

Глава 2.
Дифференциальные
уравнения высших
порядков.



1. Общие сведения.

Определение.

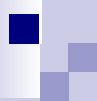
- Дифференциальное уравнение содержащее производную функции двух и более порядков, называется дифференциальным уравнением порядка высшее первого.

Уравнение порядка “ n ” - $f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ или

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Теорема:

- Дано дифференциальное уравнение $y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ и система начальных условий $y = y_0, y' = y'_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)}$. Если функция $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ непрерывна в окрестностях начального условия и имеет непрерывные частные производные по $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, то существует и притом единственное решение уравнения, определенное и непрерывное в некотором интервале содержащем x_0 , и удовлетворяющее заданной системе начальных условий.



2. Типы уравнений, допускающих понижение порядка.



1.

$$y^{(n)} = f(x)$$

2.

- Дифференциальное уравнение $f(x, y^k, y^{k+1} \dots y^{(n)}) = 0$ не содержащее явно y и младших производных до $(k-1)$ порядка включительно, допускает понижение порядка на k единиц

$$u = y^k \Rightarrow u' = y^{(k+1)} \quad u^{n-k} = y^{(n)}$$

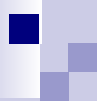
3.

- Уравнение вида $f(y, y' \dots y^n) = 0$ также допускает понижение порядка путем замены обоих переменных.

- $y = y(x) \qquad y' = p(y)$

4.

- Если левая часть уравнения есть точная правая, то порядок уравнения поднимается на единицу путем непосредственного интегрирования. (Это уравнение встречается редко, но к этому виду приводятся некоторые уравнения.)



Линейное
дифференциальное
уравнение высшего
порядка.

Линейным дифференциальным уравнением n -го порядка называется уравнение вида:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = g$$

Теорема

- Пусть коэффициент $p_i(x)$, $i = \overline{1, n}$.
Линейное дифференциальное уравнение непрерывно на некотором отрезке $[a; b]$. \exists одно и только одно решение $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения, определенное и непрерывное на всем интервале $(a; b)$, удовлетворяющее этому уравнению и любой системе начальных условий, если только значение x_0 принадлежит интервалу $(a; b)$.

Определение:

- Уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y = g$$

называется линейным
однородным
дифференциальным
уравнением.

Определение.

- Обозначим линейную часть уравнения через $L(y)$, $L(y) = y^n + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1} y' + p_n y$.
$$p_i = p_i(x) \quad .$$
- Выражение $L(y)$ называется линейным дифференциальным оператором от функции y .

Свойства линейного дифференциального оператора.

- 1. Постоянный множитель можно выносить за знак оператора, то есть для любого n размерной дифференциальной функции y_1
 $L(cy_1) = cL(y_1)$ - свойство однородности.


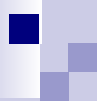
- 2. Оператор от суммы двух функций y_1 и y_2 равен сумме операторов от каждого из слагаемых в отдельности, то есть для любых n раз дифференцируемых функций и верно равенство:

$$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) \text{ - свойство аддитивности}$$

Определение:

- Линейное дифференциальное однородное уравнение можно записать в виде

$$L(y) = 0$$



- Теоремы о свойствах частичных решений

Теорема 1.

- Если функция y_1 является решением уравнения $L(y) = 0$, то и функция cy_1 есть решение этого уравнения.

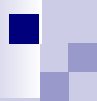
Теорема 2.

- Если функции y_1 и y_2 являются решениями уравнения $L(y) = 0$, то и функция $y_1 + y_2$ есть решение этого уравнения.

Теорема 3.

- Если y_1, y_2, \dots, y_n - частные решения линейного однородного дифференциального уравнения, то их линейная комбинация

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ есть также решение этого уравнения.



Линейная зависимость и
независимость функций.
Определитель Вронского
и его применение.

Определение.

- Система функций y_1, y_2, \dots, y_n определенных и непрерывных на отрезке $[a; b]$ называется линейно зависимой на отрезке $[a; b]$, если $\exists n$ таких чисел $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ что выполняется тождество $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0$ при этом (не все α одновременно равны нулю)
$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2 \neq 0$$

Теорема.

- Если уравнение линейно зависимо, то хотя бы одну из них можно выразить через остальные.

- Если функции системы $y_1, y_2 \dots y_n$ дифференцируемы $n-1$ то из них можно построить определитель n -го порядка, который имеет вид

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ - & - & - & - \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

- Этот определитель является функцией от x и обозначается $w(x) = w(y_1, y_2 \dots y_n) = w$
- Этот определитель называется **определителем Вронского**

Теорема 1.

- Если функции $y_1, y_2 \dots y_n$ линейно зависимы, то определитель Вронского тождественно равен 0.

Теорема 2.

- Если y_1, y_2, \dots, y_n - линейно независимые функции, удовлетворяющие некоторому однородному дифференциальному уравнению n -го порядка, то определитель системы не обращается в ноль ни в одной точке.

Определение.

- Систему частных решений $y_1, y_2 \dots y_n$ линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка называют фундаментальной, если она состоит из n независимых функций.

Теорема.

- Любое линейное однородное дифференциальное уравнение обладает бесчисленным множеством фундаментальных систем.

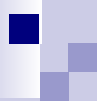
Теорема

- Если функции y_1, y_2, \dots, y_n образуют фундаментальную систему решений уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

, то их линейная комбинация

$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$ - является общим решением этого уравнения.



Линейное однородное
уравнение с
ПОСТОЯННЫМ
коэффициентом.

Определение.

- Уравнение вида $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0$, где $p_1, p_2, \dots, p_n = \text{const}$, называется линейным однородным дифференциальным уравнением с постоянным коэффициентом.

Определение.

$$f(r) = r^n + p_1 r^{n-1} + \dots + p_{n-1} r + p_n$$

- называется характеристическим членом линейного однородного дифференциального уравнения.

Определение.

$$\text{Уравнение} \\ f(r) = 0$$

называется **характеристическим уравнением** линейного однородного дифференциального уравнения.

Все корни уравнения

$$f(r) = 0$$

действительны и различны

$$r_1, r_2 \dots r_n$$

линейная комбинация

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \dots + c_n e^{r_n x}$$

является общим решением
линейного однородного
дифференциального уравнения.

- Все корни различны,
но среди них есть
КОМПЛЕКСНЫЕ

$$(a + bi)$$

формулы Эйлера :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

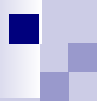
паре комплексных сопряженных
корней

$$r_{k,s} = a \pm bi$$

МОЖНО ПОСТАВИТЬ В СООТВЕТСТВИЕ
частных решений

$$e^{ax} \cos bx,$$

$$e^{ax} \sin bx$$



■ Доказать
самостоятельно
линейную
независимость системы
частных решений

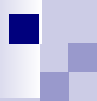
- При доказательстве нигде не учитывается, что r_1 - **действительное число** поэтому когда пара корней является двойной, то ей соответствует четыре частных решения следующих видов:

$$e^{\alpha x} \sin \beta x \quad x e^{\alpha x} \cos \beta x$$

$$e^{\alpha x} \cos \beta x \quad x e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Вывод:

- Задача нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n – го порядка с постоянным коэффициентом сводится к нахождению всех корней алгебраического уравнения n -ой степени.



3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

Определение

Линейным неоднородным
дифференциальным
уравнением называется
уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n y = g(x)$$

Теорема (о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения):

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет сумму частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного (при $g=0$),

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} \quad .$$

Теорема2:

Если правая часть неоднородного уравнения есть сумма двух функций, т. е. $g(x) = g_1(x) + g_2(x)$, то частное решение такого уравнения можно получить как сумму частных решений аналогичных уравнений с правыми частями соответственно $g_1(x)$ и $g_2(x)$.