

Дифференцирование показательной и логарифмической функций

Подготовил учитель
математики СШ №12
Пышкин К.А

Цель

- Знать формулы производной показательной функции, производной функции e^x
 - Уметь решать задачи, с использованием производной показательной функции и функции e^x
 - Знать определение первообразной, правила нахождения первообразных, формулу для вычисления интеграла
 - Знать формулы первообразной логарифмической функции и натурального логарифма
 - Уметь находить первообразные различных логарифмических функций
-

Натуральные логарифмы: $\log_e 2 = \ln 2$

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln e = 1$$

$$\ln e^r = r$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

$$\log_e 7 = \ln 7$$

Дифференцирование функции $y = a^x$

$$a = e^{\ln a}$$

$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

Например, $(2^x)' = 2^x \cdot \ln 2$; $(5^x)' = 5^x \cdot \ln 5$.

Дифференцирование функции $y = \log_a x$

$$\cancel{y' = (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' =}$$

$$= \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

Основные формулы

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \frac{x - a}{x + a} + C$$

Вычислить значение производной Пример
функции $y = e^{4x-12}$ в точке $x=3$.

Решение:

$$y' = (e^{4x-12})' = 4e^{4x-12}$$

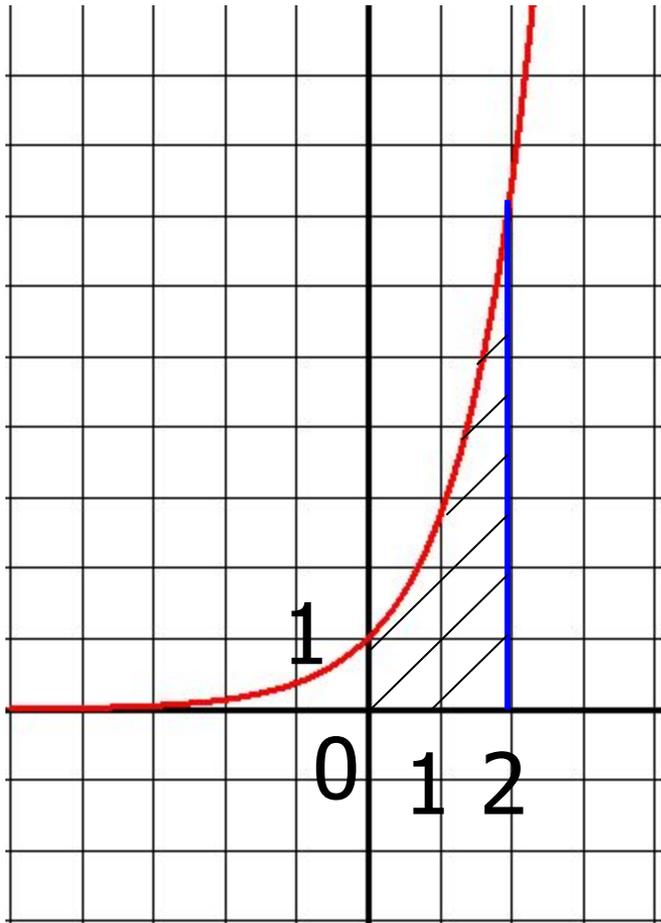
$$y'(3) = (e^{4 \cdot 3 - 12})' = 4e^0 = 4$$

Ответ: 4

Пример

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=0$, $x=0$, $x=2$, $y = e^x$

Решение:



$$S = \int_0^2 e^x dx = e^x \Big|_0^2 =$$
$$= e^2 - e^0 = e^2 - 1$$

Ответ: $S = e^2 - 1$

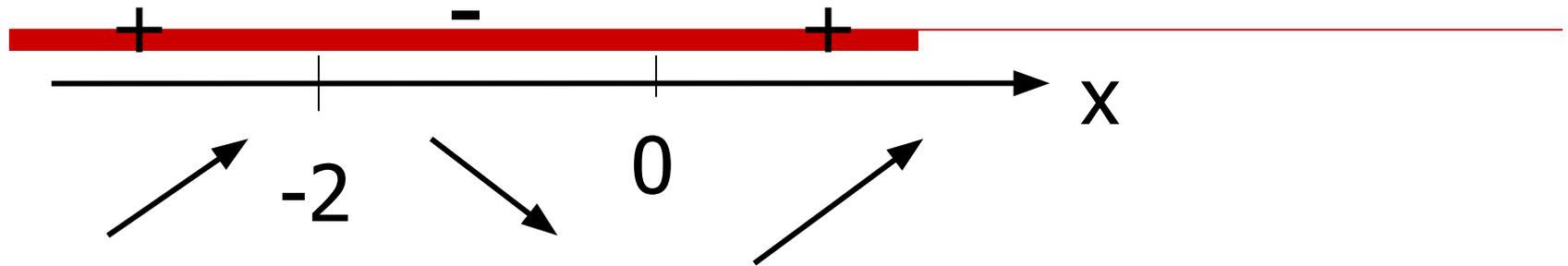
Исследовать на экстремум и схематически изобразить график функции $y = x^2 e^x$

Решение:

$$1) \quad D(f) = (-\infty; +\infty)$$

$$\begin{aligned} 2) \quad y' &= (x^2 e^x)' = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' = \\ &= 2xe^x + x^2 e^x = xe^x (x + 2) \end{aligned}$$

$$3) \quad y' = xe^x(x+2)$$



4) $x = -2$ – точка максимума

$$y_{\max} = y(-2) = (-2)^2 e^{-2} = 4e^{-2} = \frac{4}{e^2} \approx 0,5$$

$x = 0$ – точка минимума

$$y_{\min} = (0)^2 e^0 = 0$$

Подготовка к ЕНТ

1. Найдите $y'(x)$ если $y(x) = 5x - 5\ln x$

A) $5^x - \frac{5}{x}$

B) $5^x + \frac{5}{x}$

C) $5x \cdot \ln 5 - 5$

D) $5x \cdot \ln 5 - \frac{5}{x}$

E) $5x \cdot \ln 5 + \frac{5}{x}$

2. Дана функция $y(x) = 2e^x - \log 2x$.
Найдите $y'(x)$

A) $2e^x - \frac{1}{x \cdot \ln 2}$

B) $2e^x + \frac{1}{x \cdot \ln 2}$

C) $2e^x - \frac{1}{\ln 2}$

D) $2e^x + \frac{1}{\ln 2}$

E) $e^x - \frac{1}{2x}$

3. Найдите $y'(x)$, если $y(x) = \log_5 x + 5^x$

4. Найдите $h'(x)$, если $h(x) = x^3 + x^2 \cdot \ln x$

A) $\frac{1}{\ln 5} + 5^x \cdot \ln 5$

B) $\frac{1}{x \cdot \ln 5} + 5^x$

C) $\frac{1}{x \cdot \ln 5} + \frac{1}{5^x \cdot \ln 5}$

D) $\frac{1}{x \cdot \ln 5} + 5^x \cdot \ln 5$

E) $\frac{1}{x \cdot \ln 5} + \ln 5$

A) $3x^2 + 2x$

B) $3x^2 + 2x + x \cdot \ln x$

C) $3x^2 + 2x \cdot \ln x + x$

D) $x^3 + 2x \cdot \ln x + x^2$

E) $3x^2 + 2x \cdot \ln x + x^2$

5. Найдите производную функции $f(x) = \frac{x \ln x}{x^2 - 2}$

A) $\frac{x^2(1 + \ln x) - 2(\ln x + 2)}{(x - 2)^2}$

B) $\frac{x^2 - x^2 \ln x + 2 \ln x}{x^2 - 2}$

C) $\frac{x^2 - x^2 \ln x - 2 \ln x - 2x}{(x^2 - 2)^2}$

D) $\frac{x^2(1 - \ln x) - 2(1 + \ln x)}{(x^2 - 2)^2}$

E) $3x^2 + 2x(\ln x + x^2)$

6. Найдите $u'(x)$, если $u(x) = \frac{e^x a^x}{\cos x}$

A) $\frac{e^x a^x (\sin x + \cos x (1 + \ln a))}{\cos^2 x}$

B) $\frac{e^x a^x (\cos x + a^x \sin x) + e^x a^x \ln a}{\cos^2 x}$

C) $\frac{e^x a^x \cos x - e^x a^x \sin x + e^x a^x \ln a \cdot \sin x}{\cos^2 x}$

D) $\frac{a^x (\cos x - e^x \sin x) + e^x a^x \ln a \cdot \sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x}$

E) $\frac{e^x a^x (1 - \cos x) + e^x a^x \cdot \sin x}{\cos^2 x}$

Домашнее задание

Уровень – А

Найдите производную функции $y = e^x + 3x^2$

Уровень – В

Найдите наибольшее значение функции на отрезке

Уровень – С

Через точку графика функции $y = e^x$ абсциссой $x_0 = 1$ проведена касательная.

Найдите тангенс угла наклона этой касательной к оси абсцисс.
