Глава 2. Дифференциальные уравнения высших порядков.

1. Общие сведения.

Определение.

- Дифференциальное уравнение содержащее производную функции двух и более порядков, называется дифференциальным уравнением порядка высшее первого.

Уравнение порядка “ n ”- $f(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$ или

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}).$$

Теорема:

- Дано дифференциальное уравнение $y^{(n)} = f(x, y, y' ... y^{(n-1)})$ и система начальных условий $y = y_0$, $y' = y'_o$,…., $y^{(n-1)} = y_o^{(n-1)}$ Если функция $f(x, y, y' ... y^{(n-1)})$ непрерывна в окрестностях начального условия и имеет непрерывные частные производные по $y, y', ..., y^{(n-1)}$, то существует и притом единственное решение уравнения, определенное и непрерывное в некотором интервале содержащем x_o , и удовлетворяющее заданной системе начальных условий.

2.Типы уравнений, допускающих понижение порядка.

1.

$$y^{(n)} = f(x)$$

2.

- Дифференциальное уравнение $f(x, y^k, y^{k+1} \ldots y^n) = 0$ не содержащее явно y и младших производных до (k-1) порядка включительно, допускает понижение порядка на k единиц

$$u = y^k \Rightarrow u' = y^{(k+1)} \qquad u^{n-k} = y^{(n)}$$

3.

- Уравнение вида $f(y, y' \dots y^{n}) = 0$ также допускает понижение порядка путем замены обоих переменных.

- $$y = y(x) \qquad\qquad y' = p(y)$$

4.

- Если левая часть уравнения есть точная правая, то порядок уравнения поднимается на единицу путем непосредственного интегрирования. (Это уравнение встречается редко, но к этому виду приводятся некоторые уравнения.)

Линейное дифференциальное уравнение высшего порядка.

Линейным дифференциальным уравнением n-го порядка называется уравнение вида:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \beta(x)y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x) = g$$

Теорема

- Пусть коэффициент $p_i(x)$, $i=\overline{1,n}$. Линейное дифференциальное уравнение непрерывно на некотором отрезке [a;b]. $\exists$ одно и только одно решение $y=\varphi(x)$ дифференциального уравнения, определенное и непрерывное на всем интервале (a;b), удовлетворяющее этому уравнению и любой системе начальных условий, если только значение x_0 принадлежит интервалу (a;b).

Определение:

- Уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = g$$

называется линейным однородным дифференциальным уравнением.

Определение.

- Обозначим линейную часть уравнения через $L(y)$, $L(y) = y^n + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y$.

  $p_i = p_i(x)$.

- Выражение $L(y)$ называется линейным дифференциальным оператором от функции y .

Свойства линейного дифференциального оператора.

- 1.Постоянный множитель можно выносить за знак оператора, то есть для любого n размерной дифференциальной функции y_1

$L(cy_1) = cL(y_1)$- свойство однородности.

- 2.Оператор от суммы двух функций y_1 и y_2 равен сумме операторов от каждого из слагаемых в отдельности, то есть для любых n раз дифференцируемых функций и верно равенство:

$L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$ - свойство аддитивности

Определение:

- Линейное дифференциальное однородное уравнение можно записать в виде

$$L(y) = 0$$

- **Теоремы о свойствах частичных решений**

Теорема1.

- Если функция y_1 является решением уравнения $L(y) = 0$, то и функция cy_1 есть решение этого уравнения.

Теорема2.

- Если функции y_1 и y_2 являются решениями уравнения $L(y) = 0$, то и функция $y_1 + y_2$ есть решение этого уравнения.

Теорема3.

- Если $y_1, y_2, \dots y_n$ - частные решения линейного однородного дифференциального уравнения, то их линейная комбинация

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 ... + c_n y_n$ есть также решение этого уравнения.

Линейная зависимость и независимость функций. Определитель Вронского и его применение.

Определение.

- Система функций $y_1, y_2 \cdots y_n$ определенных и непрерывных на отрезке [a;b] называется линейно зависимой на отрезке [a;b], если $\exists$ n таких чисел $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$, что выполняется тождество $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \ldots + \alpha_n y_n = 0$ при этом (не все α одновременно равны нулю) $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2 \neq 0$

Теорема.

- Если уравнение линейно зависимо, то хотя бы одну из них можно выразить через остальные.

- Если функции системы $y_1, y_2 \cdots y_n$ дифференцируемы n-1 то из них можно построить определитель n-го порядка, который имеет вид

$$w = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ - & - & - & - \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

- Этот определитель является функцией от x и обозначается $w(x) = w(y_1, y_2 \ldots y_n) = w$
- Этот определитель называется ***определителем Вронского***

Теорема1.

- Если функции $y_1, y_2 \ldots y_n$ линейно зависимы, то определитель Вронского тождественно равен 0.

Теорема 2.

- Если $y_1, y_2 \dots y_n$ - линейно независимые функции, удовлетворяющие некоторому однородному дифференциальному уравнению n-го порядка, то определитель системы не обращается в ноль ни в одной точке.

Определение.

- Систему частных решений $y_1, y_2 \ldots y_n$ линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка называют фундаментальной, если она состоит из n независимых функций.

Теорема.

- Любое линейное однородное дифференциальное уравнение обладает бесчисленным множеством фундаментальных систем.

Теорема

- Если функции $y_1, y_2 \dots y_n$ образуют фундаментальную систему решений уравнения

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

,то их линейная комбинация

$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ - является общим решением этого уравнения.

Линейное однородное уравнение с постоянным коэффициентом.

Определение.

- Уравнение вида $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y = 0$, где $p_1, p_2 \ldots p_n$ =const, называется линейным однородным дифференциальным уравнением с постоянным коэффициентом.

Определение.

$$f(r) = r^n + p_1 r^{n-1} + \ldots + p_{n-1} r + p_n$$

- называется характеристическим членом линейного однородного дифференциального уравнения.

Определение.

Уравнение

$$f(r) = 0$$

называется **характеристическим уравнением** линейного однородного дифференциального уравнения.

Все корни уравнения

$$f(r) = 0$$

действительны и различны

$$r_1, r_2 \ldots r_n$$

линейная комбинация

$$y = c_1 e^{r1x} + c_2 e^{r2x} + \ldots + c_n e^{rnx}$$

является общим решением линейного однородного дифференциального уравнения.

- Все корни различны, но среди них есть комплексные

$$(a + bi)$$

формулы Эйлера :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

паре комплексных сопряженных корней

$$r_{k,s} = a \pm bi$$

можно поставить в соответствие частных решений

$$e^{ax}\cos bx, \qquad e^{ax}\sin bx$$

- Доказать самостоятельно линейную независимость системы частных решений

- При доказательстве нигде не учитывается, что r_1 - ***действительное число*** поэтому когда пара корней является двойной, то ей соответствует четыре частных решения следующих видов:

$$e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad xe^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$e^{\alpha x}\cos\beta x \qquad xe^{\alpha x}\sin\beta x$$

Вывод:

- Задача нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n – го порядка с постоянным коэффициентом сводится к нахождению всех корней алгебраического уравнения n-ой степени.

3.Линейные неоднородные дифференциальные уравнения.

Определение

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n y = g(x)$$

Теорема (о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения):

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения представляет сумму частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного (при g=0),

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} \quad .$$

Теорема2:

Если правая часть неоднородного уравнения есть сумма двух функций, т. е. $g(x)=g_1(x)+g_2(x)$, то частное решение такого уравнения можно получить как сумму частных решений аналогичных уравнений с правыми частями соответственно $g_1(x)$ и $g_2(x)$.