ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Лекція 4

Загальні визначення

Диференціальним рівнянням називають співвідношення, що позв'язує між собою незалежну змінну, функцію та її похідні (чи диференціали)

- ***Порядком*** диференціального рівняння називають найбільший порядок похідної (чи диференціала), що входить у рівняння.
- У ***загальному виді*** диференціальне рівняння *n-го* порядку може бути записано таким чином:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

У цьому рівнянні *x* – незалежна змінна, *y* - невідома функція, y', y'', $y^{(n)}$ - похідні функції.

- Звичайне диференціальне рівняння першого порядку можна записати у такому вигляді:

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (2)$$

•**Загальним розв'язком** диференціального рівняння *n-го* порядку називається функція:

$$y = f(x, C_1, C_2, ..., C_n) \quad (3)$$

де $C_1, C_2, ..., C_n$ - сталі величини.

- **Загальним розв'язком** диференціального рівняння першого порядку називається функція:

$$y = f(x, C) \quad (4)$$

•**Частинним розв'язком** диференціального рівняння (2) називають такий розв'язок, що можна одержати із загального розв'язку (4) при деякому конкретному значенні сталої величини *C*. Це значення знаходять при, так званих, початкових умовах :

$$y = y_0 \qquad x = x_0 \ ,$$

розв'язавши рівняння $y_0 = f(x_0, C)$ відносно *C*.

Рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння першого порядку, що може бути приведене до вигляду:

$$f_1(x)\cdot f_2(y)dx+\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y)dy=0, \qquad (5)$$

називають диференціальним рівняння *з відокремлюваними змінними*.

Після ділення обох частин рівняння на добуток $\varphi_1(x)\cdot f_2(y)$, рівняння (5) прийме вид:

$$\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx+\frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy=0 \qquad (6)$$

Якщо проінтегрувати обидві частини рівняння (6), то його *загальний розв'язок* може бути записаний у вигляді:

$$\int\frac{f_1(x)}{\varphi_1(x)}dx+\int\frac{\varphi_2(y)}{f_2(y)}dy=C \qquad (7)$$

Приклад.
Розв'язати рівняння $y' = x \cdot y$.

Розв'язання. Робимо заміну $y' = \frac{dy}{dx}$.

Одержимо: $$\frac{dy}{dx} = x \cdot y.$$

Розділимо змінні: $$\frac{dy}{y} = x \cdot dx.$$

Проінтегруємо: $$\int \frac{dy}{y} = \int x \cdot dx.$$

Знайдемо інтеграли у лівій та правій частині рівняння:

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C_1, \quad \int x dx = \frac{x^2}{2} + C_2.$$

Прирівнявши значення інтегралів, одержуємо: $\ln|y| = \frac{x^2}{2} + C$.

Звідки $y = e^{\frac{x^2}{2}+C}$ - загальний розв'язок диференціального рівняння

Приклад.

$(y^2-4)dx = x\cdot y\cdot dy$, $\quad y(1)=2$.

Розв'язання. Розділимо змінні: $\dfrac{dx}{x} = -\dfrac{y}{y^2-4}dy$.

Проінтегруємо: $\int \dfrac{dx}{x} = -\int \dfrac{y}{y^2-4}dy$.

Знайдемо інтеграли у лівій та правій частині рівняння: $\int \dfrac{y}{y^2-4}dy = -\int \dfrac{dx}{x}$.

$$\int \frac{y}{y^2-4}dy = \left| \begin{array}{l} \textit{робимо} \quad \textit{заміну}: \\ y^2-4=t; \\ d(y^2-4)=dt; \\ 2ydy=dt \\ ydy=\frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{t} = \ln\left|y^2-4\right| + C_1.$$

$\dfrac{1}{2}\ln\left|y^2-4\right| = -\ln|x| + \ln C$; $\quad \dfrac{1}{2}\ln\left|y^2-4\right| = \ln\left|\dfrac{C}{x}\right|$; $\quad \ln\left|(y^2-4)\right| = 2\ln\left|\dfrac{C}{x}\right|$;

$\ln\left|(y^2-4)\right| = \ln\left|\dfrac{C}{x}\right|^2$; $\quad \ln\left|(y^2-4)\right| = \ln\left|\dfrac{C^2}{x^2}\right|$ $\quad y^2-4 = \dfrac{C^2}{x^2}$;

$y^2 = \dfrac{C^2}{x^2}+4$ - **загальній розв'язок рівняння**, або: $y = \pm\sqrt{\dfrac{C^2}{x^2}+4}$.

Знайдемо частинний розв'язок диференціального рівняння із заданою початковою умовою $\quad y(1)=2$: $\; 2^2 = \dfrac{C^2}{1^2}+4$; $\quad 4 = C^2+4$; $\; C=0$.

Отже: $y=\pm\sqrt{\dfrac{0}{x^2}+4}$; $y=\pm\sqrt{4}$; $y=\pm 2$ - **частинний розв'язок** диференціального рівняння із заданою початковою умовою $\quad y(1)=2$.

Однорідні диференціальні рівняння першого порядку

Однорідним диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння, виду:

$$\frac{dy}{dx}=\varphi(\frac{y}{x}),\text{ або } y'=\varphi(\frac{y}{x}). \qquad (8)$$

Для розв'язування такого рівняння вводять підстановку:

$$u=\frac{y}{x}\text{, де } u=u(x)\text{ - функція.} \qquad (9)$$

Приклад.

Знайти розв'язок диференціального рівняння: $xy' = y - x$.

Розв'язання. Розділимо почленно ліву і праву частини рівняння на x в найвищому степені. У нашому випадку, це перша степінь. Одержимо рівняння:

$$y' = \frac{y}{x} - 1.$$

Введемо підстановку: $u = \dfrac{y}{x}$ і $y' = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xdu}{dx} + u$.

Одержимо:

$$\frac{xdu}{dx} + u = u - 1.$$

Розділимо змінні :

$$\frac{xdu}{dx} = u - 1 - u; \quad \frac{xdu}{dx} = -1; \quad \frac{x}{dx} = -\frac{1}{du}; \quad \frac{dx}{x} = -du;$$

Проінтегруємо обидві частини рівняння: $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = -\int du$.

Знайдемо інтеграли у лівій та правій частині рівняння:

$$\ln|x| + \ln C = -u; \quad \ln Cx = -u; \quad u = -\ln Cx, \text{ або } u = \ln\frac{1}{Cx}.$$

Виконаємо зворотну заміну $\dfrac{y}{x} = \ln\dfrac{1}{Cx}$, та одержимо **загальний розв'язок** рівняння - $y = x\ln\dfrac{1}{Cx}$.

Диференціальні рівняння другого порядку

Диференціальне рівняння другого порядку у загальному виді :

$$F(x, y, y', y'') = 0. \tag{10}$$

Загальним розв'язок даного рівняння буде розв'язок виду:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2). \tag{11}$$

Рішення окремих випадків диференціальних рівнянь другого порядку.

1. *У рівнянні відсутня функція та її похідна.*

Рівняння має вид: $y'' = f(x)$. (12)

Вводимо нову функцію $u(x) = u = y'$. Тоді $y'' = u'(x)$, або $\frac{du}{dx} = f(x)$.

Звідси: $du = f(x)dx$.

Проінтегруємо та розв'яжемо останнє диференціальне рівняння:

$$\int du = \int f(x)dx.$$

Тоді $u = \int f(x)dx + C_1$ - розв'язок диференціального рівняння в інтегральному виді.

Виконаємо зворотну заміну і підставимо в останній розв'язок:

$$\frac{dy}{dx} = \int f(x)dx + C_1.$$

Одержали звичайне диференціальне рівняння з відокремленими змінними. Розв'яжемо його:

$$dy = \left(\int f(x)dx + C_1\right)dx;$$

$$\int dy = \int \left(\int f(x)dx + C_1\right)dx;$$

$$y = \int \left(\int f(x)dx\right)dx + C_1x + C_2 \qquad (13)$$

- загальний розв'язок рівняння.

Приклад.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' = x^2$.

Розв'язання. Робимо заміну: $u(x) = u = y'$, тоді: $y'' = u'(x)$.

Підставимо заміну в рівняння: $u' = x^2$ і запишемо похідну через диференціали: $\frac{du}{dx} = x^2$.

Розв'яжемо одержане рівняння:

$du = x^2 dx$; $\int du = \int x^2 dx$, звідки: $u = \frac{x^3}{3} + C_1$.

Після зворотної заміни $u = y' = \frac{dy}{dx}$, одержимо рівняння: $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{3} + C_1$.

Розв'яжемо рівняння:

$$dy = \left(\frac{x^3}{3} + C_1\right)dx; \quad \int dy = \int\left(\frac{x^3}{3} + C_1\right)dx;$$

$y = \frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2$ - ***загальний розв'язок рівняння.***

Рішення окремих випадків диференціальних рівнянь другого порядку.

2. У рівнянні відсутня функція.

Рівняння має вид:

$$y'' = f(x, y'). \tag{14}$$

Виконаємо заміну: $u(x) = u = y'$. Тоді $y'' = u'(x)$. Або $\frac{du}{dx} = f(x, u)$.

Якщо розв'язок цього рівняння – функція $u = \varphi(x, C_1)$, то зробимо зворотну заміну й одержимо рівняння першого порядку $\frac{dy}{dx} = \varphi(x, C_1)$. Розв'яжемо його:

$$dy = \varphi(x, C_1)dx;$$

$$\int dy = \int \varphi(x, C_1)dx.$$

Загальний розв'язок рівняння: $y = \int \varphi(x, C_1)dx + C_2$ (15)

Приклад.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння: $y'' \cdot x - y' = 1$.

Розв'язання. Це рівняння, що не містить явно шуканої функції.

Робимо заміну: $y' = u(x)$, $y'' = u'(x)$.

Одержимо: $u'x - u = 1$, або $\frac{du}{dx}x = 1 + u$.

Розв'яжемо рівняння: $\frac{du}{1+u} = \frac{dx}{x}$;

$\int \frac{du}{1+u} = \int \frac{dx}{x}$; $\ln|1+u| = \ln|x| + \ln C_1$; $\ln|1+u| = \ln|C_1 \cdot x|$;

$1 + u = C_1 \cdot x$; $u = C_1 x - 1$.

Так як $u = y' = \frac{dy}{dx}$, тоді $\frac{dy}{dx} = C_1 x - 1$.

Розв'яжемо останнє рівняння: $\int dy = \int (C_1 x - 1)dx$.

$y = -C_1 x - x + C_2$ - ***загальній розв'язок рівняння***.

Рішення окремих випадків диференціальних рівнянь другого порядку.

3. У рівнянні відсутній аргумент.

Дано рівняння: $y'' = f(y, y')$. (16)

Виконаємо заміну: $u(x) = u = y' = \dfrac{dy}{dx}$. Тоді: $y'' = u'(x) = \dfrac{du}{dx}$.

Так, як $dx = \dfrac{dy}{u}$, тоді: $y'' = \dfrac{du}{dy/u} = u\dfrac{du}{dy}$.

Підставимо $y' = u$ і $y'' = u\dfrac{du}{dy}$ у рівняння (16), та одержимо рівняння:

$$u\frac{du}{dy} = f(y, C_1).$$

Якщо його розв'язком є функція $u = \varphi(y, C_1)$, то, виконавши зворотну заміну $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$, одержимо рівняння першого порядку: $\dfrac{dy}{dx} = \varphi(y, C_1)$.

Знайдемо його розв'язок:

$$\frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = dx; \qquad \int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = \int dx;$$

$$\int \frac{dy}{\varphi(y, C_1)} = x + C_2 \qquad (17)$$

- ***загальний розв'язок*** диференціального рівняння другого порядку.

Приклад.

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння $y'' = y'$.

Розв'язання. Виконаємо заміну: $u = y' = \frac{dy}{dx}$ і $y'' = u\frac{du}{dy}$.

Одержимо звичайне диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними:

$$u\frac{du}{dy} = u.$$

Розділимо ліву і праву частини на u і розв'яжемо його:

$$\frac{du}{dy} = 1; \qquad du = dy; \qquad \int du = \int dy;$$

$$u = y + C_1.$$

Виконаємо зворотну заміну і розв'яжемо наступне рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = y + C_1; \qquad \frac{dy}{y + C_1} = dx;$$

$$\int \frac{dy}{y + C_1} = \int dx; \quad \ln|y + C_1| = x + C_2; \qquad e^{x + C_2} = y + C_1;$$

$y = e^{x + C_2} - C_1$ - ***загальний розв'язок*** диференціального рівняння.

ДЯКУЮ ЗА УВАГУ!