество оставшихся шаров.



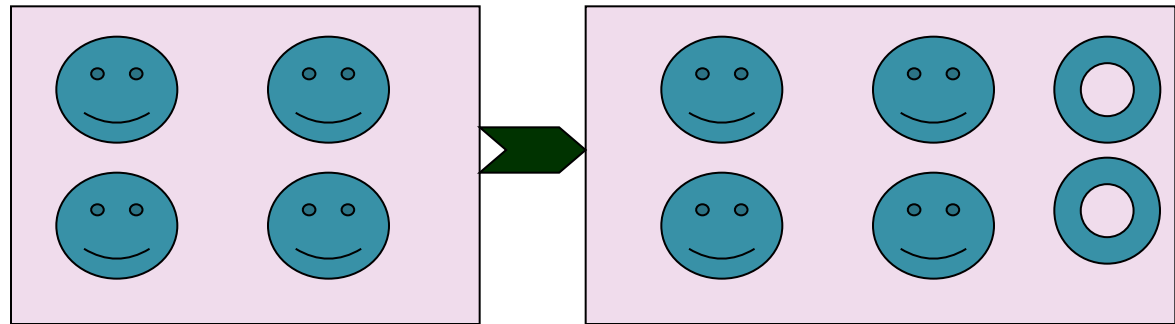
Дети получают выражение $6-2$ или равенство $6-2=4$.

Б) уменьшение множества, равносильного данному, на несколько предметов.

В процессе выполнения таких ситуаций у детей формируется представления о понятии «меньше на...» («уменьшить на...»), которые связаны с построением совокупности, равносильной данной, и её уменьшением на несколько предметов.

Усвоение понятий «больше на...», «меньше на...» даётся детям легче, если организовать их деятельность, используя предметные и символические модели.

Например: Сравни картинки. Что изменилось слева направо? Что изменилось справа налево?



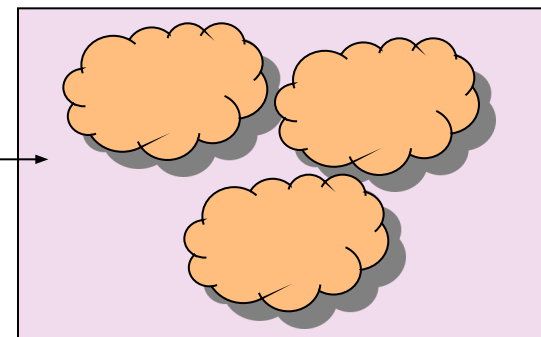
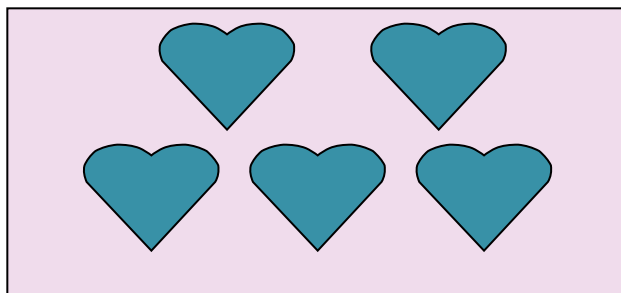
В) Сравнение двух предметных множеств, т. е. ответ на вопрос: «На сколько предметов в одном множестве больше (меньше), чем в другом?».

В процессе выполнения данных действий у учеников формируется представление о вычитании, как о действии, которое связано с уменьшением количества предметов.

В результате у первоклассника формируется представление о разности, которое можно обобщить в правило: «Что бы узнать на сколько одно число больше(меньше) другого, нужно из большего числа вычесть меньшее».

Например:

На сколько больше
сердец, чем
облаков?



Умножение

Произведением целых неотрицательных чисел a и b называется такое целое неотрицательное число $a * b$, которое удовлетворяет следующим условиям:

- $a * b = a + a + a + \dots$ (b раз), при b больше 1.
- $a * 1 = a$ при $b = 1$
- $a * 0 = 0$ при $b = 0$

Умножение

- С точки зрения теоретико-множественного смысла: множества A, B, \dots имеют по a элементов каждое и никакие не пересекаются, то их объединение содержит по a элементов b раз ($a * b$).
- Действие, при помощи которого находят произведение чисел, называют умножением, а числа, которые умножают, - множители

Умножение

На каждое детское пальто нужно пришить по 4 пуговицы. Сколько пуговиц нужно пришить на 6 таких пальто?

Почему задача решается умножением?

Умножение

В задаче требуется найти число элементов в объединении, состоящем их 6 множеств, в каждом из которых по 4 элемента.

Законы умножения:

- Переместительный закон: $a * b = b * a$
- Сочетательный закон: $(a * b) * c = a * (b * c)$
- Распределительный закон относительно сложения:
 $(a + b) * c = ac + bc$
- Распределительный закон относительно вычитания: $(a - b) * c = ac - bc$

$$125 * 15 * 6 * 8$$

Деление

Основой служит теоретико-множественный подход к трактовке частного, суть которого сводится к разбиению конечных множеств на равночисленные подмножества, не имеющие общих элементов.

Деление по содержанию

8 апельсинов разложили на тарелки, по 2 апельсина на каждую. Сколько потребовалось тарелок?

Деление на равные части

12 карандашей раздали 3 ученикам поровну. Сколько карандашей получил каждый?

Следовательно частное определяется следующим образом:

Пусть множество A разбито на попарно непересекающиеся равномоощные подмножества:

- 1) если v - число подмножеств в разбиении множества A , то частным чисел a и v называется число элементов каждого подмножества (деление на равные части)
- 2) если v – число элементов каждого подмножества в разбиении множества A , то частным чисел a и v называется число подмножеств в этом разбиении (деление по содержанию).

$$a : v = c \iff a = v * c$$

Следовательно, $a : 0 = c \iff a = 0 * c$, что невозможно. Значит на 0 делить нельзя.

Отношения «больше в...», «меньше в...»

Посадили 3 дуба и 6 лип. Во сколько раз больше посадили лип?

(разбиение множества лип на подмножества равномоцные множеству дубов, сколько таких подмножеств).

У Нины 3 шарика, а у Коли в 2 раза больше. Сколько шариков у Коли?

(составление 2 подмножеств шариков Коли, равномоцных множеству шариков Нины)

Деление с остатком

- $37:8$ - не делится, но существуют такие числа, что $37=8*4+5$. Говорят, что выполнено деление с остатком.
- Остаток есть натуральное число, меньшее делителя. Так при делении на 5 возможны 5 остатков: 0, 1, 2, 3, 4.
- $a:b$, $a=c*b + \text{ост.}$

Важность деления с остатком в том, что оно лежит в основе алгоритма деления многозначных чисел.