Высшая математика

Сергиенко Людмила Семёновна -

доктор технических наук,
профессор кафедры Общеобразовательных Дисциплин Заочно-Вечернего Факультета Иркутского Государственного Технического Факультета - ООД ЗВФ Ир ГТУ.

Д И Ф Ф Е Р Е Н Ц И А Л Ь Н Ы Е У Р А В Н Е Н И Я

Решения различных геометрических, физических, инженерных, экономических и многих других практических и теоретических задач часто приводят к ***дифференциальным уравнениям***, которые ***связывают независимые переменные***, характеризующие исследуемый процесс, ***с функциями этих переменных и их производными различных порядков.***

З а м е ч а н и е 1.
Исходную функцию при этом считают *производной порядка ноль*.

З а м е ч а н и е 2.
В отличие от рассматриваемых в данном курсе производных – *производных целого порядка* - в последнее время всё чаще используются так называемые ***производные дробного порядка или фрактальные производные***. Полученные при этом результаты оказываются более адекватными реальным процессам. Фрактальные методы используются, например, военными при обработке и сжатии цифровых изображений для сокращения объёма и кодирования информации, что особенно важно как для увеличения скорости передачи так и для эффективности хранения данных.

ТЕМА 1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

- ***Обыкновенным дифференциальным уравнением*** называется уравнение, связывающее одну независимую переменную *x*, неизвестную функцию *y (x)* и её производные $$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0.$$

- Наивысший порядок производной, входящей в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения.**

Пример.

- $x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$ - обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, в общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$,
- $x\dfrac{d^2 y}{dx^2} + y\dfrac{dy}{dx} + x^2 = y$ - обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, в общем виде записывается $F(x, y, y', y'') = 0$,

- ***Решением дифференциального уравнения*** называется дифференцируемая функция, при подстановке производных которой в уравнение получаем тождество.

Пример.

Функции $y_1 = -\cos x$ и $y_2 = 5x - \cos x$ являются решениями дифференциального уравнения $y'' - \cos x = 0$, так как $y_1' = \sin x$, $y_2' = 5 + \sin x$, а производные $y_1'' = y_2'' = \cos x$ при подстановке в исходное уравнение вместо y'' дают верное равенство при любых x: $\cos x - \cos x \equiv 0$.

- ***Общим решением*** *дифференциального уравнения n-ого порядка* $F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$ *называется его решение* $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, *которое содержит n произвольных* $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Пример.

Функция $y = -\cos x + C_1 x + C_2$ с двумя произвольными постоянными C_1 и C_2 является общим решением дифференциального уравнения 2- ого порядка $y'' - \cos x = 0$, так как

$$y' = -(\cos x)' + (C_1 x)' + (C_2)' = -(-\sin x) + C_1 + 0 = \boxed{\sin x + C_1}$$

а производная $y'' = (y')' = (\sin x + C_1)' = \boxed{\cos x}$ при подстановке в исходное уравнение даёт тождество $\cos x - \cos x \equiv 0$.

- ***Частными решениями*** *дифференциального уравнения* $F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0$ *называются функции, получающиеся из его общего решения при конкретных наборах значений произвольных постоянных* $C_1, C_2, \dots, C_n$.

Пример.

Функции $y_1 = -\cos x$ и $y_2 = 5x - \cos x$ являются частным решением дифференциального уравнения $y'' - \cos x = 0$, так как получена из его общего решения $y = -\cos x + C_1 x + C_2$ при значениях произвольных постоянных $\{C_1 = 0; C_2 = 0\}$ и $\{C_1 = 5; C_2 = 0\}$ соответственно.

1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Общим решением обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка $F(x, y, y') = 0$ называется такая дифференцируемая функция $y = \varphi(x, C)$, которая при подстановке в исходное уравнение обращает его в тождество.

Любое уравнение, не содержащее производных, для которого данное дифференциальное уравнение является следствием, называется **интегралом** этого дифференциального уравнения

Так как. постоянная C может принимать любое численное значение, то дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений, которое геометрически представляет собой однопараметрическое семейство параллельных кривых вида $y = \varphi(x, C)$.

Задачей Коши называется нахождение любого частного решения дифференциального уравнения вида $y = \varphi(x,C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0) = y_0$.

График $y = \varphi(x,C_0)$ частного решения дифференциального уравнения первого порядка на плоскости XOY называется **интегральной кривой**.

Задача Коши является задачей определения линии из семейства интегральных кривых $y = \varphi(x, C)$, проходящей при $x = x_0$ через точку $(x_0; y_0)$

Пример. Найти решение дифференциального уравнения $xy' + y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $x_0 = 1; y_0 = 2$.

Р е ш е н и е. Так как [illegible] $=$ [illegible] => [illegible] $+$ [illegible] $=$ [illegible] <=> $x\frac{dy}{dx} + y = 0$ =>

$xdy = -ydx$ <=> $\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$ => $\int\frac{dy}{y} = -\int\frac{dx}{x}$ =>

ln[illegible] $= -$ ln[illegible] $+$ ln[illegible] <=> ln[illegible] $+$ ln[illegible] $=$ ln[illegible] => ln[illegible] $=$ ln[illegible] =>

[illegible] $=$ [illegible] *интеграл,* [illegible] $=$ [illegible] - *общее решение дифференциального уравнения.*

Полагая $x_0 = 1; y_0 = 2$ имеем $2 = \frac{C}{1} \to \quad C = 2$ =>

[illegible] $=$ [illegible] - *частное решение данного дифференциального уравнение при заданных начальных условиях (решение задачи Коши).*

О т в е т: [illegible] $=$ [illegible]

1.1. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

$$Y' = \alpha(x)\beta(н)$$ [illegible]

Представим данное уравнение в дифференциальной форме записи.

$$y' - \alpha(x)\beta(y) = 0; \quad dy - \alpha(x)\beta(y)dx = 0; \quad \frac{dy}{\beta(y)} - \alpha(x)dx = 0 \ при \ \beta(y) \neq 0;$$

Обозначая $\alpha(x) = X(x)$, $\frac{1}{\beta(y)} = Y(y)$ получаем

[illegible] = [illegible] [illegible]

=> [illegible] = [illegible] + [illegible]

После нахождения соответствующих интегралов получается общее решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

Если заданы начальные условия, то при их подстановке в общее решение находится постоянная величина С, а, соответственно, и частное решение.

Пример. Найти решение дифференциального уравнения: $yy' = \frac{-2x}{\cos y}$

Р е ш е н и е. Так как уравнение имеет вид $\square' = -\square \frac{2}{\square \cos \square}$ или $\square' = \square\square\square\square\square$, где $\square\square = -\square$, $\square\square = \frac{2}{\square \cos \square}$, то это уравнение с разделяющимися переменными.

Приведём его к виду $\square\square\square = \square\square\square$.

$$y\cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x \quad <=> \quad y\cos y dy = -2x dx \quad => \int y\cos y dy = -2\int x dx$$

Интеграл, стоящий в левой части, берется по частям (см. Интегрирование по частям.):

$$\int y\cos y dy = \left\{ \begin{matrix} u = y; & dv = \cos y dy; \\ du = dy; & v = \sin y \end{matrix} \right\} = y\sin y - \int \sin y dy = y\sin y + \cos y =>$$

$y\sin y + \cos y = -x^2 + C \quad <=> y\sin y + \cos y + x^2 + C = 0$ - общий интеграл исходного дифференциального уравнения, т.к. искомая функция $\square$ не выражена через независимую переменную.

О т в е т: $y\sin y + \cos y + x^2 + C = 0$ - общий интеграл

1.2. ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Имеют вид $$\boldsymbol{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)} \qquad (\mathbf{1})$$

Вводя новую функцию $$\boldsymbol{t = \frac{y}{x}} \qquad (\mathbf{2})$$

получим уравнение с разделяющимися переменными t и x:

$(\mathbf{2}) => \ y = tx, \quad dy = t\,dx + x\,dt \quad => \ \mathrm{y}' = \frac{\mathrm{t\,dx + x\,dt}}{\mathrm{dx}}$.

$(\mathbf{1}) \ => \frac{t\,dx + x\,dt}{dx} = f(t) \ <=> \ t\,dx + x\,dt = f(t)\,dx,$

$$x\,dt = (f(t) - t)dx \quad => \quad \frac{dt}{f(t) - t} = \frac{dx}{x} \qquad (3)$$

Решив уравнение (3) и заменив t на $\frac{Y}{x}$, получим общий интеграл исходного однородного дифференциального уравнения.

Пример. Решить уравнение $y' = \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x}+1\right)$.

Р е ш е н и е. Выполняя подстановку $□ = \frac{□}{□}$, $y' = \frac{t\,dx + x\,dt}{dx}$

получим $\frac{t\,dx+x\,dt}{dx} = □□\ln □ + 1□$ $=>$ $t\,dx + x\,dt = □□\ln □ + 1□□□□$,

$x\,dt = □□\ln □ + 1□□□□ - t\,dx$. Раскрывая скобки, получим

$□□□□ = □\ln □□□□$ $=>$ $\frac{□□□}{□\ln □} = \frac{□□□}{□}$, $□\frac{□□□}{□\ln □} = □\frac{□□□}{□}$.

Интегрируя, получаем: $\ln|\ln □| = \ln|□| + \ln|□|$

(вместо произвольной постоянной *C* можно поставить любую функцию от *C*, которая также будет новой произвольной постоянной).

Используя свойство логарифмов $\ln □ + \ln □ = \ln □□$, получим

$\ln|\ln □| = \ln|C□|$ $=>$ $\ln □ = □□□$ $<=>$ $\log_{□} □ = □□□$ или $□ = □^{□□}$.

Переходя от вспомогательной функции $□ = \frac{□}{□}$ обратно к функции y,

получаем $\frac{□}{□} = □^{□□}$ $=>$ $□ = □□^{□□}$.

О т в е т: общее решение данного уравнения $□ = □□^{□□}$.

1.3 ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Имеют вид
$$y' + P(x)y = Q(x), \qquad (1)$$

Общее решение определяется по формуле
$$y = e^{-F}\left(\int Q(x)e^{F}dx + C\right), \qquad (2)$$

где $F = \int P(x)\,dx$ при нулевой произвольной постоянной

Пример. Решить уравнение $x^2y' + y = x^2e^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Приведем данное уравнение к стандартному виду (1):

$y' + \frac{1}{x^2}y = e^{\frac{1}{x}}$ => $\quad P = \frac{1}{x^2};\quad Q = e^{\frac{1}{x}}$. Так как общее решение определяется по формуле (2), в которой $F = \int P(x)dx$, найдём сначала

$$F = \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}dx = \int x^{n}dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C_1 = \frac{x^{-1}}{-1} + C_1 = -\frac{1}{x} + C_1$$

Полагая $C_1 = 0$, найдём общее решение:

$$y = e^{\frac{1}{x}}\left(\int e^{-\frac{1}{x}} \bullet e^{\frac{1}{x}}dx + C\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\int e^{-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}dx + C\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\int e^{-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}dx + C\right) =$$

$$= \int e^{-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}}dx = e^{\frac{1}{x}}\left(\int e^{0}dx + C\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\int dx + C\right) = e^{\frac{1}{x}}(x + C)$$

Ответ: $y = e^{\frac{1}{x}}(x + C)$

2. Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Заменой переменных приводятся к обыкновенному дифференциальному уравнению первого порядка

2.1. Уравнения второго порядка, не содержащие явно искомой функции

Имеют вид $$F(x, y'y'') = 0. \qquad (1)$$

Подстановкой $$z = y', \qquad z' = y'' \qquad (2)$$

уравнение (1) приводится к виду $F(x, z, z') = 0.$

Определяя *z(x)* из последнего дифференциального уравнения первого порядка, найдём *y(x)* как решение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными

$$z(x) = \frac{dy}{dx} \quad <=> \quad dy = z(x)dx \quad => \int dy = \int z(x)dx + C.$$

Пример. Найти общее решение уравнения $y'' = \dfrac{y'}{x}$.

Р е ш е н и е. Применяя подстановку $y' = z,\ y'' = \dfrac{dz}{dx}$ получаем

$$z' = \frac{z}{x}; \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}; \qquad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}; \qquad \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x};$$

$$\ln|z| = \ln|x| + \ln|C_1|, \qquad \ln|z| = \ln|C_1 x| \quad \Rightarrow \quad z = C_1 x.$$

Произведя обратную замену, получаем:

$$y' = C_1 x; \qquad y = \int C_1 x\,dx = \frac{C_1}{2} x^2 + C_2;$$

Обозначая $\bar{C}_1 = \frac{C_1}{2}$, получаем $y = \bar{C}_1 x^2 + C_2$.

З а м е ч а н и е. Это соотношение является решением данного уравнения для всех значений переменной x кроме x =0.

О т в е т: общее решение уравнения при всех $x \neq 0$ имеет вид $y = \bar{C}_1 x^2 + C_2$.

2.2. Уравнения, не содержащие явно независимой переменной.

Это уравнения вида [illegible] $= 0$ (1)

Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу с помощью замены переменных $y' = p.$ (2)

Тогда [illegible] **или** [illegible]. (3)

Подставляя эти значения в уравнение (1) получаем дифференциальное уравнение первого порядка относительно переменных [illegible] **и** [illegible]:

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right) = 0$$

Определив функцию p из последнего уравнения, найдём y из дифференциального уравнения с разделяющимися переменными (3):

[illegible] **или** [illegible].

Пример. Найти решение уравнения $y'' + 2y(y')^3 = 0.$

Р е ш е н и е. Замена $y' => p,\ y'' => p\dfrac{dp}{dy}$ приводит к уравнению первого порядка $p\dfrac{dp}{dy} + 2yp^3 = 0 <=> p\left(\dfrac{dp}{dy} + 2yp^2\right) = 0 => \left[\begin{array}{l} p = 0, \\ \dfrac{dp}{dy} + 2yp^2 = 0. \end{array}\right.$

Из уравнения $p = 0$ имеем $y' = 0$, $\boxed{y = C}$ *решение данного уравнения.*

Из второго уравнения $\dfrac{dp}{dy} + 2yp^2 = 0$ получаем $\dfrac{dp}{p^2} = -2y\,dy,$

$$\int p^{-2}dp = -\int 2y\,dy \quad => \quad \frac{p^{-1}}{-1} = -y^2 - C_1 \quad <=> \quad \frac{1}{p} = y^2 + C_1.$$

Заменяя p на $\dfrac{dy}{dx}$ приходим к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{dx}{dy} = y^2 + C_1 \quad => \quad dx = (y^2 + C_1)dy => \int dx = \int (y^2 + C_1)dy \quad =>$$

$\boxed{x = \dfrac{y^3}{3} + C_1 y + C_2.}$ – *общий интеграл исходного уравнения.*

3. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Уравнение содержит искомую функцию и её производные только в первых степенях.

Имеют вид $y'' + p \cdot y' + qy = f(x)$, (1)

где *p, q* – заданные числа.

3.1. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

Уравнение вида (1), где $f(x) = 0$; $y'' + p \cdot y' + qy = 0$, (2)

называется *однородным*.

Общее решение уравнения (2) строится в зависимости от корней квадратного *характеристического уравнения* $k^2 + pk + q = 0$. (3)

1. Если $k_1 \neq k_2$ - вещественные числа, $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$

2. Если $k_1 = k_2$ - вещественные числа, $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 x e^{k_2 x}$

3. Если $k_{1,2} = \alpha \pm \beta j$ - пара комплексно-сопряжённых корней, где $j = \sqrt{-1}$ - мнимая единица, то

$$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x).$$

Пример 1. Решить уравнение $y'' - 7y' + 6y = 0.$

Р Е Ш Е Н И Е. Характеристическое уравнение $k^2 - 7k + 6 = 0.$

Корни этого уравнения $k_1 = 1$ и $k_2 = 6$ являются действительными несовпадающими числами: поэтому общее решение однородного уравнения имеет вид: $y = c_1 e^x + c_2 e^{6x}$.

О т в е т: $y = c_1 e^x + c_2 e^{6x}$ - общее решение данного уравнения

3.1. Линейные неоднородные уравнения с постоянными коэффициентами

Уравнение $$y'' + py' + qy = f(x), \quad (1)$$
где $f(x) \neq 0$, называется *неоднородным*.

Его общее решение имеет вид $$y = v(x) + y_0(x), \quad (2)$$
где $v(x)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения
$$v'' + pv' + qv = 0, \quad (3)$$
а $y_0(x)$ — частное решение данного неоднородного уравнения
$$y_0'' + py_0' + qy_0 = f(x). \quad (4)$$

- **Метод подбора частного решения (метод неопределённых коэффициентов).**

Этот метод применим только к линейным уравнениям вида

$$y''+py'+qy=f(x), \qquad (1)$$

с правой частью вида $$f(x)=e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x], \qquad (2)$$

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ − полные многочлены от x степени m и n соответственно,

$P_n(x) = a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+ \ldots + a_{n-1}x+a_n$,

$Q_m(x)=b_0x^m+b_1x^{m-1}+b_2x^{m-2}+ \ldots + b_{n-1}x+b_m$.

Частное решение уравнения (1) следует искать в виде

$$y_0(x)=x^re^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x+Q_l(x)\sin\beta x], \qquad (3)$$

Здесь обозначены:

r - кратность мнимого корня $k=\alpha+\beta j$ в характеристическом уравнении $k^2+pk+q=0$ (если такого корня нет, то следует положить $r=0$),

$l=\max(n;m)$ − наибольшее из чисел m и n.

Неопределённые коэффициены a_l и b_l из (3) определяются из системы линейных алгебраических уравнений, получаемых отождествлением коэффициентов подобных членов в правой и левой частях исходного дифференциального уравнения (1) после подстановки в него $y_0(x)$ вместо y.

Задача Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$

Р е ш е н и е. Общее решение имеет вид $y = v(x) + y_0(x), \; v' + 6v = 0,$

1 этап. *Найдём общее решение* $\boldsymbol{v(x)}$. *Соответствующее однородное уравнение* $v'' - 7v' + 6v = 0$ имеет характеристическое уравнение $k^2 - 7r + 6 = 0$ =>

$k_1 = 1, \quad k_2 = 6$ – его корни => $\underline{\mathbf{V} = \boldsymbol{C_1 e^x + C_2 e^{6x}}}$

2 этап. *Найдём структуру частного решения* y_0 данного уравнения

Если $f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x]$, то должно быть

$$y_0(x) = x^r e^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x + Q_l(x)\sin\beta x]$$

Правая часть имеет вид $f(x) = e^x[(x-2)\cos(0\cdot x) + (x-2)\sin(0\cdot x)]$.

Так как в простом (однократном) корне характеристического уравнения $k_1 = 1 + 0j = \alpha + \beta j \; \alpha = 1, \beta = 0$ совпадают с параметрами α и β правой части $f(x)$, имеем показатель степени r =1 => $y_0(x) = x^1 \cdot e^x[P_1(x)\,cos(0\cdot x) + Q_1(x)\,sin(0\cdot x)]$

<=> $y_0(x) = xe^x[(ax+b)\,cos\,0 + (cx+d)\,sin\,0]$ => $\underline{\boldsymbol{y_0(x) = e^x\left(ax^2 + bx\right)}}$

3 этап. *Найдём неопределённые* коэффициенты a и b *и функцию* y_0.

В уравнение $y'' - 7y' + 6y = (x-2)e^x$ вместо y вставим функцию $y_0(x) = e^x(ax^2 + bx)$

и её производные $y_0' = (ax^2 + 2ax + bx + b)e^x$, $y_0'' = (ax^2 + 4ax + bx + 2a + 2b)e^x$

Получим тождество $e^x(-10ax + 2a - 5b) = e^x(x-2)$.

Сокращая обе части равенства на $e^x \neq 0$ и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях получим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -10a = 1, \\ 2a - 5b = -2. \end{cases} \quad => a = -\frac{1}{10}, b = \frac{9}{25}.$$

Следовательно *частное решение* $\underline{\boldsymbol{y_0(x) = e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right)}}$

Найдём общее решение $y(\boldsymbol{x})$ *исходного уравнения*

Так как $y = v(x) + y_0(x)$, получаем

$$\underline{y = c_1e^x + c_2e^{6x} + e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right).}$$

.

5 этап

.

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y(0) = 1, \quad y'(0) = 3.$

Дифференцируя функцию

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{6x} + e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right).$$

имеем

$$y' = c_1 e^x + 6c_2 e^{6x} + e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{4}{25}x + \frac{9}{25}\right).$$

Так как при $x = 0$ должно выполняться $y = 0, \quad y' = 0,$ полчаем

$$\begin{cases} c_1 e^0 + c_2 e^0 + e^0 \cdot 0 = 1, \\ c_1 e^0 + 6c_2 e^0 + e^0 \cdot (0 + \frac{9}{25}) = 3, \end{cases} \quad <=> \quad \begin{cases} c_1 + c_2 = 1, \\ c_1 + 6c_2 = \frac{66}{25} \end{cases}$$

Вычтем из второго уравнения $\begin{cases} c_1 = 1 - c_2, \\ 5c_2 = \frac{41}{25} \end{cases} \quad => \quad c_2 = \frac{41}{125}, \ c_1 = \frac{84}{25}$

О т в е т : частное решение задачи Коши имеет вид:

$$y = \frac{84}{125}e^x + \frac{41}{125}e^{6x} + e^x\left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x\right).$$