



# 21. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ


# 21. 1. ПОНЯТИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

*Дифференциальным уравнением (ДУ) называется уравнение, связывающее искомую функцию одной или нескольких переменных и производные различных порядков этой функции.*



*Если искомая функция зависит от одной переменной, то ДУ называется обыкновенным.*

*Если искомая функция зависит от нескольких переменных, то ДУ называется уравнением в частных производных.*



Простейшим примером ДУ является задача о нахождении первообразной  $F(x)$  для заданной функции  $f(x)$ , т.к. ее можно рассматривать как задачу решения уравнения:

$$F'(x) = f(x)$$

*В общем случае ДУ можно записать:*

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$$

*1*

*Порядок старшей производной, входящей в ДУ, называется порядком ДУ.*

**Например, дифференциальное уравнение**

$$x^2 \cdot (y''')^4 - x \cdot (y')^5 + 8 = 0$$

**является уравнением третьего порядка.**

*Решением ДУ (1) называется такая функция  $y=y(x)$ , которая при подстановке ее в это уравнение обращает его в тождество.*

**Например, решением дифференциального уравнения**

$$y'' + y = 0$$

**является функция**

$$y = \sin x$$

**поскольку**

$$y' = \cos x \quad y'' = -\sin x$$

**Подставляем в уравнение:**

$$-\sin x + \sin x = 0$$

# ПРИМЕР.

*Решить дифференциальное уравнение:*

$$y'' = x$$



# РЕШЕНИЕ.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = x \Rightarrow dy' = x \cdot dx$$

**Интегрируем почленно:**

$$y' = \frac{x^2}{2} + C_1 \quad \text{- где } C_1 \text{ – произвольная постоянная.}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow dy = \left( \frac{x^2}{2} + C_1 \right) dx$$

Еще раз интегрируем:

$$y = \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2$$

*Таким образом, решение ДУ принципиально неоднозначно, поскольку в него входят произвольные постоянные.*

ДУ задает семейство интегральных кривых на плоскости. Для выделения определенной интегральной кривой достаточно задать точку, через которую проходит искомая кривая и направление, в котором она проходит через эту точку. Такие условия называются начальными.

Например, если в рассмотренном примере

$$y(0) = 1 \quad y'(0) = 2$$

то

$$C_1 = 2 \quad C_2 = 1$$

*Общим решением ДУ (1) называется  
решение*

$$y = \varphi(x, C_1, \dots, C_n)$$

*которое является функцией переменной  $x$  и  
произвольных независимых постоянных.*

*Частным решением ДУ (1) называется  
решение, полученное из общего решения при  
конкретных числовых значениях  
постоянных.*

**В рассмотренном примере**

$$y = \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2$$

**- общее решение;**

$$y = \frac{x^3}{6} + 2x + 1$$

**- частное решение;**