

**ФИЗИКА. МАТЕМАТИКА**

**Лекция 3**

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

Лектор: Загитов Г.Н.

**Обыкновенным** дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную (аргумент)  $x$ , искомую функцию  $y = f(x)$  и ее производные различных порядков  $y', y'', \dots, y^{(n)}$ :  
 $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}, ) = 0$ .

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Например, дифференциальные уравнения

$$y' - 3xy^2 + 4 = 0$$

$$t^2 \frac{ds}{dt} = 2ts - 3$$

**Решением** дифференциального уравнения называется такая функция  $y = y(x)$ , которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество.

Например, функция  $y = x^2 + Cx$ , где  $C$  – любая постоянная величина, является решением дифференциального уравнения  $y'x - x^2 - y = 0$ .  
Заметим, что данное дифференциальное уравнение имеет бесконечное множество решений, так как  $C$  – произвольная постоянная величина.

Процесс нахождения решения называется интегрированием дифференциального уравнения.

**Общим решением** дифференциального уравнения  $n$ -го порядка называется функция  $y=f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$ , зависящая от  $x$  и  $n$  произвольных независимых постоянных, обращающая это уравнение в тождество при любых значениях постоянных  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

**Частным решением** дифференциального уравнения  $n$ -ого порядка называется решение  $y=f(x, C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0)$ , где  $C_1^0, C_2^0, \dots, C_n^0$  - фиксированные числа, которое получается из общего, если придать определенные значения произвольным постоянным  $C_1, C_2, \dots, C_n$ .

## Пример. Размножение бактерий

Обозначим через  $x = x(t)$  массу всех бактерий в момент времени  $t$ , тогда  $dx/dt$  будет скоростью размножения этих бактерий. Скорость размножения пропорциональна количеству бактерий, то существует постоянная  $k > 0$  такая, что  $dx/dt = kt$ .

Легко проверить, что функция

вида  $x = Ce^{kt}$  где  $C$  – некоторая постоянная

является решением уравнения .

# Дифференциальные уравнения первого порядка.

## Уравнения разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x, y, y') = 0.$$

Если это уравнение разрешено относительно  $y'$ , то это уравнение имеет вид:

$$y' = f(x, y) \text{ или } dy = f(x, y)dx$$

Общим решением уравнения будет функция  $y = y(x, C)$ , зависящая от  $x$  и от одной произвольной постоянной, и обращающая это уравнение в тождество.

Частным решением уравнения будет решение  $y = y(x, C_0)$ , полученное из общего при фиксированном значении  $C$ , удовлетворяющее заданным начальным условиям:  $y = y_0$  при  $x = x_0$ . Другими словами: найти интегральную кривую уравнения, проходящую через заданную точку  $M_0(x_0, y_0)$ .

Дифференциальное уравнение вида

$$P_1(x)Q_1(y)dx + P_2(x)Q_2(y)dy = 0,$$

где  $P_1(x)$ ,  $P_2(x)$  – функции только от  $x$ , а  $Q_1(y)$ ,  $Q_2(y)$  – функции только от  $y$ , называется уравнением с разделяющимися переменными.

Делением обеих частей уравнения на произведение  $Q_1(y)P_2(x)$  может быть приведено к уравнению с разделенными переменными:

$$\frac{P_1(x)Q_1(y)}{Q_1(y)P_2(x)}dx + \frac{P_2(x)Q_2(y)}{Q_1(y)P_2(x)}dy = 0$$

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0$$

Общим интегралом уравнения будет.

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = C .$$

*Пример* . Решить уравнение:

$$(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0 .$$

Разделив обе части уравнения на произведение  $xy$ , получим уравнение с

разделенными переменными:

$$\frac{1+x}{x}dx + \frac{1-y}{y}dy = 0$$

Интегрируя, находим общий интеграл:

$$\int \left( \frac{1}{x} + 1 \right) dx + \int \left( \frac{1}{y} - y \right) dy = 0 ,$$

$$\ln|x| + x + \ln|y| - y = C ,$$

$$\ln|xy| + x - y = C .$$

*Пример.* Дано уравнение  $xy' - 2y = 0$ . Найти частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию  $y = 4$  при  $x = 2$ .

Уравнение имеет вид:

$$x \frac{dy}{dx} - 2y = 0 \text{ или}$$

$$x dy - 2y dx = 0$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dy}{y} - 2 \frac{dx}{x} = 0$$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} - 2 \int \frac{dx}{x} = C_1$$

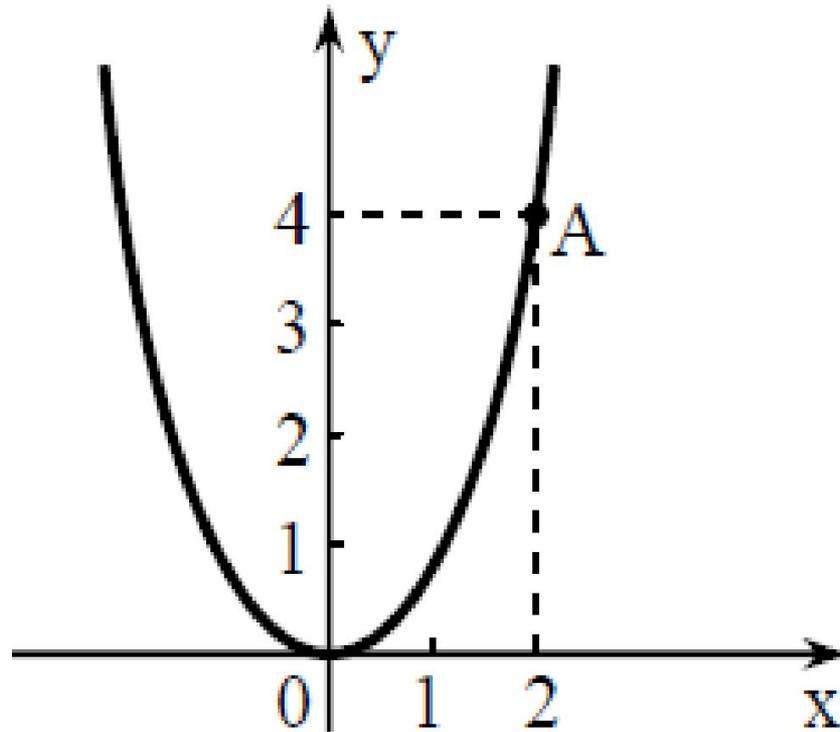
$$\ln|y| - 2 \ln|x| = \ln C, \text{ где } \ln C = C_1$$

$$\ln|y| = \ln C + \ln x^2$$

$$\ln|y| = \ln Cx^2$$

$y = Cx^2$  - общее решение.

Теперь найдем частное решение уравнения.  
Подставляя в общее решение,  $x=2$ ,  $y=4$ ,  
получим  $4 = C \cdot 2^2$ , откуда  $C = 1$ .  
Подставляя  $C = 1$  в общее решение, получим  
частное решение  $y = x^2$ .



# Дифференциальные уравнения второго порядка

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

Общим решением ИЛИ  $y'' = f(x, y, y')$  функция  $y = y(x, C_1, C_2)$ , зависящая от  $x$  и от двух произвольных независимых постоянных  $C_1$  и  $C_2$ , обращающая данное уравнение в тождество.

Частное решение уравнения имеет вид

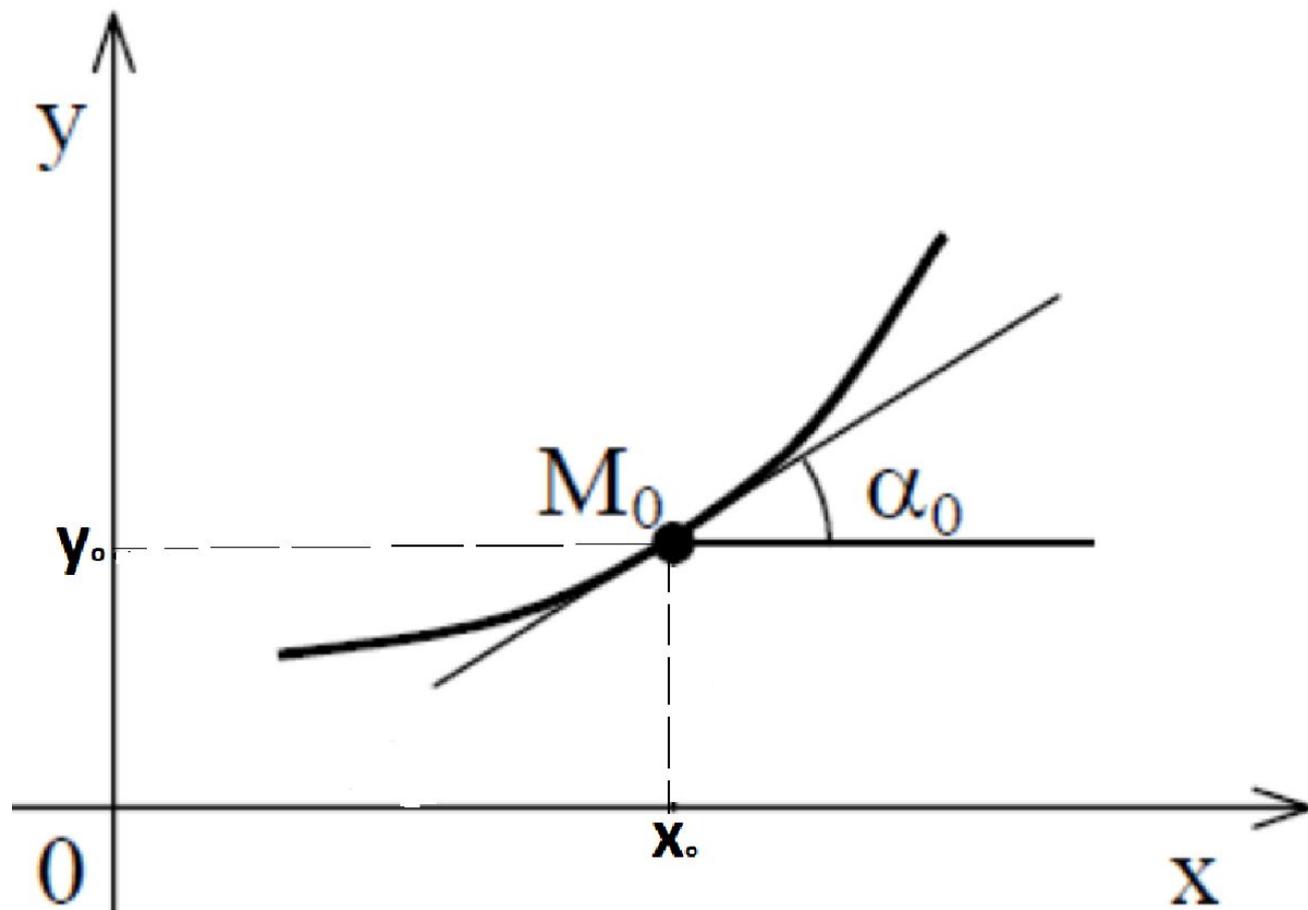
–  $y = y(x, C_1^0, C_2^0)$ , где  $C_1^0, C_2^0$  фиксированные постоянные.

Постоянные определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0, C_1, C_2) \\ y'_0 = y'(x_0, C_1, C_2) \end{cases}$$

Геометрически

интегральная кривая, которая проходит через точку  $M_0(x_0, y_0)$  и имеет в этой точке заданную касательную, образующую с осью  $Ox$  такой угол  $\alpha_0$ , что  $\operatorname{tg} \alpha_0 = y'_0$



# Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Уравнение вида  $y'' = f(x)$  решается последовательным двукратным интегрированием правой части, причем при каждом интегрировании получается одна произвольная постоянная; окончательное решение содержит две произвольных постоянных:

$$y' = \int f(x) dx + C_1$$

$$y = \int (\int f(x) dx + C_1) dx + C_2$$

*Пример* . Решить уравнение  $y'' = x + \sin x$

$$y' = \int (x + \sin x) dx + C_1 = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1$$

$$y = \int \left( \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1 \right) dx + C_2 = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2$$

# Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = 0 ,$$

где  $p$  и  $q$  – некоторые действительные числа.

Будем искать частные решения в виде:  $y = e^{\lambda x}$ ,  
где  $\lambda$  - постоянная величина.

Тогда  $y' = \lambda e^{\lambda x}$ ,  $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ . Подставляя  $y'$  и  $y''$  :

$$e^{\lambda x} (\lambda^2 + p\lambda + q) = 0 .$$

Уравнение  $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$  называется  
характеристическим уравнением .

1. Корни характеристического уравнения – действительные числа и  $\lambda_1 \neq \lambda_2$ .

Общее решение уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

2. Корни характеристического уравнения – действительные числа и  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ .

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}$$

3. Характеристическое уравнение не имеет действительных корней.

В этом случае корни уравнения  $\lambda = \alpha + \beta i$ ,  $\lambda = \alpha - \beta i$  – сопряженные комплексные числа, где  $i = \sqrt{-1}$ .

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

*Пример.*

Найти решения уравнений:  $y''+2y'+5y=0$ .

Характеристическое уравнение  $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$  не имеет действительных корней, решая его, получаем два сопряженных комплексных корня  $\lambda_1 = -1 + 2i$  и  $\lambda_2 = -1 - 2i$ , где  $\alpha = -1, \beta = 2$

Тогда общее решение уравнения имеет вид:  
 $y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$ .

# Теория вероятностей.

- Определения:
- **Событием** называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта;
- События называются **несовместными**, если появление одного из них исключает появление других. Классическим примером несовместных событий является результат подбрасывания монеты – выпадение лицевой стороны монеты исключает выпадение обратной стороны (в одном и том же опыте);

- **Полной группой событий** называется совокупность всех возможных результатов опыта;
- **Достоверным событием** называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта. Событие называется **невозможным**, если оно никогда не произойдет в результате опыта. Например, если из коробки, содержащей только красные и зеленые шары, наугад вынимают один шар, то появление среди вынутых шаров белого – невозможное событие. Появление красного и появление зеленого шаров образуют полную группу событий.

**Вероятностью** события  $A$  называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта. Вероятность события  $A$  равна отношению числа благоприятствующих событию  $A$  исходов опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Очевидно, что вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного – равна нулю. Таким образом, значение вероятности любого события – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Пример. В коробке находится 10 шаров. 3 из них красные, 2 – зеленые, остальные белые. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет красным, зеленым или белым.

Появление красного, зеленого и белого шаров составляют полную группу событий.

Обозначим появление красного шара - событие А, появление зеленого - событие В, появление белого –С.

Тогда в соответствии с записанными выше формулами получаем:

$$P(A) = \frac{3}{10}; \quad P(B) = \frac{2}{10}; \quad P(C) = \frac{5}{10};$$

**Относительной частотой** события  $A$  называется отношение числа опытов, в результате которых произошло событие  $A$  к общему числу опытов.

Отличие относительной частоты от вероятности заключается в том, что вероятность вычисляется без непосредственного произведения опытов, а относительная частота – после опыта.

Так в рассмотренном выше примере, если из коробки наугад извлечено 5 шаров и 2 из них оказались красными, то относительная частота появления красного шара равна:

$$W(A) = \frac{2}{5}$$

**Теорема (сложения вероятностей)**. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

**Следствие 1:** Если события образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице.

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1$$

**Следствие 2:** Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1$$

## Теорема. (Умножения вероятностей)

Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило.

$$P(AB) = P(A)P(B / A) = P(A)P_A(B)$$

Если события независимые, то, и теорема умножения вероятностей принимает вид:

$$P(AB) = P(A)P(B).$$

Если в результате испытания может появиться  $n$  событий, независимых в совокупности, то **вероятность появления хотя бы одного** из них равна

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n$$

**Пример.** Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей?

Вероятность выпадения 6 очков при одном броске кости равна  $1/6$ . Вероятность того, что не выпадет 6 очков –  $5/6$ . Тогда вероятность того, что хотя бы один раз выпадет 6 очков равна  $1 - 125/216 = 91/216$