ФИЗИКА. МАТЕМАТИКА
Лекция 3
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Лектор: Загитов Г.Н.

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее независимую переменную (аргумент) x, искомую функцию $y = f(x)$ и ее производные различных порядков y', y'',.., $y^{(n)}$:

$F(x, y, y', y'', \ldots y^{(n)}) = 0$.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Например, дифференциальные уравнения

$$y' - 3xy^2 + 4 = 0$$

$$t^2 \frac{ds}{dt} = 2ts - 3$$

Решением дифференциального уравнения называется такая функция $y = y(x)$, которая при подстановке в это уравнение обращает его в тождество.

Например, функция $y = x^2 + Cx$, где C – любая постоянная величина, является решением дифференциального уравнения $y'x - x^2 - y = 0$.
Заметим, что данное дифференциальное равнение имеет бесконечное множество решений, так как C – произвольная постоянная величина.

Процесс нахождения решения называется интегрированием дифференциального уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения *n*-го порядка называется функция $y=f(x, C_1, C_2, .., C_n)$, зависящая от *x* и *n* произвольных независимых постоянных, обращающая это уравнение в тождество при любых значениях постоянных $C_1, C_2, .., C_n$.

Частным решением дифференциального уравнения *n*-ого порядка называется решениеy=f(x, $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$), где $C_1^0, C_2^0, \ldots, C_n^0$- фиксированные числа, которое получается из общего, если придать определенные значения произвольным постоянным $C_1, C_2, .., C_n$.

Пример. ***Размножение бактерий***

Обозначим через $x = x(t)$ массу всех бактерий в момент времени t, тогда dx/dt будет скоростью размножения этих бактерий. Скорость размножения пропорциональна количеству бактерий, то существует постоянная $k > 0$ такая, что dx/dt=kt.

Легко проверить, что функция

вида $x = Ce^{kt}$ где C – некоторая постоянная

является решением уравнения .

Дифференциальные уравнения первого порядка.

Уравнения разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$F(x\,,y,y')=0\,.$$

Если это уравнение разрешено относительно y' , то это уравнение имеет вид:

$y'=f\,(x\,,y)$ или $dy{=}f\,(x\,,y)dx$

Общим решением уравнения будет функция $y{=}y(x\,,C)$, зависящая от x и от одной произвольной постоянной, и обращающая это уравнение в тождество.

Частным решением уравнения будет решение $y = y(x, C_0)$, полученное из общего при фиксированном значении C, удовлетворяющее заданным начальным условиям: $y = y_0$ при $x = x_0$. Другими словами: найти интегральную кривую уравнения, проходящую через заданную точку M_0 (x_0, y_0).

Дифференциальное уравнение вида

$$P_1(x)Q_1(y)dx+P_2(x)Q_2(y)\,dy=0,$$

где $P_1(x)$, $P_2(x)$ – функции только от x, а $Q_1(y)$, $Q_2(y)$ – функции только от y, называется уравнением с разделяющимися переменными.

Делением обеих частей уравнения на произведение $Q_1(y)P_2(x)$ может быть приведено к уравнению с разделенными переменными:

$$\frac{P_1(x)Q_1(y)}{Q_1(y)P_2(x)}dx + \frac{P_2(x)Q_2(y)}{Q_1(y)P_2(x)}dy = 0$$

$$\frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = 0$$

Общим интегралом уравнения будет:

$$\int \frac{P_1(x)}{P_2(x)}dx + \int \frac{Q_2(y)}{Q_1(y)}dy = C\ .$$

Пример . Решить уравнение:
$(1+x)ydx+(1-y)xdy=0$.
Разделив обе части уравнения на произведение xy, получим уравнение с разделенными переменными: $\frac{1+x}{x}dx+\frac{1-y}{y}dy=0$

Интегрируя, находим общий интеграл:

$$\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\int\left(\frac{1}{y}-y\right)dy=0,$$

$$\ln|x|+x+\ln|y|-y=C,$$

$$\ln|xy|+x-y=C.$$

Пример. Дано уравнение $xy' - 2y = 0$. Найти частное решение этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y = 4$ при $x = 2$.

Урвнение имеет вид: $x\dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$ или

$$xdy - 2ydx = 0$$

Разделяя переменные, получим: $\dfrac{dy}{y} - 2\dfrac{dx}{x} = 0$

Интегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} - 2\int \frac{dx}{x} = C_1$$

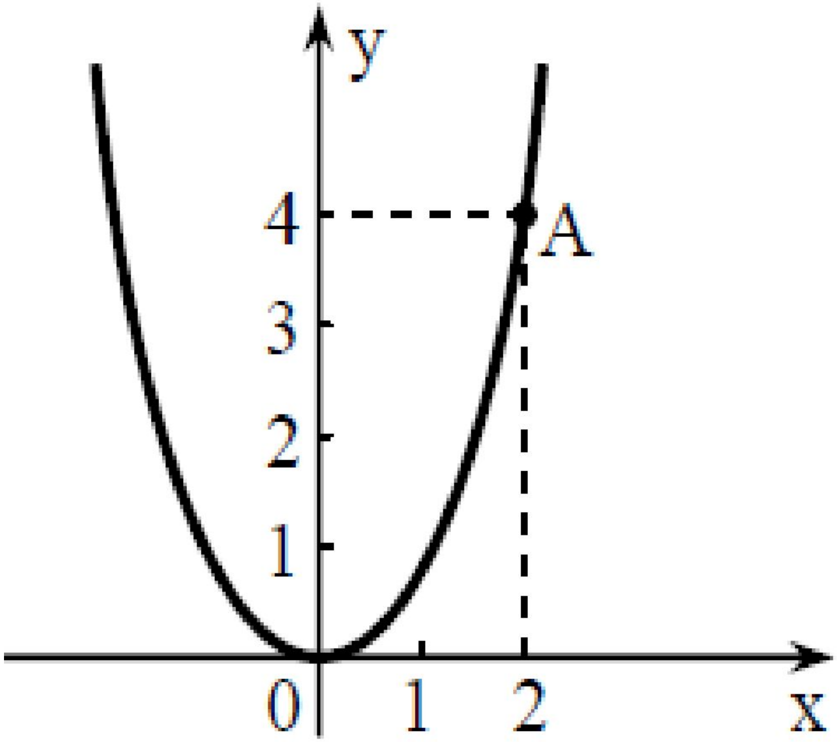
$\ln|y| - 2\ln|x| = \ln C$, где $\ln C = C_1$

$$\ln|y| = \ln C + \ln x^2$$

$$\ln|y| = \ln Cx^2$$

$y = Cx^2$ - общее решение.

Теперь найдем частное решение уравнения.
Подставляя в общее решение, $x=2$, $y=4$, получим $4 = C \cdot 2^2$, откуда $C = 1$.
Подставляя $C = 1$ в общее решение, получим частное решение $y = x^2$.



Дифференциальные уравнения второго порядка

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

Общим решен или $y'' = f(x, y, y')$ ункция $y=y(x,C_1,C_2)$, зависящая от x и от двух произвольных независимых постоянных C_1 и C_2, обращающая данное уравнение в тождество.

Частное решение уравнения имеет вид

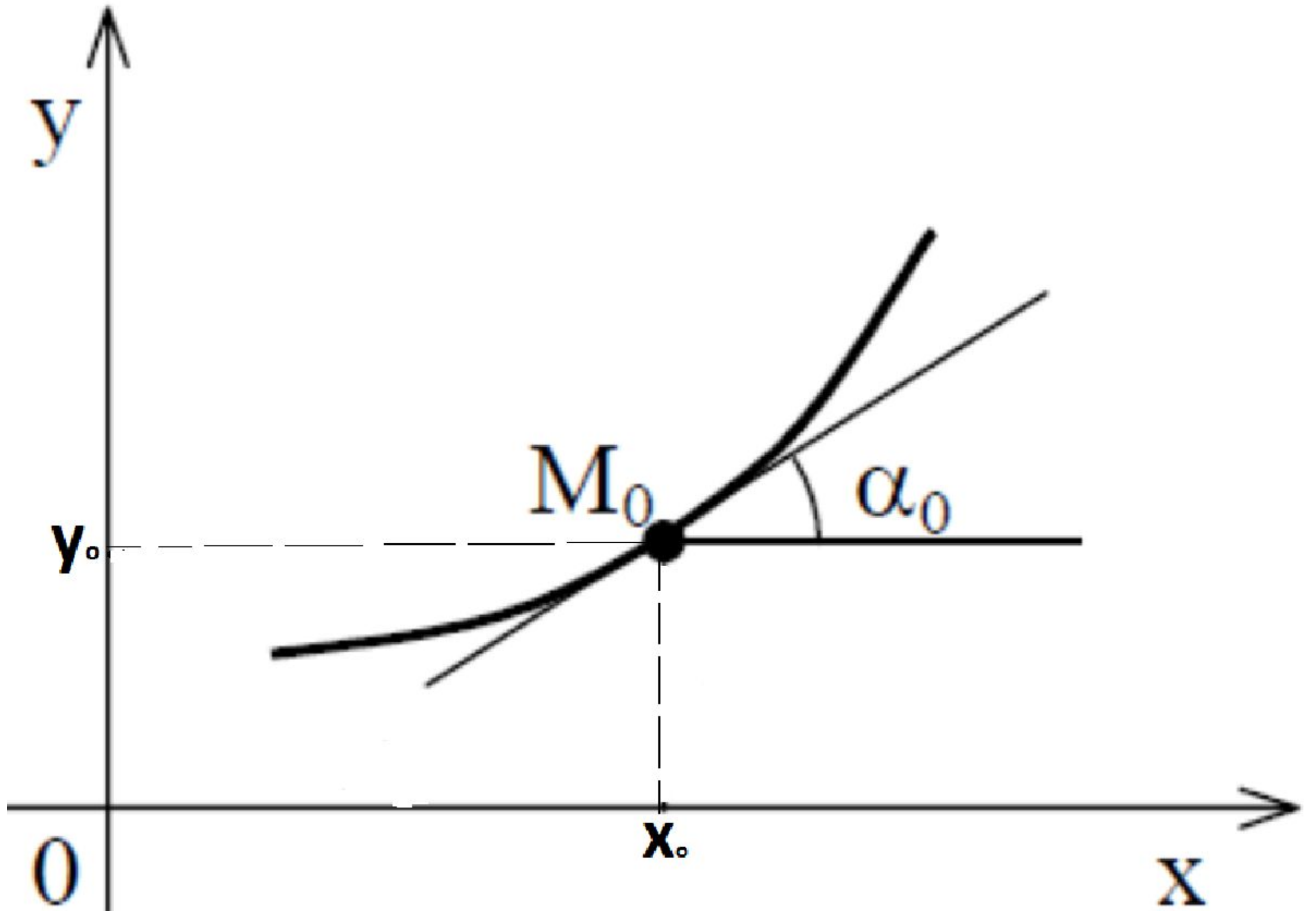
$y = y(x, C_1^0, C_2^0)$, где C_1^0, C_2^0

– фиксированные постоянные.

Постоянные определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0, C_1, C_2) \\ y'_0 = y'(x_0, C_1, C_2) \end{cases}$$

Геометрически ется интегральная кривая, которая проходит через точку $M_0(x_0 y_0)$ и имеет в этой точке заданную касательную, образующую с осью Ox такой угол α_0, что $tg\alpha_0 = y'_0$


y
M_0
α_0
y_o
0
x_o
x

Дифференциальные уравнения второго порядка, допускающие понижение порядка

Уравнение вида $y'' = f(x)$ решается последовательным двукратным интегрированием правой части, причем при каждом интегрировании получается одна произвольная постоянная; окончательное решение содержит две произвольных постоянных:

$$y' = \int f(x)dx + C_1$$

$$y = \int \left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2$$

Пример . Решить уравнение $y'' = x + \sin x$

$$y' = \int (x + \sin x)dx + C_1 = \frac{x^2}{2} - \cos x + C_1$$

$$y = \int (\frac{x^2}{2} - \cos x + C_1)dx + C_2 = \frac{x^3}{6} - \sin x + C_1 x + C_2$$

Однородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

$$y'' + py' + qy = 0\ ,$$

где p и q – некоторые действительные числа.

Будем искать частные решения в виде: $y=e^{\lambda x}$, где λ - постоянная величина.

Тогда $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Подставляя y' и y'' :

$$e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + p\lambda + q\right) = 0\,.$$

Уравнение $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ называется характеристическим уравнением .

1. Корни характеристического уравнения – действительные числа и $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Общее решение уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

2. Корни характеристического уравнения – действительные числа и $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$.

$$y = (C_1 + C_2\, x)\, e^{\lambda x}$$

3. Характеристическое уравнение не имеет действительных корней.

В этом случае корни уравнения $\lambda=\alpha+\beta i\ _1$,$\lambda=\alpha-\beta i\ _2$ – сопряженные комплексные числа, где $i=\sqrt{-1}$.

$$y = e^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$$

Пример.

Найти решения уравнений: $y''+2y'+5y=0$.

Характеристическое уравнение $\lambda^2+2\lambda+5=0$ не имеет действительных корней, решая его, получаем два сопряженных комплексных корня $\lambda_1=-1+2i$ и $\lambda_2=-1-2i$, где $\alpha=-1, \beta=2$

Тогда общее решение уравнения имеет вид:

$y=e^{-x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$.

Теория вероятностей.

- **Определения:**
- **Событием** называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта;
- События называются **несовместными,** если появление одного из них исключает появление других. Классическим примером несовместных событий является результат подбрасывания монеты – выпадение лицевой стороны монеты исключает выпадение обратной стороны (в одном и том же опыте);

- **Полной группой событий** называется совокупность всех возможных результатов опыта;
- **Достоверным событием** называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта. Событие называется **невозможным**, если оно никогда не произойдет в результате опыта. Например, если из коробки, содержащей только красные и зеленые шары, наугад вынимают один шар, то появление среди вынутых шаров белого – невозможное событие. Появление красного и появление зеленого шаров образуют полную группу событий.

Вероятностью события А называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта. Вероятность события А равна отношению числа, благоприятствующих событию А исходов опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Очевидно, что вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного – равна нулю. Таким образом, значение вероятности любого события – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Пример. В коробке находится 10 шаров. 3 из них красные, 2 – зеленые, остальные белые. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет красным, зеленым или белым.

Появление красного, зеленого и белого шаров составляют полную группу событий.

Обозначим появление красного шара - событие A, появление зеленого - событие B, появление белого –C.

Тогда в соответствием с записанными выше формулами получаем:

$$P(A) = \frac{3}{10}; \quad P(B) = \frac{2}{10}; \quad P(C) = \frac{5}{10};$$

Относительной частотой события А называется отношение числа опытов, в результате которых произошло событие А к общему числу опытов.

Отличие относительной частоты от вероятности заключается в том, что вероятность вычисляется без непосредственного произведения опытов, а относительная частота – после опыта.

Так в рассмотренном выше примере, если из коробки наугад извлечено 5 шаров и 2 из них оказались красными, то относительная частота появления красного шара равна:

$$W(A) = \frac{2}{5}$$

Теорема (сложения вероятностей). *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий*

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Следствие 1: *Если события образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице.*

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$$

Следствие 2: Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1$$

Теорема. (Умножения вероятностей)

Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило.

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = P(A)P_A(B)$$

Если события независимые, то, и теорема умножения вероятностей принимает вид:

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

Если в результате испытания может появиться n событий, независимых в совокупности, то вероятность появления хотя бы одного из них равна $$P(A) = 1 - q_1 q_2 \dots q_n$$

Пример. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей?

Вероятность выпадения 6 очков при одном броске кости равна 1/6.Вероятность того, что не выпадет 6 очков – 5/6. Тогда вероятность того, что хотя бы один раз выпадет 6 очков равна 1-125/216=91/216/