Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Определение производной

- Производной функции y=f(x) в точке x_0 Называется $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, если этот предел существует. Производная обозначается $f'(x_0)$ или $f'(x_0)$. Таким образом, $y'(x_0)$ =. $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

Таблица производных

$C'=0$, где C – константа.	$(\sin x)'=\cos x$.
$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}$ где n – натуральное число	$(\cos x)'=-\sin x$
$(a^x)'=a^x\cdot\ln a$, где $a>0$, $a\neq1$. В частности, $(e^x)'=e^x$	$(tgx)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$
$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$, где $a>0$, $a\neq1$. В частности, $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.	$(ctgx)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$

(arcsinx)´= $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(arctgx)´= $\frac{1}{1+x^2}$
(arccosx)´=- $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	(arcctgx)´=- $\frac{1}{1+x^2}$

Правила Дифференцирования

- Пусть u=u(x) и v=v(x) – функции, дифференцируемые в точке x. Тогда в этой точке дифференцируемы функции u+v, u·v, $\frac{u}{v}$. Последнее при условии, что v´(x)≠0. Причем, (u+v)´=u´+v´, (uv)´=u´v+uv´, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Производная сложной функции

- Пусть y=f(u), а u=φ(x). Тогда функция y=f(φ(x)) называется сложной функцией от x.
- ***Теорема.*** Если функция u=φ(x) имеет производную в точке x, а функция y=f(u) имеет производную в соответствующей точке u=φ(x), то сложная функция y=f(φ(x)) имеет производную в точке x, причем $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

16.

1. $c' = 0$	8. $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
2. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$	9. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	10. $(\arccos u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
3a. $(e^u)' = e^u \cdot u'$	11. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$	12. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
4a. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	13. $(chu)' = shu \cdot u'$
5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	14. $(shu)' = chu \cdot u'$
6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	15. $(thu)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u'$
7. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	16. $(cthu)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u'$

Дифференцирование функций, заданных параметрически

- Пусть функция y от x задана параметрически уравнениями: x=x(t), y=y(t), $t \in (\alpha;\beta)$.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Пример

- x=cos3t, y=sin3t. Вычислить y_x''.

$x'_t = -3\cos^2 t \cdot \sin t$ $y'_t = 3\sin^2 t \cdot \cos t$ поэтому

$$y'_x = \frac{3\sin^2 t \cos t}{-3\cos^2 t \sin t} = -tgt \cdot (y'_x)'_t = (-tgt)'_t = -\frac{1}{\cos^2 t}$$

$$y''_x = \frac{-1/\cos^2 t}{-3\cos^2 t \sin t} = \frac{1}{3\sin t \cos^4 t}$$

Дифференцирование функций, заданных неявно.

- Вычислить y'_x, если $y^5+xy-x^2=0$.
- Продифференцируем обе части по x. Получим $5y^4y'+y+xy'-2x=0$, откуда $y'(5y^4+x)=2x-y$ и $$y'=\frac{2x-y}{5y^4+x}$$

Логарифмическое дифференцирование

- Найти производную функции $y=(\sin x)^x$.

Логарифмируем функцию по основанию e: $\ln y = x \cdot \ln\sin x$. Дифференцируем обе части равенства по x: $\frac{1}{y} \cdot y' = \ln\sin x + x \cdot \operatorname{ctg} x$

отсюда $y' = y \cdot (\ln\sin x + x \cdot \operatorname{ctg} x)$ или $y' = (\sin x)^x \cdot (\ln\sin x + x \cdot \operatorname{ctg} x)$.

Дифференциал функции

- $dy=f'(x)\cdot dx$

Некоторые теоремы о дифференцируемых функциях!

Теорема Ферма

- Пусть функция $y=f(x)$ определена в интервале (a;b) и принимает в точке c этого интервала наибольшее или наименьшее на (a;b) значение. Если существует $f'(c)$, то $f'(c)=0$

Теорема Ролля

- Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f(a)=f(b)=0$. Тогда ее производная $f'(x)$ обращается в ноль хотя бы в одной точке $c\in(a;b)$.

Теорема Лагранжа

- Пусть функция y=f(x) непрерывна на отрезке [*a*;*b*] и дифференцируема в интервале (*a*;*b*). Тогда существует хотя бы одна точка c $\in$(*a*;*b*), для которой выполняется условие:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

Теорема Лопиталя (правило Лопиталя).

- Пусть f(x) и φ(x) – функции, непрерывные на [*a*;*b*], дифференцируемые на (*a*;*b*); φ´(x)≠0 при всех x $\in$(*a*;*b*) и f(*a*)=φ(*a*)=0. Тогда если существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ причем :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Пример

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0$$

- *Применение производной к исследованию функций*

- *Экстремумы* функции.

Необходимо условие монотонности функции

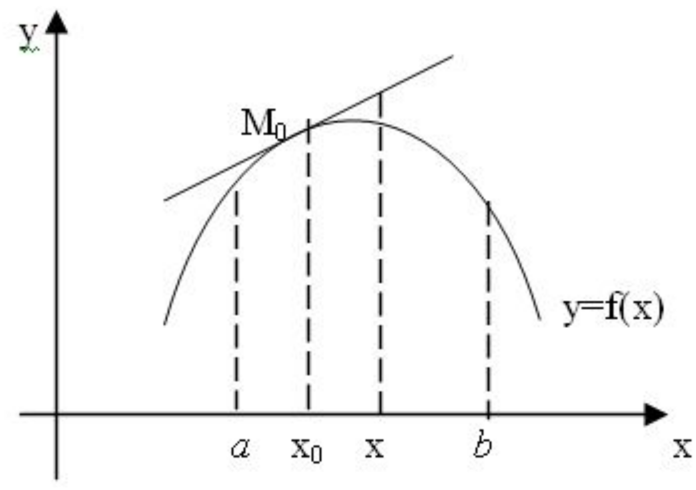
- Если дифференцируемая в интервале (a;b) функция $y=f(x)$ возрастает (убывает) на (a;b), то для всех $x(a;b)$ $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$)

Достаточный признак существования экстремума

- Если непрерывная на интервале функция y=f(x) имеет производную f´(x) во всех точках этого интервала, за исключением, может быть, критической точки *c*, принадлежащей этому интервалу, и если f´(x) при переходе аргумента слева направо через критическую точку *c* меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то функция в точке с имеет максимум (минимум)

Выпуклость и вогнутость графика функции

- График дифференцируемой функции называется выпуклым (вогнутым) в интервале (*a*;*b*), если он расположен ниже (выше) любой своей касательной на этом интервале



Достаточный признак выпуклости и вогнутости

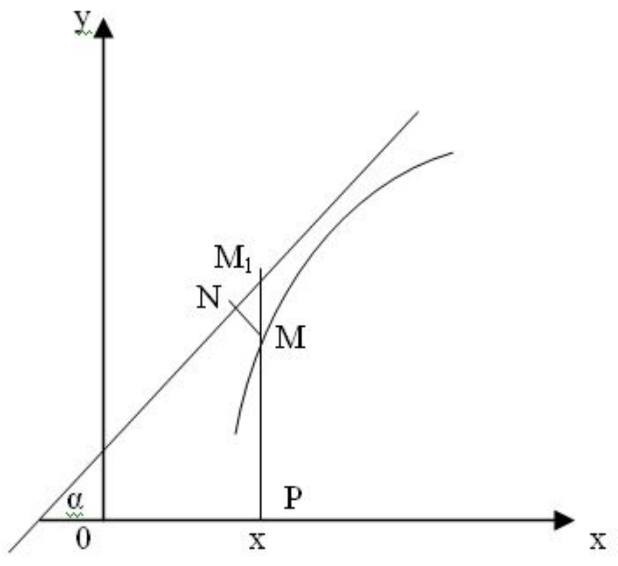
- Пусть функция y=f(x) имеет вторую производную f´´(x) во всех точках интервала (*a*;*b*). Если во всех точках этого интервала f´´(x)<0 (f´´(x)>0), то график на (*a*;*b*) выпуклый (вогнутый).

Достаточный признак существования точки перегиба

- Если вторая производная f´(x) непрерывной функции меняет знак при переходе аргумента через точку x_0, то точка $(x_0;f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции.

Асимптоты графика функции

- Асимптотой графика функции y=f(x) называется прямая, расстояние от которой до текущей точки графика функции стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат.



План исследования функции и построение графика

1. Область определения функции.
2. Точки пересечения графика функции с осями координат.
3. Четность, нечетность функции.
4. Исследование функции на непрерывность. Вертикальные асимптоты.
5. Невертикальные асимптоты.
6. Интервалы монотонности и экстремумы.
7. Интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.
8. Дополнительные точки, $\lim_{x\to\infty} f(x)$, периодичность (по мере необходимости).
9. Построение графика.

Пример Исследовать функцию $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 4}$ и построить ее график.

1. Область определения:

$(-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;+\infty)$,

так как при $x=-2$ и $x=2$ знаменатель дроби обращается в ноль.

$$\frac{x}{x^2 - 4} = 0$$

2. Пусть x=0, тогда y=0. Пусть y=0, тогда , откуда x=0.

(0;0) – точка пересечения графика с осями координат

3.

$$y(-x) = \frac{x^2}{x^2 - 4} = y(x)$$

- функция четная.

4. Функция имеет разрывы в точках x=-2 и x=2, так как f(-2) и f(2) не определены.

$$\lim_{x\to -2-}\frac{x^2}{x^2-4}=+\infty, \quad \lim_{x\to -2+}\frac{x^2}{x^2-4}=-\infty,$$

$$\lim_{x\to 2-}\frac{x^2}{x^2-4}=+\infty, \quad \lim_{x\to 2-}\frac{x^2}{x^2-4}=-\infty,$$

следовательно, x=-2 и x=2 – точки разрыва II рода и прямые x=-2 и x=2 – вертикальные асимптоты.

5.Невертикальные асимптоты

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{(x^2-4)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x^2}}=0$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{4}{x^2}}=1$$

следовательно, прямая y=1 – асимптота.

6.

$$y' = \frac{2x\cdot(x^2-4)-2x\cdot x^2}{(x^2-4)^2} = -\frac{8x}{(x^2-4)^2}$$

- y´=0, если -8x=0, откуда x=0 – критическая точка. Откуда x=-2 и x=2 – критические точки.

  На интервалах (-∞;-2) и (-2;0) функция возрастает, а на интервалах (0;2) и (2;+∞) – убывает.

  Ymax(0)=0.

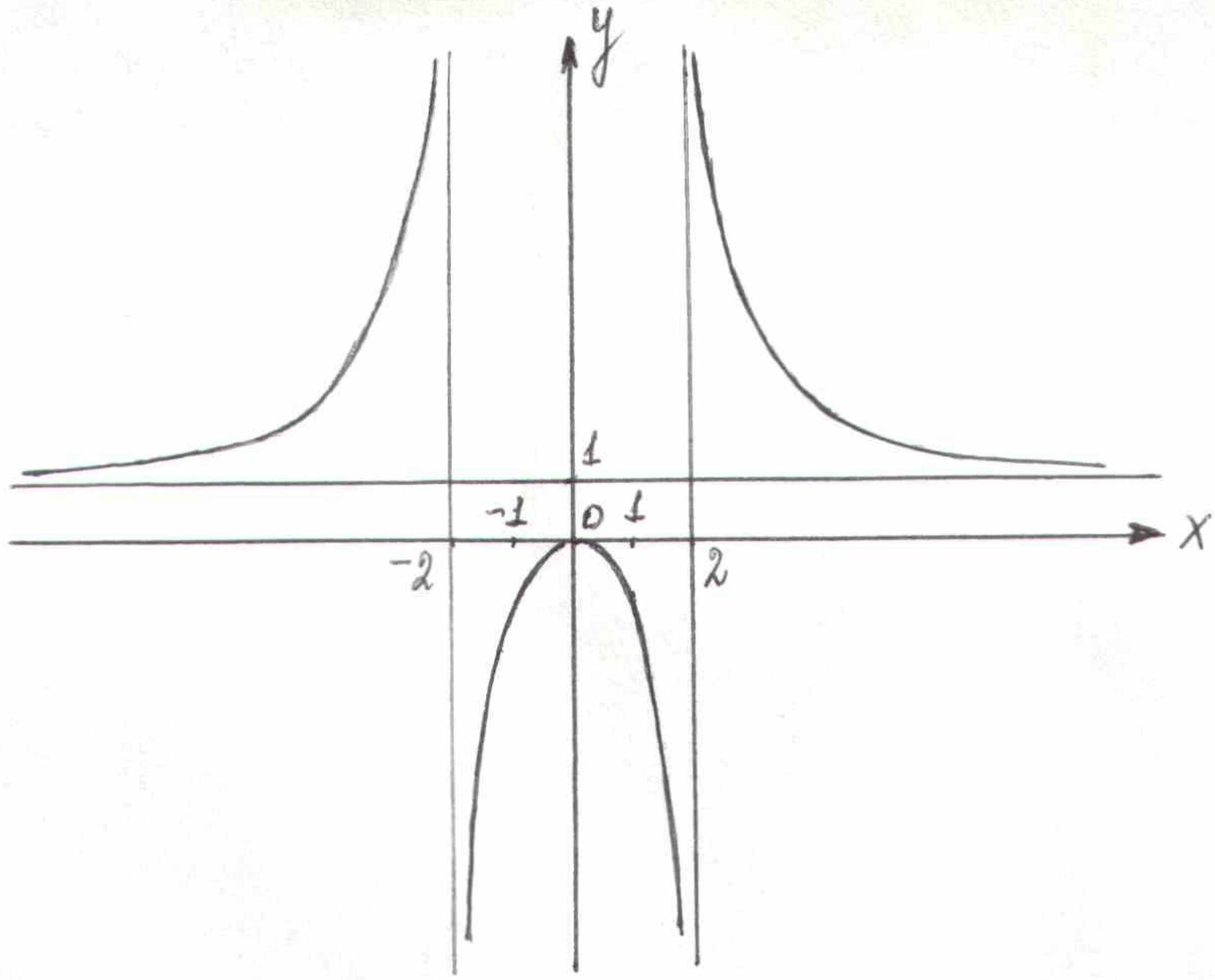
7.

$$y'' = -\frac{8\cdot(x^2-4)^2 - 8x\cdot 2(x^2-4)\cdot 2x}{(x^2-4)^4} = -\frac{8(x^2-4)-32x^2}{(x^2-4)^3} =$$

$$= -\frac{8x^2-32-32x^2}{(x^2-4)^3} = \frac{24x^2+32}{(x^2-4)^3}$$

у´´≠0 при х(-∞;∞), х=-2 и х=2 – критические точки второго порядка.

На интервалах (-∞;-2) и (2;+∞) – график функции вогнутый, а на интервале (-2;2) – выпуклый. Точек перегиба нет



y
1
-1
0
1
X
-2
2