

# *Дифференциальные уравнения 2-го порядка*

## Лекция 5

# Основные понятия

Уравнение 2-го порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

Или  $y'' = f(x, y, y')$

Общим решением уравнения второго порядка называется такая функция  $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ , которая при любых значениях параметров  $C_1, C_2$  является решением этого уравнения.

# Задача Коши для уравнения 2-го порядка

Если уравнение 2-го порядка разрешить относительно второй производной, то для такого уравнения имеет место задача: найти решение уравнения  $y'' = f(x, y, y')$ , удовлетворяющее начальным условиям:

$$y(x_0) = y_0 \text{ и } y'(x_0) = y'_0$$

Эту задачу называют *задачей Коши* для дифференциального уравнения 2-го порядка.

# ***Теорема существования и единственности решения уравнения 2-го порядка***

Если в уравнении  $y'' = f(x, y, y')$  функция  $f(x, y, y')$  и ее частные производные по аргументам  $y$  и  $y'$  непрерывны в некоторой области, содержащей точку  $(x_0, y_0, y'_0)$ , то существует и притом единственное решение  $y = y(x)$  этого уравнения, удовлетворяющее условиям

$$y(x_0) = y_0 \text{ и } y'(x_0) = y'_0$$

# Уравнения 2-го порядка, допускающие понижение

Простейшее уравнение 2-го порядка

$y'' = f(x)$  решают двукратным интегрированием.

Уравнение  $F(x, y', y'') = 0$  не содержащее явно  $y$ , решают с помощью подстановки  $y' = p$  ,  $y'' = p'$

Уравнение  $F(y, y', y'') = 0$  не содержащее  $x$ , решают заменой

$$y' = p, \quad y'' = \frac{dp}{dy} \cdot p$$

# Пример

Проинтегрируем  $y'' = x + \sin x$

Имеем  $y' = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1,$

и  $y = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1x + C_2.$

# Пример

Уравнение  $y'' - y'e^y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$   
не содержит явно  $x$ , поэтому решаем его  
подстановкой

$$y' = p, \quad y'' = pp'$$
$$pp' - pe^y = 0, \quad p' = e^y, \quad p = e^y + C_1,$$

$$y' = e^y + C_1.$$

При  $x=0$   $C_1 = 0$

$$y' = e^y, \quad \frac{dy}{dx} = e^y, \quad \frac{dy}{e^y} = dx, \quad -e^{-y} = x + C_2.$$

Ответ  $-e^{-y} = x - 1.$

# Линейные однородные уравнения

Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка называется уравнение

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Если все коэффициенты этого уравнения постоянны, то уравнение называется уравнением с постоянными коэффициентами .



# Свойства решений линейного однородного уравнения

**Теорема 1.** Если  $y(x)$  является решением уравнения , то и  $Cy(x)$ , где  $C$ -константа, также является решением этого уравнения.

# Свойства решений линейного однородного уравнения

**Теорема 2.** Если  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  - решения уравнения, то и их сумма также является решением этого уравнения.

**Следствие.** Если  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  - решения уравнения, то функция

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

-также решение этого уравнения.

# Линейно зависимые и линейно независимые функции

Две функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  называются **линейно зависимыми** на некотором промежутке, если можно подобрать такие числа  $\alpha$  и  $\beta$ , не равные нулю одновременно, что линейная комбинация этих функций тождественно равна нулю на этом промежутке, т. е.

$$\alpha y_1 + \beta y_2 \equiv 0$$

# Линейно зависимые и линейно независимые функции

Если таких чисел подобрать нельзя, то функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  называются линейно независимыми на указанном промежутке.

Функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  будут линейно зависимыми тогда и только тогда, когда их отношение постоянно, т. е.

$$\frac{y_1(x)}{y_2(x)} = k$$

## ***Теорема о структуре общего решения линейного однородного уравнения 2-го порядка***

Если  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$ -линейно независимые частные решения ЛОУ 2-го порядка, то их линейная комбинация  $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ , где  $C_1$  и  $C_2$  - произвольные постоянные, является общим решением этого уравнения.

# Линейное однородное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами

Уравнение  $k^2 + pk + q = 0$  называется **характеристическим уравнением** линейного уравнения  $y'' + py' + qy = 0$  .

Оно получается из ЛОУ заменой соответствующей порядку производной степенью  $k$  .