Лекция №3

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ПЛАН

1. Дифференцирование функции комплексного переменного. Условие Коши-Римана.

2. Аналитическая функция. Дифференциал.

3. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие о конформном изображении.

•

*

1. Дифференцирование функции комплексного переменного.

Пусть однозначная функция $\omega = f(z)$ определена в некоторой окрестности точки z, включая и саму точку. Тогда предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z)$$

если он существует, называется ***производной функции*** $f(z)$ ***в точке*** z, а функция $f(z)$ называется ***дифференцируемой в точке*** z.

Заметим, что Δz любым образом стремится к нулю, т.е. точка $z + \Delta z$ может приближаться к z по любому из бесконечного множества различных направлений.

* Из дифференцируемости функции $f(z)$ в некоторой точке z следует ее непрерывность в этой точке (отношение $\frac{\Delta\omega}{\Delta z}$ при $\Delta z \to 0$ может стремиться к конечному пределу $f'(z)$ лишь при условии, что $\Delta\omega \to 0$). Обратное утверждение не имеет смысла.

При каких условиях функция $\boldsymbol{\omega = f(z)}$ будет дифференцируемой в данной точке?

Теорема. Если функция $\omega = u(x; y) + iv(x; y)$ определена в некоторой окрестности точки $z = xz + iy$, причем в этой точке действительные функции $u(x; y)$ и $v(x; y)$ дифференцируемы, то для дифференцируемости функции $\omega = f(z)$ **в** точке z необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялись равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Эти равенства называются ***Условиями Коши-Римана (***или ***Эйлера-Даламбера)***.

* ## *Необходимость*

Пусть функция $f(z)$ дифференцируема в точке z, тогда $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z)$ существует и не зависит от пути, по которому $\Delta z = \Delta x + i\Delta y \to 0$. Можно считать, что точка $z + \Delta z$ приближаться к точке z по прямой, параллельной действительной оси (оси Ox), т.е. $\Delta z = \Delta x \to 0, \Delta y = 0$. Тогда

$$f'(z) = \\ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(u(x+\Delta x; y) + iv(x+\Delta x; y)\big) - \big(u(x;y) + iv(x;y)\big)}{\Delta x} = \\ = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(u(x+\Delta x; y) - u(x;y)\big) + i\big(v(x+\Delta x; y) - v(x;y)\big)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_x u + i\Delta_x v}{\Delta x} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_x u}{\Delta x} + i \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta_x v}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x}.$$

* Если же точка $z+\Delta z$ приближаться к точке z по прямой, параллельной мнимой оси (оси Oy), т.е. $\Delta z=\Delta y\to 0, \Delta x=0$. Тогда

$$f'(z)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\big(u(x;y+\Delta y)+iv(x;y+\Delta y)\big)-\big(u(x;y)+iv(x;y)\big)}{i\Delta y}=$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta_y u+i\Delta_y v}{i\Delta y}=-i\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Сравнив найденные пределы, получим

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=f'(z).$$

Отсюда следует: $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{\partial v}{\partial x}.$

* *Достаточность.*

Пусть теперь условия Коши-Римана выполняются. Докажем, что функция $f(z)$ дифференцируема.

Так как функции $u(x;y)$ и $v(x;y)$ дифференцируемы **в** точке $z=x+iy$, то их приращения можно представить в виде $\Delta u=\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\alpha_{1,}\ \Delta v=\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\alpha_{2,}$ где α_1 и α_2 - бесконечно малые более высокого порядка. Чем $|\Delta x|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$. Тогда

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta z}=\frac{\big(u(x+\Delta x;y+\Delta y)+iv(x+\Delta x;y+\Delta y)\big)-(u(x;y)+iv(x;y))}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+\alpha_1\right)+i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+\alpha_2\right)}{\Delta x+i\Delta y}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+i\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}+$$

$+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\Delta x+i\Delta y}$. Заменяя в числителе $\frac{\partial u}{\partial y}$ на $-\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ на $\frac{\partial u}{\partial x}$, получим

* $$\frac{\Delta\omega}{\Delta z}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x-\frac{\partial v}{\partial x}\Delta y+i\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x+i\frac{\partial u}{\partial x}\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}+\alpha_3,\text{ где } \alpha_3=\frac{\alpha_1+i\alpha_2}{\Delta x+i\Delta y}.$$

Т.е. $\frac{\Delta\omega}{\Delta z}=\frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)+i\frac{\partial v}{\partial x}(\Delta x+i\Delta y)}{\Delta x+i\Delta y}+\alpha_3=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}+\alpha_3,$

а α_3 - бесконечно малая высшего порядка относительно $|\Delta x|$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta z}=f'(z)$ существует. При этом $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$ ч.т.д.

С учетом условий Коши-Римана производную дифференцируемой функции $f(z)$ можно находить по формулам: $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$, $\quad f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$,

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y},\qquad f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

* Правила дифференцирования функций действительного переменного справедливы и для функций комплексного переменного, дифференцируемых в точке z.

2. Аналитическая функция. Дифференциал.

Фундаментальным понятием в ТФКП является понятие аналитической функции.

Однозначная функция $f(z)$ называется ***аналитической в точке z***, если она дифференцируема (выполнены условия Коши-Римана) в некоторой окрестности этой точки. Функция называется ***аналитической в области D***, если она дифференцируема в каждой точке $z \in D$.

Точки плоскости z, в которых однозначная функция $f(z)$ аналитична, называются ***правильными*** точками $f(z)$. Точки, в которых функция $f(z)$ **не является** аналитической, называются ***особыми*** точками функции.

* Пусть функция $f(z)$ аналитична в точке z. Тогда $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta z}=f'(z)$. Отсюда следует, что $\frac{\Delta\omega}{\Delta z}=f'(z)+\alpha$, где $\alpha\to 0$ при $\Delta z\to 0$. Тогда приращение функции можно записать так $\Delta\omega=f'(z)\Delta z+\alpha\Delta z$. Если $f'(z)\neq 0$, то первое слагаемое $f'(z)\Delta z$ является при $\Delta z\to 0$ бесконечно малой того же порядка, что и Δz; второе слагаемое $\alpha\Delta z$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем Δz . Следовательно, первое слагаемое составляет главную часть приращения функции $\omega=f(z)$. ***Дифференциалом dω*** аналитической функции $\omega=f(z)$ в точке z называется главная часть её приращения, т.е. $d\omega=f'(z)\Delta z$, или $d\omega=f'(z)dz$.

Замечание. Если функция $f(z)=u(x;y)+iv(x;y)$ аналитична в некоторой области *D*, *то функции* $u(x;y)$ и $v(x;y)$ **удовлетворяют дифференциальному** уравнению Лапласа $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=\mathbf{0}$. Функции *u* и *v* являются ***гармоническими функциями***.

* **Пример.** Проверить, является ли функция $\omega = z^2$ аналитической. Найти её производную.

Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Понятие о конформном изображении

Пусть функция $\omega = f(z)$ аналитична в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$

Функция $\omega = f(z)$ отображает точку z_0 плоскости z в точку $\omega_0 = f(z_0)$ плоскости ω. Пусть произвольная точка $z = z_0 + \Delta z$ из окрестности точки z_0 перемещается к точке z_0 по некоторой непрерывной кривой *l*. Тогда в плоскости ω соответствующая точка $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ будет перемещаться к точке ω_0 по некоторой кривой *L*, являющейся отображением кривой *l* в плоскости ω.

По определению производной $f'(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z}$. Отсюда следует, что $|f'(z_0)| = \left| \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta z} \right| = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \left| \frac{\Delta\omega}{\Delta z} \right| = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta\omega|}{|\Delta z|}$.

* Величина $|\Delta z| = |z - z_0|$ представляет собой расстояние между точками z_0 и $z_0 + \Delta z$, а $|\Delta\omega|$- расстояние между точками ω_0 и $\omega_0 + \Delta\omega$. Следовательно, $|f'(z_0)|$ есть предел отношения бесконечно малого расстояния между отображенными точками ω_0 и $\omega_0 + \Delta\omega$ к бесконечно малому расстоянию между точками z_0 и $z_0 + \Delta z$. Этот предел не зависит от выбора кривой l, проходящей через точку z_0. Следовательно, предел $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta\omega|}{|\Delta z|} = |f'(z_0)|$ в точке z_0 постоянен, т.е. одинаков во всех направлениях.

Геометрический смысл модуля производной: величина $|f'(z_0)|$ определяет коэффициент растяжения (подобия) в точке z_0 при отображении $\omega = f(z)$. Величину $|f'(z_0)|$ называют ***коэффициентом растяжения***, если $|f'(z_0)| > 1$, или ***коэффициентом сжатия***, если $|f'(z_0)| < 1$.

Пример. Найти коэффициент растяжения (сжатия) для функции $\omega = \frac{1}{2} z^2$ в точке $z_0 = 3 - 4i$.

* Для аргумента производной в точке z_0 имеем:

$\arg f^{'}(z_0) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \arg \frac{\Delta\omega}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z \to 0} (\arg\Delta\omega - \arg\Delta z) = \lim\limits_{\Delta z \to 0} \arg\Delta\omega -$

$- \lim\limits_{\Delta z \to 0} \arg\Delta z = \alpha_2 - \alpha_1$, где α_1 и α_2- углы, которые образуют касательные к кривым l и L соответственно в точках z_0 и ω_0 с положительными направлениями действительных осей на плоскостях z и ω.

Отсюда $\alpha_2 = \alpha_1 + \arg f'(z_0)$. Это означает, что $\arg f'(z_0)$ - это угол, на который нужно повернуть касательную к кривой l в точке z_0 , для того, чтобы получить направление касательной к кривой L в точке ω_0.

Геометрический смысл аргумента производной: $\arg f'(z_0)$ - это угол между отображенным и первоначальным направлениями касательных к кривым l и L в точках z_0 и ω_0 соответственно.

В силу аналитичности функции $f(z)$ в точке z_0 угол $\arg f'(z_0)$ один и тот же для всех кривых, проходящих через точку z_0. Для другой пары кривых l_1и L_1в тех же точках z_0 и ω_0 будем иметь $\arg f'(z_0) = \alpha'_2 - \alpha'_1 = \varphi$. Таким образом $\arg f'(z_0) = \alpha_2 - \alpha_1 = \alpha'_2 - \alpha'_1$, т.е. если кривые l и l_1образуют в точке z_0 на плоскости z угол $\varphi = \arg f'(z_0)$, то такой же угол $\varphi = \arg f'(z_0)$ будут образовывать точке ω_0 кривые L и L_1, являющиеся отображениями кривых l и l_1на плоскости ω.

Это свойство отображения $\omega = f(z)$ называют ***свойством сохранения (консерватизма) углов*** в точке z_0.

Отображение $\omega = f(z)$, **обладающее свойством сохранения углов и постоянством растяжений** в точке z_0 , называется ***конформным*** (т.е. отображением, сохраняющим форму).