

Высшая математика



Сергиенко Людмила Семёновна -

**доктор технических наук,
профессор кафедры Общеобразовательных
Дисциплин Заочно-Вечернего Факультета
Иркутского Государственного Технического
Факультета - ООД ЗВФ Ир ГТУ.**

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Решения различных геометрических, физических, инженерных, экономических и многих других практических и теоретических задач часто приводят к *дифференциальным уравнениям*, которые *связывают независимые переменные*, характеризующие исследуемый процесс, *с функциями этих переменных и их производными различных порядков*.

З а м е ч а н и е 1.

Исходную функцию при этом считают *производной порядка ноль*.

З а м е ч а н и е 2.

В отличие от рассматриваемых в данном курсе производных – *производных целого порядка* - в последнее время всё чаще используются так называемые *производные дробного порядка или фрактальные производные*. Полученные при этом результаты оказываются более адекватными реальным процессам. Фрактальные методы используются, например, военными при обработке и сжатии цифровых изображений для сокращения объёма и кодирования информации, что особенно важно как для увеличения скорости передачи так и для эффективности хранения данных.

ТЕМА 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

- **Обыкновенным дифференциальным уравнением** называется уравнение, связывающее одну независимую переменную x , неизвестную функцию $y(x)$ и её производные
$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

- Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения**.

Пример.

- $x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, в общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$,
- $x \frac{d^2 y}{dx^2} + y \frac{dy}{dx} + x^2 = y$ - обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, в общем виде записывается $F(x, y, y', y'') = 0$.
- **Решением дифференциального уравнения** называется дифференцируемая функция, при подстановке производных которой в уравнение получаем тождество.

Пример.

Функции $y_1 = -\cos x$ и $y_2 = 5x - \cos x$ являются решениями дифференциального уравнения $y'' - \cos x = 0$, так как $y_1' = \sin x$, $y_2' = 5 + \sin x$, а производные $y_1'' = y_2'' = \cos x$ при подстановке в исходное уравнение вместо y'' дают верное равенство при любых x : $\cos x - \cos x \equiv 0$.

- **Общим решением** дифференциального уравнения n -ого порядка $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ называется его решение $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, которое содержит n произвольных C_1, C_2, \dots, C_n .

Пример.

Функция $y = -\cos x + C_1 x + C_2$ с двумя произвольными постоянными C_1 и C_2 является общим решением дифференциального уравнения 2-ого порядка $y'' - \cos x = 0$, так как

$$y' = -\sin x + C_1 + 0 = \sin x + C_1$$

а производная $y'' = (y')' = \cos x + 0 = \cos x$ при подстановке в исходное уравнение даёт тождество $\cos x - \cos x \equiv 0$.

- **Частными решениями** дифференциального уравнения $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ называются функции, получающиеся из его общего решения при конкретных наборах значений произвольных постоянных C_1, C_2, \dots, C_n .

Пример.

Функции $y_1 = -\cos x$ и $y_2 = 5x - \cos x$ являются частным решением дифференциального уравнения $y'' - \cos x = 0$, так как получена из его общего решения

$y = -\cos x + C_1 x + C_2$ при значениях произвольных постоянных $\{C_1 = 0; C_2 = 0\}$ и $\{C_1 = 5; C_2 = 0\}$ соответственно.

1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Общим решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка $F(x, y, y') = 0$ называется такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x, C)$, которая при подстановке в исходное уравнение обращает его в тождество.

Любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием, называется **интегралом** этого дифференциального уравнения

Так как постоянная C может принимать любое численное значение, то дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений, которое геометрически представляет собой однопараметрическое семейство параллельных кривых вида $y = \varphi(x, C)$.

Задачей Коши называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида $y = \varphi(x, C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

График $y = \varphi(x, C_0)$ частного решения дифференциального уравнения первого порядка на плоскости XOY называется **интегральной кривой**.

Задача Коши является задачей определения линии из семейства интегральных кривых $y = \varphi(x, C)$, проходящей при $x = x_0$ через точку $(x_0; y_0)$

Пример. Найти решение дифференциального уравнения $xy' + y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $x_0 = 1; y_0 = 2$.

Решение. Так как $y' = \frac{dy}{dx}$ $\Rightarrow xy' + y = 0 \Leftrightarrow x \frac{dy}{dx} + y = 0 \Rightarrow$

$$x dy = -y dx \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln|C| \Leftrightarrow \ln|y| + \ln|x| = \ln|C| \Rightarrow \ln|xy| = \ln|C| \Rightarrow$$

$xy = C$ - интеграл, $y = \frac{C}{x}$ - общее решение дифференциального уравнения.

Полагая $x_0 = 1; y_0 = 2$ имеем $2 = \frac{C}{1} \rightarrow C = 2 \Rightarrow$

$y = \frac{2}{x}$ - частное решение данного дифференциального уравнения при заданных начальных условиях (решение задачи Коши).

О т в е т: $y = \frac{2}{x}$

1.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

$$Y' = \alpha(x)\beta(y) \quad \text{□□□□□□□□□□}$$

Представим данное уравнение в дифференциальной форме записи.

$$y' - \alpha(x)\beta(y) = 0; \quad dy - \alpha(x)\beta(y)dx = 0; \quad \frac{dy}{\beta(y)} - \alpha(x)dx = 0 \text{ при } \beta(y) \neq 0;$$

Обозначая $\alpha(x) = X(x)$, $\frac{1}{\beta(y)} = Y(y)$ получаем

$$\text{□□□□□□□□□□} = \text{□□□□□□□□□□} \quad \text{□□□□□□□□□□}$$

$$\Rightarrow \text{□} \text{□□□□□□□□□□} = \text{□} \text{□□□□□□□□□□} + \text{□□}$$

После нахождения соответствующих интегралов получается общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Если заданы начальные условия, то при их подстановке в общее решение находится постоянная величина C , а, соответственно, и частное решение.

Пример. Найти решение дифференциального уравнения: $y' = \frac{-2x}{\cos y}$

Решение. Так как уравнение имеет вид $y' = -\frac{2x}{\cos y}$ или $y' = -\frac{2x}{\cos y}$, где $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{\cos y}$, то это уравнение с разделяющимися переменными.

Приведём его к виду $\cos y \cdot dy = -2x dx$

$$y \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x \Leftrightarrow y \cos y dy = -2x dx \Rightarrow \int y \cos y dy = -2 \int x dx$$

Интеграл, стоящий в левой части, берется по частям (см. Интегрирование по частям.):

$$\int y \cos y dy = \left\{ \begin{array}{l} u = y; \quad dv = \cos y dy; \\ du = dy; \quad v = \sin y \end{array} \right\} = y \sin y - \int \sin y dy = y \sin y + \cos y \Rightarrow$$

$y \sin y + \cos y = -x^2 + C \Leftrightarrow y \sin y + \cos y + x^2 + C = 0$ - общий интеграл исходного дифференциального уравнения, т.к. искомая функция не выражена через независимую переменную.

О т в е т: $y \sin y + \cos y + x^2 + C = 0$ - общий интеграл

1.2. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Имеют вид
$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \quad (1)$$

Вводя новую функцию
$$t = \frac{y}{x} \quad (2)$$

получим уравнение с разделяющимися переменными t и x :

$$(2) \Rightarrow y = tx, \quad dy = t dx + x dt \quad \Rightarrow y' = \frac{t dx + x dt}{dx}.$$

$$(1) \Rightarrow \frac{t dx + x dt}{dx} = f(t) \Leftrightarrow t dx + x dt = f(t) dx,$$

$$x dt = (f(t) - t) dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x} \quad (3)$$

Решив уравнение (3) и заменив t на $\frac{Y}{x}$, получим общий интеграл исходного однородного дифференциального уравнения.

Пример. Решить уравнение $y = \frac{y}{x} \left(\ln \frac{y}{x} + 1 \right)$.

Решение. Выполняя подстановку $t = \frac{y}{x}$, $y' = \frac{t dx + x dt}{dx}$

получим $\frac{t dx + x dt}{dx} = t \ln t + 1 \Rightarrow t dx + x dt = (t \ln t + 1) x dx$

$x dt = (t \ln t + 1) x dx - t dx$. Раскрывая скобки, получим

$$x dt = x \ln t + x - t dx \Rightarrow \frac{x dt}{x \ln t} = \frac{x - t dx}{x \ln t}.$$

Интегрируя, получаем: $\ln \ln t = \ln C + \ln t$

(вместо произвольной постоянной C можно поставить любую функцию от C , которая также будет новой произвольной постоянной).

Используя свойство логарифмов $\ln t + \ln t = \ln t^2$, получим

$$\ln \ln t = \ln C + \ln t \Rightarrow \ln t = \frac{\ln C}{\ln t} \Leftrightarrow \log_{\ln t} C = \frac{1}{\ln t} \text{ или } t = C^{\frac{1}{\ln t}}.$$

Переходя от вспомогательной функции $t = \frac{y}{x}$ обратно к функции y ,

$$\text{получаем } \frac{y}{x} = C^{\frac{1}{\ln \frac{y}{x}}} \Rightarrow y = C x^{\frac{1}{\ln \frac{y}{x}}}.$$

О т в е т: общее решение данного уравнения $y = C x^{\frac{1}{\ln \frac{y}{x}}}$.

1.3 ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Имеют вид
$$y' + P(x)y = Q(x), \quad (1)$$

Общее решение определяется по формуле

$$y = e^{-F} \left(\int Q(x) e^F dx + C \right), \quad (2)$$

где $F = \int P(x) dx$ при нулевой произвольной постоянной

Пример. Решить уравнение $x^2 y' + y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Приведем данное уравнение к стандартному виду (1):

$$y' + \frac{1}{x^2} y = e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow P = \frac{1}{x^2}; \quad Q = e^{\frac{1}{x}}. \text{ Так как общее решение определяется по}$$

формуле (2), в которой $\int P(x) dx = \int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$ найдём сначала

$$\int Q(x) e^{\int P(x) dx} dx = \int e^{\frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{x}} dx = \int 1 dx = x + C_1 = \frac{1}{-1} + C_1 = -\frac{1}{x} + C_1$$

Полагая $C_1 = 0$, найдём общее решение:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x^2} \left(\int e^{\frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{x}} dx + C_1 \right) = \frac{1}{x^2} \left(\int 1 dx + C_1 \right) = \frac{1}{x^2} \left(x + C_1 \right) = \frac{1}{x} + \frac{C_1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

О т в е т: $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$

2. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Заменой переменных приводятся к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

2.1. Уравнения второго порядка, не содержащие явно искомой функции

Имеют вид
$$F(x, y' y'') = 0. \quad (1)$$

Подстановкой
$$z = y', \quad z' = y'' \quad (2)$$

уравнение (1) приводится к виду
$$F(x, z, z') = 0.$$

Определяя $z(x)$ из последнего дифференциального уравнения первого порядка, найдём $y(x)$ как решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными

$$z(x) = \frac{dy}{dx} \Leftrightarrow dy = z(x) dx \Rightarrow \int dy = \int z(x) dx + C.$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' = \frac{y'}{x}$.

Решение. Применяя подстановку $z' = \frac{z}{x}$, $z'' = \frac{z}{x^2}$ получаем

$$z' = \frac{z}{x}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}; \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}; \quad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln|C_1|, \quad \ln|z| = \ln|C_1 x| \Rightarrow z = C_1 x$$

Произведя обратную замену, получаем:

$$y' = C_1 x, \quad y = \int C_1 x dx = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2;$$

Обозначая $\bar{C}_1 = \frac{C_1}{2}$, получаем $y = \bar{C}_1 x^2 + C_2$.

З а м е ч а н и е. Это соотношение является решением данного уравнения для всех значений переменной x кроме $x = 0$.

О т в е т: общее решение уравнения при всех $x \neq 0$ имеет вид $y = \bar{C}_1 x^2 + C_2$.

2.2. Уравнения, не содержащие явно независимой переменной.

Это уравнения вида $F_1(y, y', y'') = 0$ (1)

Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу с помощью замены переменных $y' = p$. (2)

Тогда $y'' = \frac{dp}{dy} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dy} = \frac{dp}{dy} \cdot 1$ или $y'' = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dy}$. (3)

Подставляя эти значения в уравнение (1) получаем дифференциальное уравнение первого порядка относительно переменных y и p :

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right) = 0$$

Определив функцию p из последнего уравнения, найдём y из дифференциального уравнения с разделяющимися переменными (3):

$$\frac{dp}{dy} = \dots \text{ или } \frac{dp}{dy} = \dots$$

Пример. Найти решение уравнения $y'' + 2xy' = 0$.

Решение. Замена $y' = u \Rightarrow y'' = u' \Rightarrow u' + 2xu = 0$ приводит к уравнению первого

порядка $u' + 2xu = 0 \Leftrightarrow u' = -2xu \Rightarrow \frac{u'}{u} = -2x \Rightarrow \ln|u| = -x^2 + C \Rightarrow u = C_1 e^{-x^2}$.

Из уравнения $u = 0$ имеем $y' = 0$, $y = C$ решение данного уравнения.

Из второго уравнения $\frac{u'}{u} = -2x$ получаем $\ln|u| = -x^2 + C$

$$u' + 2xu = 0 \Rightarrow \frac{u'}{u} = -2x \Rightarrow \ln|u| = -x^2 + C \Rightarrow u = C_1 e^{-x^2}$$

Заменяя u на $\frac{dy}{dx}$ приходим к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = C_1 e^{-x^2} \Rightarrow dy = C_1 e^{-x^2} dx \Rightarrow y = \frac{C_1}{3} e^{-x^2} + C_2$$

$$y = \frac{C_1}{3} e^{-x^2} + C_2 \text{ — общий интеграл исходного уравнения.}$$

3. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Уравнение содержит искомую функцию и её производные только в первых степенях.

Имеют вид
$$y'' + p \cdot y' + qy = f(x), \quad (1)$$

где p, q – заданные числа.

3.1. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Уравнение вида (1), где $f(x) = 0$;
$$y'' + p \cdot y' + qy = 0, \quad (2)$$

называется *однородным*.

Общее решение уравнения (2) строится в зависимости от корней квадратного характеристического уравнения
$$k^2 + pk + q = 0. \quad (3)$$

1. Если $k_1 \neq k_2$ - вещественные числа, $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

2. Если $k_1 = k_2$ - вещественные числа, $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_2 x}$

3. Если $k_{1,2} = \alpha \pm \beta j$ - пара комплексно-сопряжённых корней, где $j = \sqrt{-1}$ - мнимая единица, то

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Пример 1. Решить уравнение $y'' - 7y' + 6y = 0$.

РЕШЕНИЕ. Характеристическое уравнение $k^2 - 7k + 6 = 0$.

Корни этого уравнения $k_1 = 1$ и $k_2 = 6$ являются действительными несовпадающими числами: поэтому общее решение однородного уравнения

имеет вид: $y = c_1 e^x + c_2 e^{6x}$.

ОТВЕТ: $y = c_1 e^x + c_2 e^{6x}$ - общее решение данного уравнения

3.1. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Уравнение $y'' + py' + qy = f(x)$, (1)

где $f(x) \neq 0$, называется *неоднородным*.

Его общее решение имеет вид $y = v(x) + y_0(x)$, (2)

где $v(x)$ – общее решение соответствующего однородного уравнения

$$v'' + pv' + qv = 0, \quad (3)$$

а $y_0(x)$ – частное решение данного неоднородного уравнения

$$y_0'' + py_0' + qy_0 = f(x). \quad (4)$$

- **Метод подбора частного решения (метод неопределённых коэффициентов).**

Этот метод применим только к линейным уравнениям вида

$$y'' + py' + qy = f(x), \quad (1)$$

с правой частью вида $f(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x], \quad (2)$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – полные многочлены от x степени m и n соответственно,

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

$$Q_m(x) = b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \dots + b_{m-1} x + b_m.$$

Частное решение уравнения (1) следует искать в виде

$$y_0(x) = x^r e^{\alpha x} [P_l(x) \cos \beta x + Q_l(x) \sin \beta x], \quad (3)$$

Здесь обозначены:

r - кратность мнимого корня $k = \alpha + \beta j$ в характеристическом уравнении $k^2 + pk + q = 0$
(если такого корня нет, то следует положить $r = 0$),

$l = \max(n; m)$ – наибольшее из чисел m и n .

Неопределённые коэффициенты a_l и b_l из (3) определяются из системы линейных алгебраических уравнений, получаемых отождествлением коэффициентов подобных членов в правой и левой частях исходного дифференциального уравнения (1) после подстановки в него $y_0(x)$ вместо y .

Задача Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Решение. Общее решение имеет вид $y = v(x) + y_0(x)$, $v' + 6v = 0$,

1 этап. Найдём общее решение $v(x)$. Соответствующее однородное уравнение $v'' - 7v' + 6v = 0$ имеет характеристическое уравнение $k^2 - 7r + 6 = 0 \Rightarrow$

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 6 \quad - \text{его корни} \quad \Rightarrow \quad \underline{v = C_1 e^x + C_2 e^{6x}}$$

2 этап. Найдём структуру частного решения y_0 данного уравнения

Если $f(x) = e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x]$, то должно быть

$$y_0(x) = x^r e^{\alpha x} [P_l(x) \cos \beta x + Q_l(x) \sin \beta x]$$

Правая часть имеет вид $f(x) = e^x [(x-2) \cos(0 \cdot x) + (x-2) \sin(0 \cdot x)]$.

Так как в простом (однократном) корне характеристического уравнения $k_1 = 1 + 0j = \alpha + \beta j$ $\alpha = 1, \beta = 0$ совпадают с параметрами α и β правой части $f(x)$, имеем

показатель степени $r=1 \Rightarrow y_0(x) = x^1 \cdot e^x [P_1(x) \cos(0 \cdot x) + Q_1(x) \sin(0 \cdot x)]$

$$\Leftrightarrow y_0(x) = x e^x [(ax + b) \cos 0 + (cx + d) \sin 0] \Rightarrow \underline{y_0(x) = e^x (ax^2 + bx)}$$

3

этап.

Найдём неопределённые коэффициенты a и b и функцию y_0 .

В уравнение $y'' - 7y' + 6y = (x - 2)e^x$ вместо y вставим функцию $y_0(x) = e^x(ax^2 + bx)$

и её производные $y'_0 = (ax^2 + 2ax + bx + b)e^x$, $y''_0 = (ax^2 + 4ax + bx + 2a + 2b)e^x$

Получим тождество $e^x(-10ax + 2a - 5b) = e^x(x - 2)$.

Сокращая обе части равенства на $e^x \neq 0$ и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -10a = 1, \\ 2a - 5b = -2. \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{10}, b = \frac{9}{25}.$$

Следовательно частное решение

$$\underline{y_0(x) = e^x \left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x \right)}$$

Найдём общее решение $y(x)$ исходного уравнения

Так как $y = v(x) + y_0(x)$, получаем

$$\underline{y = c_1 e^x + c_2 e^{6x} + e^x \left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x \right)}.$$

5 этап Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$

Дифференцируя функцию

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{6x} + e^x \left(-\frac{1}{10} x^2 + \frac{9}{25} x \right).$$

имеем

$$y' = c_1 e^x + 6c_2 e^{6x} + e^x \left(-\frac{1}{10} x^2 + \frac{4}{25} x + \frac{9}{25} \right).$$

Так как при $x = 0$ должно выполняться $y = 1, \quad y' = 3$, получаем

$$\begin{cases} c_1 e^0 + c_2 e^0 + e^0 \cdot 0 = 1, \\ c_1 e^0 + 6c_2 e^0 + e^0 \cdot \left(0 + \frac{9}{25} \right) = 3, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ c_1 + 6c_2 = \frac{66}{25} \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения $\begin{cases} c_1 = 1 - c_2, \\ 5c_2 = \frac{41}{25} \end{cases} \Rightarrow c_2 = \frac{41}{125}, \quad c_1 = \frac{84}{125}$

О т в е т : частное решение задачи Коши имеет вид:

$$y = \frac{84}{125} e^x + \frac{41}{125} e^{6x} + e^x \left(-\frac{1}{10} x^2 + \frac{9}{25} x \right).$$