

# Лекция № 4.

## «Дифференциал и интеграл»

Специальность: «Сестринское дело»

Курс: 2

Дисциплина: «Математика»

Подготовила: преподаватель высшей категории **Фёдорова Олеся Николаевна**

Калуга 2010 год

# Функция. Предел функции

**Функцией** называется соответствие при котором *каждому* значению  $x$  из некоторого множества  $D$  ( $D \in \mathbb{R}$ ) сопоставляется по некоторому правилу единственное число  $y$ , зависящее от  $x$

$$y = f(x)$$

$x$  – аргумент функции (независимая переменная)

$y$  – значение функции  $f$  (зависимая переменная)

$D$  – область определения функции  $D(f)$  – все значения  $x$

Все значения  $y$  – область значений функции  $f$ ,  $E(f)$

**Графиком функции** называется множество точек плоскости с координатами  $(x; y)$ , где  $x$  пробегает всю область определения функции  $f$

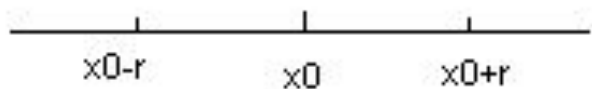
### Способы задания функции

1. Аналитический (рекуррентный) – формула
2. Графический – график функции
3. Табличный – таблица зависимости  $x$  и  $y$

Рассмотрим интервал с центром в точке  $x_0$  и радиусом  $r$

**Окрестностью точки  $x_0$  радиуса  $r$**  называется интервал с центром в точке  $x_0$  радиуса  $r$ ,  $\delta(x_0)$

Если рассматривается окрестность без самой точки  $x_0$ , то она называется **проколотой**  $^\circ\delta(x_0)$



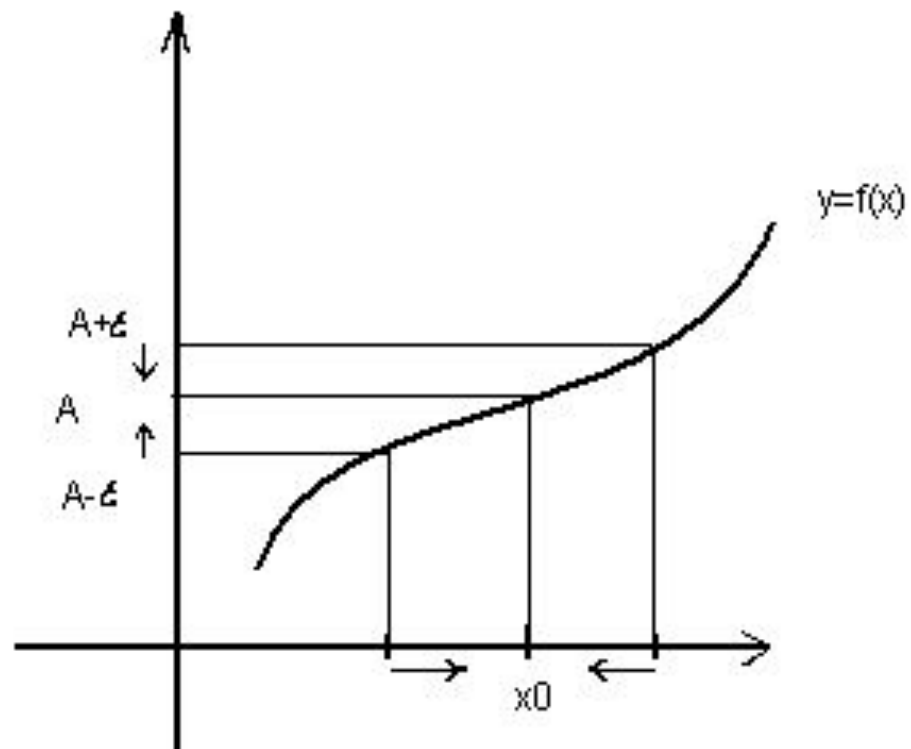
# Предел функции

Число  $A$  называется **пределом функции  $f(x)$  в точке  $x_0$** , если для любого числа  $\varepsilon > 0$ , существует окрестность  $\delta > 0$ , такая, что выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ , для любого  $x$  из окрестности  $\delta(x_0)$

$$-\varepsilon < f(x) - A < \varepsilon$$

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$



# Теоремы о пределах

**Теорема о единственности предела:** если предел функции существует, то он единственный (число  $A$ )

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

**Теорема о пределе суммы:** если существуют пределы функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , то существует предел их суммы равный сумме пределов функций  $f(x)$  и  $g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

**Теорема о пределе произведения:** если существуют пределы функций  $f(x)$  и  $g(x)$ , то существует предел их произведения равный произведению пределов функций  $f(x)$  и  $g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

**Теорема о пределе частного:** если существуют пределы функций  $f(x)$  и  $g(x)$  и предел функции  $g(x)$  не равен нулю, то существует предел их частного равный частному пределов функций  $f(x)$  и  $g(x)$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$



# Следствия из теорем

**Следствие 1:** постоянный множитель можно вынести за знак предела

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

**Следствие 2:** если  $n$  натуральное число, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{x_0}$$

**Следствие 3:** предел многочлена  $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  равен значению многочлена в точке  $x_0$  при  $x \rightarrow x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

**Следствие 4:** предел дробно-рациональной функции

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

равен значению этой функции в точке  $x_0$  при  $x \rightarrow x_0$  если  $x$  принадлежит области определения функции

$$\lim_{x \rightarrow x_0} R(x) = R(x_0)$$

Пример:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (5x^3 - 6x^2 + x - 5) = 5 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 2 - 5 = \\ = 40 - 24 + 2 - 5 = 13$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x + 1}{x - 3} = \frac{2^2 - 2 + 1}{2 - 3} = \frac{4 - 2 + 1}{-1} = \frac{3}{-1} = -3$$

# Производная функции и дифференциал

**Производная функции** – это предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращения аргумента стремятся к нулю

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} = f'(x)$$

# Свойства производной

**Теорема:** производная суммы, произведения, частного вычисляются по следующим формулам:

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$$

$$(c \cdot u)' = c \cdot u'$$

Производная сложной функции:

$$h(x) = f(g(x))$$

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Пример:

$$h(x) = (x^2 + 1)^5$$

$$h'(x) = 5(x^2 + 1)^4 \cdot 2x = 10x \cdot (x^2 + 1)^4$$

# Таблица производных

$y = c$	$y' = 0$
$y = ax^2$	$y' = 2ax$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$y = \frac{1}{x}$	$y' = -\frac{1}{x^2}$
$y = ax + b$	$y' = a$
$y = a^x$	$y' = a^x \cdot \ln a$

$y = e^x$	$y' = e^x$
$y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \cdot \ln x}$
$y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \operatorname{tg} x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$y = \operatorname{ctg} x$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$



# Дифференциал функции

Нахождение производной называется  
**дифференцированием**

**Дифференциал** – это произведение производной функции на приращение аргумента функции  $y = f(x)$

$$dy = f'(x)\Delta x$$

Рассмотрим функцию  $y = x$ , тогда  $y' = 1 \Rightarrow dx = \Delta x \Rightarrow$

$$dy = f'(x)dx \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} \text{ (отношение дифференциалов)}$$

# Свойства дифференциала

1. Дифференциал функции – это главная часть её приращения
2. Дифференциал функции – это линейная функция приращения аргумента или касательная к графику функции  $\Rightarrow$  геометрически  $dy = f'(x)dx$  - уравнение касательной в системе координат  $(dx; dy) \Rightarrow$

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

# Вычисление дифференциала функции

Пример.

$$y = x^3$$

$$y' = 3x^2 \Rightarrow dy = 3x^2 dx$$

$$F = \frac{4}{r^2}$$

$$F' = \frac{-8}{r^3} \Rightarrow dF = \frac{-8}{r^3} dr$$

# Применение дифференциала к приближенным вычислениям

Для функции  $y=f(x)$  и точки  $x_0$  можно приближенно вычислить значение функции в точке  $x$  близкой к  $x_0$ , если знать приращение функции  $\Delta y$  на  $[x_0; x]$ , то точное значение функции  $f(x) = y_0 + \Delta y$ , где  $y_0$  значение функции в точке  $x_0$

Приближенные формулы основаны на замене приращения функции  $\Delta y$  её дифференциалом  $dy$

$$\Delta y = f(x) - y_0$$

$$f(x) - y_0 \approx f'(x_0) \Delta x$$

$$f(x) \approx y_0 + dy \approx y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

Для  $y = x^n$

$$(x_0 + \Delta x)^n \approx x_0^n + nx_0^{n-1} \Delta x$$

Пример:

$$(1,0004)^5 = (1 + 0,0004)^5 \approx 1^5 + 5 \cdot 1^4 \cdot 0,0004 \approx 1 + 0,002 \approx 1,002$$

$$(0,997)^6 = (1 - 0,003)^6 \approx 1^6 - 6 \cdot 1^5 \cdot 0,003 \approx 1 - 0,018 \approx 0,982$$

# Первообразная функции и интеграл

1. Первообразная и неопределенный интеграл
2. Свойства неопределенного интеграла
3. Таблица первообразных
4. Методы интегрирования: непосредственное, замена переменной, интегрирование по частям
5. Определенный интеграл. Формула Ньютона – Лейбница
6. Применение определенного интеграла: вычисление площади фигуры, длины дуги, объема тела
7. Дифференциальные уравнения. Уравнения с разделяющимися переменными

