Дифференциальные уравнения 2-го порядка

Лекция 5

Основные понятия

Уравнение 2-го порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

Или $$y'' = f(x, y, y')$$

Общим решением уравнения второго порядка называется такая функция $y = \varphi(x, c_1, c_2)$, которая при любых значениях параметров c_1, c_2 является решением этого уравнения.

Задача Коши для уравнения 2-го порядка

Если уравнение 2-го порядка разрешить относительно второй производной, то для такого уравнения имеет место задача: найти решение уравнения $y'' = f(x, y, y')$,

удовлетворяющее начальным условиям:

$y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y_0'$

Эту задачу называют *задачей Коши* для дифференциального уравнения 2-гопорядка.

Теорема существования и единственности решения уравнения 2-го порядка

Если в уравнении $y'' = f(x, y, y')$ функция $f(x, y, y')$ и ее частные производные по аргументам y и y' непрерывны в некоторой области, содержащей точку (x_0, y_0, y'_0) ,

то существует и притом единственное решение $y = y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее условиям

$y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y'_0$

Уравнения 2-го порядка, допускающие понижение

Простейшее уравнение 2-го порядка

$y'' = f(x)$ решают двукратным интегрированием.

Уравнение $F(x, y', y'') = 0$, не содержащее явно y, решают с помощью подстановки $y' = p$, $y'' = p'$

Уравнение $F(y, y', y'') = 0$, не содержащее x, решают заменой

$$y' = p, \qquad y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

Пример

Проинтегрируем $y'' = x + \sin x$

Имеем $y' = \dfrac{x^2}{2} - \cos x + C_1,$

и $y = \dfrac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2 .$

Пример

Уравнение $y'' - y'e^{y} = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$
не содержит явно *x*, поэтому решаем его
подстановкой

$$y' = p, \quad y'' = pp'$$

$$pp' - pe^{y} = 0, p' = e^{y}, p = e^{y} + C_1,$$

$$y' = e^{y} + C_1.$$

При *x*=0

$$C_1 = 0$$

$$y' = e^{y}, \frac{dy}{dx} = e^{y}, \frac{dy}{e^{y}} = dx, \ -e^{-y} = x + C_2.$$

Ответ

$$-e^{-y} = x - 1.$$

Линейные однородные уравнения

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение . $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

Если все коэффициенты этого уравнения постоянны, то уравнение называется уравнением с постоянными коэффициентами .

Свойства решений линейного однородного уравнения

Теорема 1. Если $y(x)$ является решением уравнения , то и $Cy(x)$, где С-константа, также является решением этого уравнения.

Свойства решений линейного однородного уравнения

Теорема 2. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - решения уравнения, то и их сумма также является решением этого уравнения.

Следствие. Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - решения уравнения, то функция

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

-также решение этого уравнения.

Линейно зависимые и линейно независимые функции

Две функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются линейно зависимыми на некотором промежутке, если можно подобрать такие числа α и β ,не равные нулю одновременно, что линейная комбинация этих функций тождественно равна нулю на этом промежутке, т. е.

$$\alpha y_1 + \beta y_2 \equiv 0$$

Линейно зависимые и линейно независимые функции

Если таких чисел подобрать нельзя, то функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ называются линейно независимыми на указанном промежутке.

Функции $y_1(x)$ и $y_2(x)$ будут линейно зависимыми тогда и только тогда, когда их отношение постоянно, т. е.

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = k$$

Теорема о структуре общего решения линейного однородного уравнения 2-го порядка

Если $y_1(x)$ и $y_2(x)$ -линейно независимые частные решения ЛОУ 2-го порядка, то их линейная комбинация $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$, где C_1 и C_2 - произвольные постоянные, является общим решением этого уравнения.

Линейное однородное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение $k^2 + pk + q = 0$ ***называется характеристическим уравнением*** линейного уравнения $y'' + py' + qy = 0$.

Оно получается из ЛОУ заменой соотвтетствующей порядку производной степенью k .