

Дифференциальное исчисление функции одной переменной.

Определение производной

- Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, если этот предел существует. Производная обозначается $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$. Таким образом, $y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$




Таблица ПРОИЗВОДНЫХ

$C' = 0$, где C – константа.	$(\sin x)' = \cos x$.
$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ где n – натуральное число	$(\cos x)' = -\sin x$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, где $a > 0$, $a \neq 1$. В частности, $(e^x)' = e^x$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, где $a > 0$, $a \neq 1$. В частности, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arctg x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\text{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Правила Дифференцирования

- Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – функции, дифференцируемые в точке x . Тогда в этой точке дифференцируемы функции $u+v$, $u \cdot v$, $\frac{u}{v}$. Последнее при условии, что $v'(x) \neq 0$. Причем, $(u+v)' = u' + v'$, $(uv)' = u'v + uv'$, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

Производная сложной функции

- Пусть $y=f(u)$, а $u=\varphi(x)$. Тогда функция $y=f(\varphi(x))$ называется сложной функцией от x .
- **Теорема.** Если функция $u=\varphi(x)$ имеет производную в точке x , а функция $y=f(u)$ имеет производную в соответствующей точке $u=\varphi(x)$, то сложная функция $y=f(\varphi(x))$ имеет производную в точке x , причем $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

1. $c' = 0$	8. $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
2. $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$	9. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
3. $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	10. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
3a. $(e^u)' = e^u \cdot u'$	11. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$	12. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$
4a. $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	13. $(chu)' = shu \cdot u'$
5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	14. $(shu)' = chu \cdot u'$
6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	15. $(thu)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u'$
7. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	16. $(cthu)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u'$

Дифференцирование функций, заданных параметрически

- Пусть функция y от x задана параметрически уравнениями: $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t \in (\alpha;\beta)$.

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

Пример

- $x = \cos 3t$, $y = \sin 3t$. Вычислить y_x'' .

$$x'_t = -3 \cos^2 t \cdot \sin t \quad y'_t = 3 \sin^2 t \cdot \cos t \quad \text{ПОЭТОМУ}$$

$$y'_x = \frac{3 \sin^2 t \cos t}{-3 \cos^2 t \sin t} = -\operatorname{tgt} \cdot (y'_x)'_t = (-\operatorname{tgt})'_t = -\frac{1}{\cos^2 t}$$

$$y''_x = \frac{-1/\cos^2 t}{-3 \cos^2 t \sin t} = \frac{1}{3 \sin t \cos^4 t}$$

Дифференцирование функций, заданных неявно.


- Вычислить y'_x , если $y^5 + xy - x^2 = 0$.
- Продифференцируем обе части по x .
Получим $5y^4 y' + y + xy' - 2x = 0$, откуда $y'(5y^4 + x) = 2x - y$ и
$$y' = \frac{2x - y}{5y^4 + x}$$

Логарифмическое дифференцирование

- Найти производную функции $y=(\sin x)^x$.
Логарифмируем функцию по основанию e : $\ln y = x \cdot \ln \sin x$. Дифференцируем обе части равенства по x : $\frac{1}{y} \cdot y' = \ln \sin x + x \cdot \operatorname{ctg} x$
отсюда $y' = y \cdot (\ln \sin x + x \cdot \operatorname{ctg} x)$ или $y' = (\sin x)^x \cdot (\ln \sin x + x \cdot \operatorname{ctg} x)$.

Дифференциал функции

- $dy=f'(x) \cdot dx$



*Некоторые теоремы
о дифференцируемых
функциях!*

Теорема Ферма

- Пусть функция $y=f(x)$ определена в интервале $(a;b)$ и принимает в точке c этого интервала наибольшее или наименьшее на $(a;b)$ значение. Если существует $f'(c)$, то $f'(c)=0$

Теорема Ролля

- Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, дифференцируема на интервале $(a;b)$ и $f(a)=f(b)=0$. Тогда ее производная $f'(x)$ обращается в ноль хотя бы в одной точке $c \in (a;b)$.

Теорема Лагранжа

- Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и дифференцируема в интервале $(a;b)$. Тогда существует хотя бы одна точка $c \in (a;b)$, для которой выполняется условие:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$



Теорема Лопиталя (правило Лопиталя).

- Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ – функции, непрерывные на $[a;b]$, дифференцируемые на $(a;b)$; $\varphi'(x) \neq 0$ при всех $x \in (a;b)$ и $f(a) = \varphi(a) = 0$. Тогда если существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то существует $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$ причем :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$$

Пример

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$



- *Применение
производной к
исследованию функций*



- *Экстремумы*
функции.

Необходимо условие монотонности функции

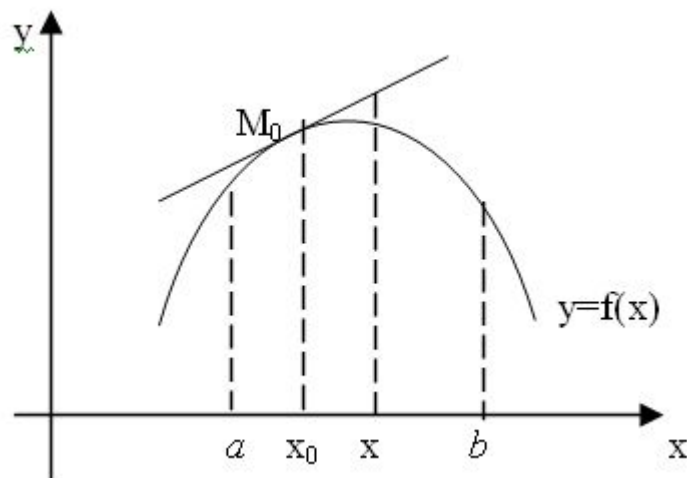
- Если дифференцируемая в интервале $(a;b)$ функция $y=f(x)$ возрастает (убывает) на $(a;b)$, то для всех $x(a;b)$ $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$)

Достаточный признак существования экстремума

- Если непрерывная на интервале функция $y=f(x)$ имеет производную $f'(x)$ во всех точках этого интервала, за исключением, может быть, критической точки c , принадлежащей этому интервалу, и если $f'(x)$ при переходе аргумента слева направо через критическую точку c меняет знак с плюса на минус (с минуса на плюс), то функция в точке c имеет максимум (минимум)

Выпуклость и вогнутость графика функции

- График дифференцируемой функции называется выпуклым (вогнутым) в интервале $(a;b)$, если он расположен ниже (выше) любой своей касательной на этом интервале



Достаточный признак выпуклости и вогнутости

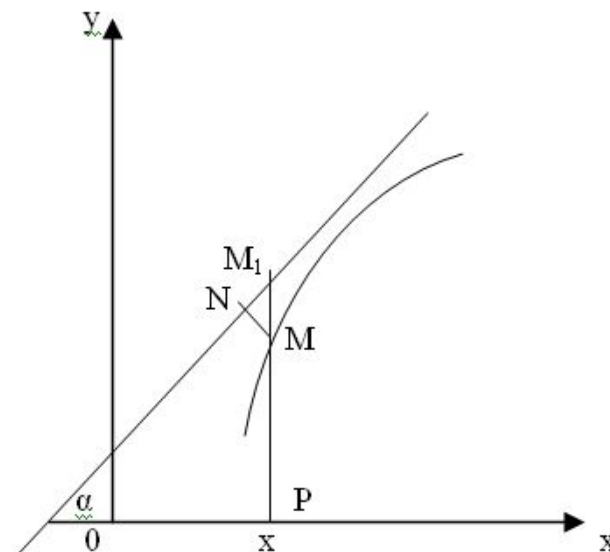
- Пусть функция $y=f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ во всех точках интервала $(a;b)$. Если во всех точках этого интервала $f''(x)<0$ ($f''(x)>0$), то график на $(a;b)$ выпуклый (вогнутый).

Достаточный признак существования точки перегиба

- Если вторая производная $f''(x)$ непрерывной функции меняет знак при переходе аргумента через точку x_0 , то точка $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции.

Асимптоты графика функции

- Асимптотой графика функции $y=f(x)$ называется прямая, расстояние от которой до текущей точки графика функции стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат.



План исследования функции и построение графика

1. Область определения функции.
2. Точки пересечения графика функции с осями координат.
3. Четность, нечетность функции.
4. Исследование функции на непрерывность. Вертикальные асимптоты.
5. Невертикальные асимптоты.
6. Интервалы монотонности и экстремумы.
7. Интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба.
8. Дополнительные точки, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, периодичность (по мере необходимости).
9. Построение графика.

Пример Исследовать функцию

$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ и построить ее график.

1. Область определения:

$(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$,
так как при $x = -2$ и $x = 2$ знаменатель дроби
обращается в ноль.

$$\frac{x}{x^2 - 4} = 0$$

2. Пусть $x=0$, тогда $y=0$. Пусть $y=0$,
тогда , откуда $x=0$.

$(0;0)$ – точка пересечения графика с
осями координат

3.

$$y(-x) = \frac{x^2}{x^2 - 4} = y(x)$$

- функция четная.

4. Функция имеет разрывы в точках $x=-2$ и $x=2$, так как $f(-2)$ и $f(2)$ не определены.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{x^2 - 4} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{x^2 - 4} = -\infty,$$

следовательно, $x=-2$ и $x=2$ – точки разрыва II рода и прямые $x=-2$ и $x=2$ – вертикальные асимптоты.

5. Невертикальные асимптоты

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{(x^2 - 4)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{x^2}} = 1$$

следовательно, прямая $y=1$ – асимптота.

6.

$$y' = \frac{2x \cdot (x^2 - 4) - 2x \cdot x^2}{(x^2 - 4)^2} = -\frac{8x}{(x^2 - 4)^2}$$

- $y' = 0$, если $-8x = 0$, откуда $x = 0$ – критическая точка. Откуда $x = -2$ и $x = 2$ – критические точки.

На интервалах $(-\infty; -2)$ и $(-2; 0)$ функция возрастает, а на интервалах $(0; 2)$ и $(2; +\infty)$ – убывает.

$U_{\max}(0) = 0$.

7.

$$y'' = -\frac{8 \cdot (x^2 - 4)^2 - 8x \cdot 2(x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^4} = -\frac{8(x^2 - 4) - 32x^2}{(x^2 - 4)^3} =$$
$$= -\frac{8x^2 - 32 - 32x^2}{(x^2 - 4)^3} = \frac{24x^2 + 32}{(x^2 - 4)^3}$$

$y'' \neq 0$ при $x \in (-\infty; \infty)$, $x = -2$ и $x = 2$ – критические точки второго порядка.

На интервалах $(-\infty; -2)$ и $(2; +\infty)$ – график функции вогнутый, а на интервале $(-2; 2)$ – выпуклый. Точек перегиба нет

