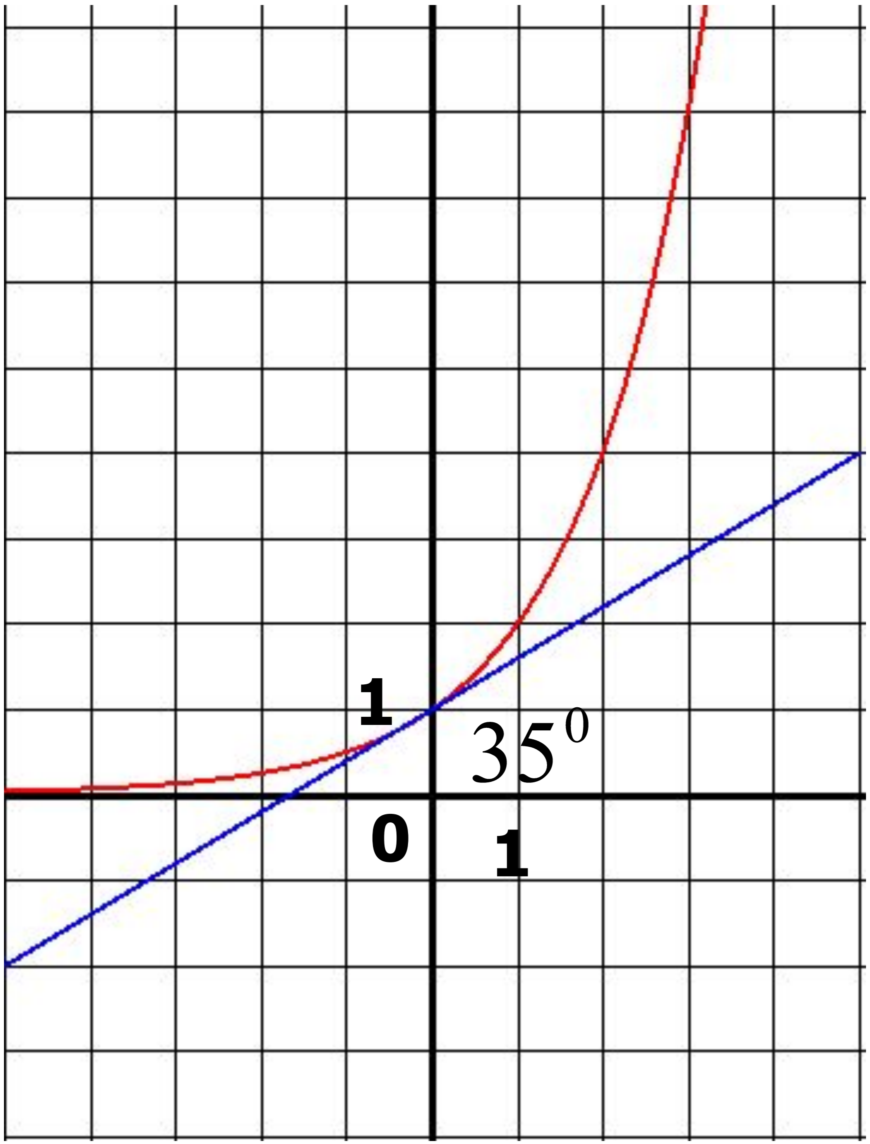
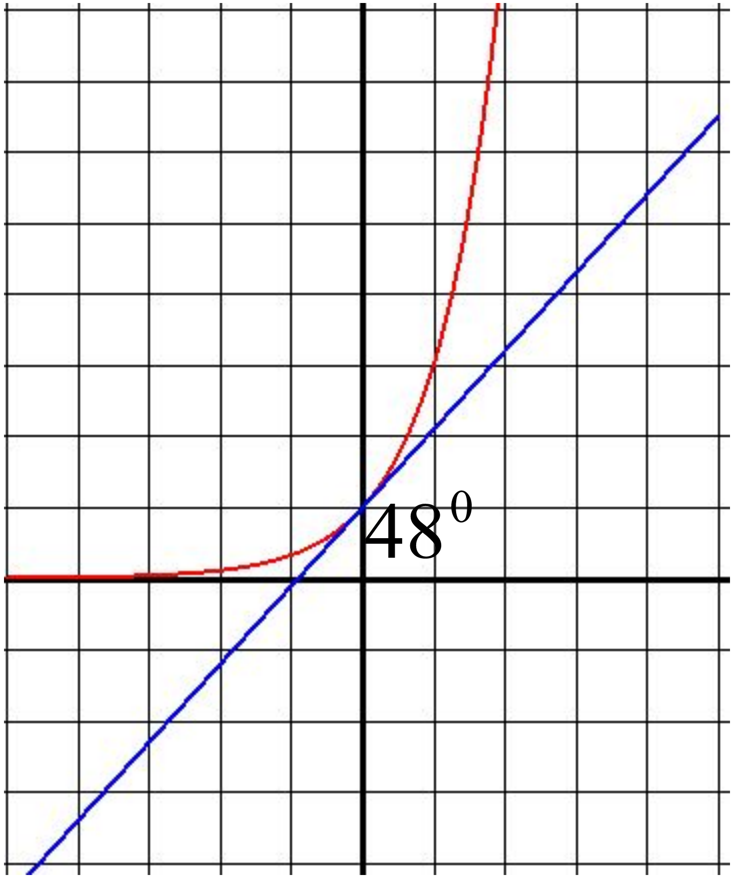
Дифференцирование показательной и логарифмической функций.

Сычева Г.В.

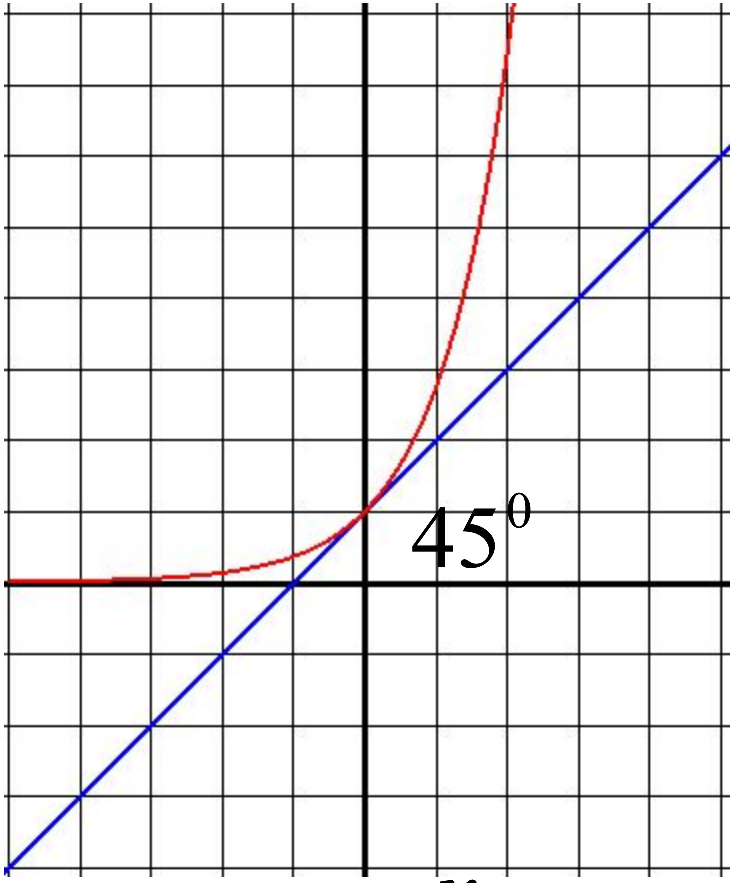
Число е. $y = a^x$ a > 1.



$$y = 2^x$$



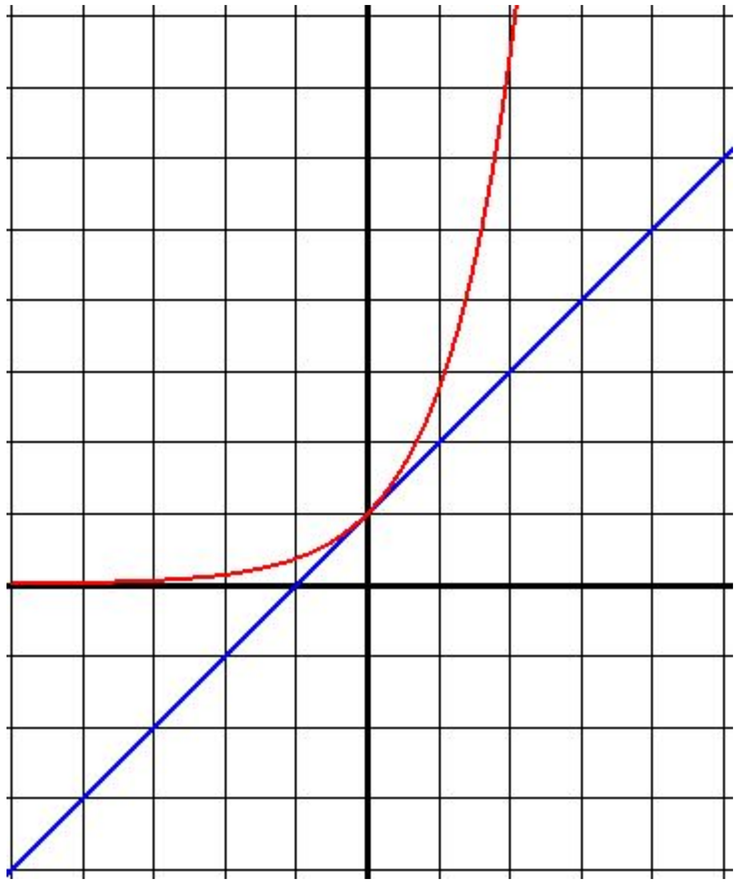
$$y = 3^x$$



$$y = e^x$$

e = 2,71828182845 90……

Свойства функции $y = e^x$:



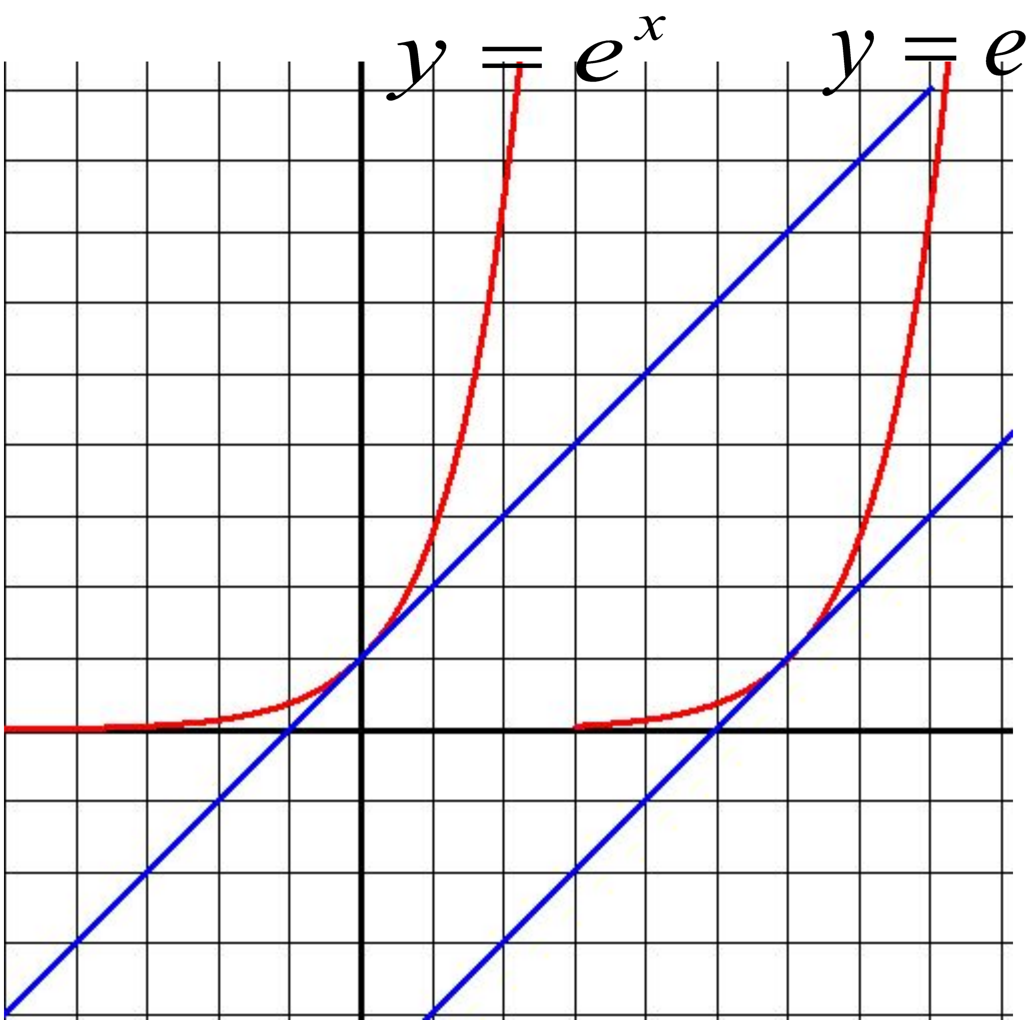
1. $D(f) = (-\infty; +\infty);$
2. не является четной , ни нечетной;
3. возрастает;
4. не ограничена сверху, ограничена снизу;
5. не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
6. непрерывна;
7. $E(f) = (0; +\infty);$
8. выпукла вниз;
9. дифференцируема.

Производная функции y = f(x), где

$$f(x) = e^x$$

1. $f'(0) = tg45^o = 1$

2. **y = g(x),**
где g(x) = f(x-a)



$$g(x) = e^{x-a}$$

$$g'(a) = 1$$

$$f(x) = e^x = e^a \cdot e^{x-a} = e^a \cdot g(x)$$

$$f'(x) = e^a \cdot g'(x)$$

$$f'(a) = e^a \cdot g'(a)$$

$$g'(a) = 1$$

$$f'(a) = e^a$$

$$\left(e^x\right)' = e^x$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Пример 1. Провести касательную к графику функции $y = e^x$ в точке x=1.

Решение: $$y = f(a) + f'(a)(x - a)$$

1) a=1
2) f(a)=f(1)=e
3) $f'(x) = e^x; \quad f'(a) = f'(1) = e.$

4) y=e+e(x-1); y = ex

Ответ: y=ex

Пример 2.

Вычислить значение производной функции $y = e^{4x-12}$ в точке x=3.

Решение:

$$y' = (e^{4x-12})' = 4e^{4x-12}$$

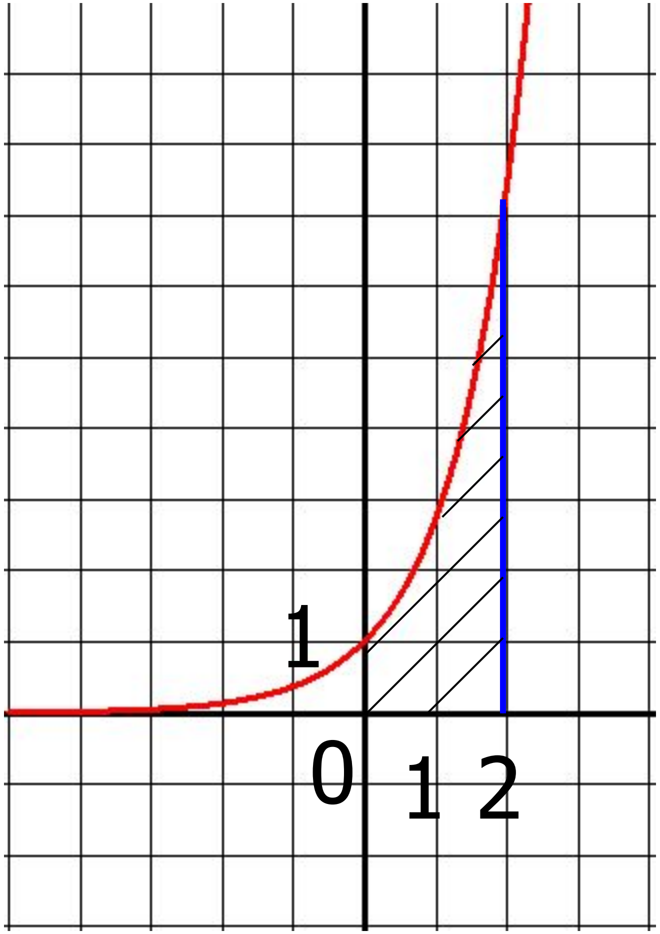
$$y'(3) = (e^{4\cdot 3-12})' = 4e^{0} = 4$$

Ответ: 4

Пример 3.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями y=0, x=0, x=2, $y = e^x$

Решение:



$$S = \int_0^2 e^x dx = e^x \Big|_0^2 =$$

$$= e^2 - e^0 = e^2 - 1$$

Ответ: $S = e^2 - 1$

Пример 4.

Исследовать на экстремум и схематически изобразить график функции $y = x^2 e^x$

Решение:

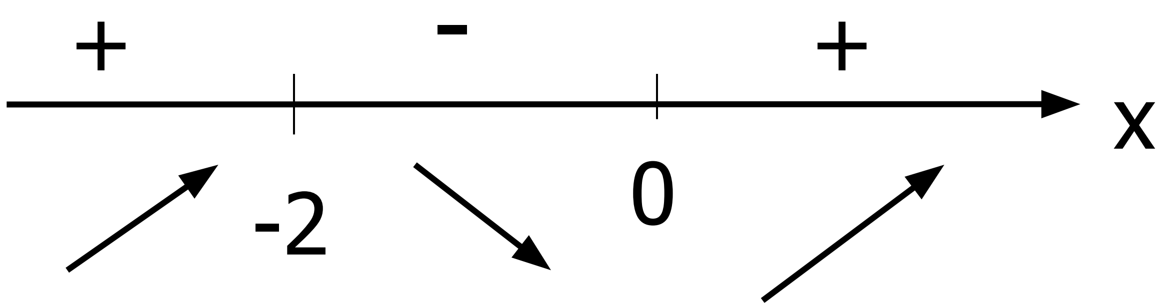
1) $D(f) = \left(-\infty; +\infty\right)$

2)

$$y' = (x^2 e^x)' = \left(x^2\right)' e^2 + x^2 \left(e^x\right)' =$$

$$= 2xe^x + x^2 e^x = xe^x \left(x + 2\right)$$

3) $y' = xe^{x}(x+2)$

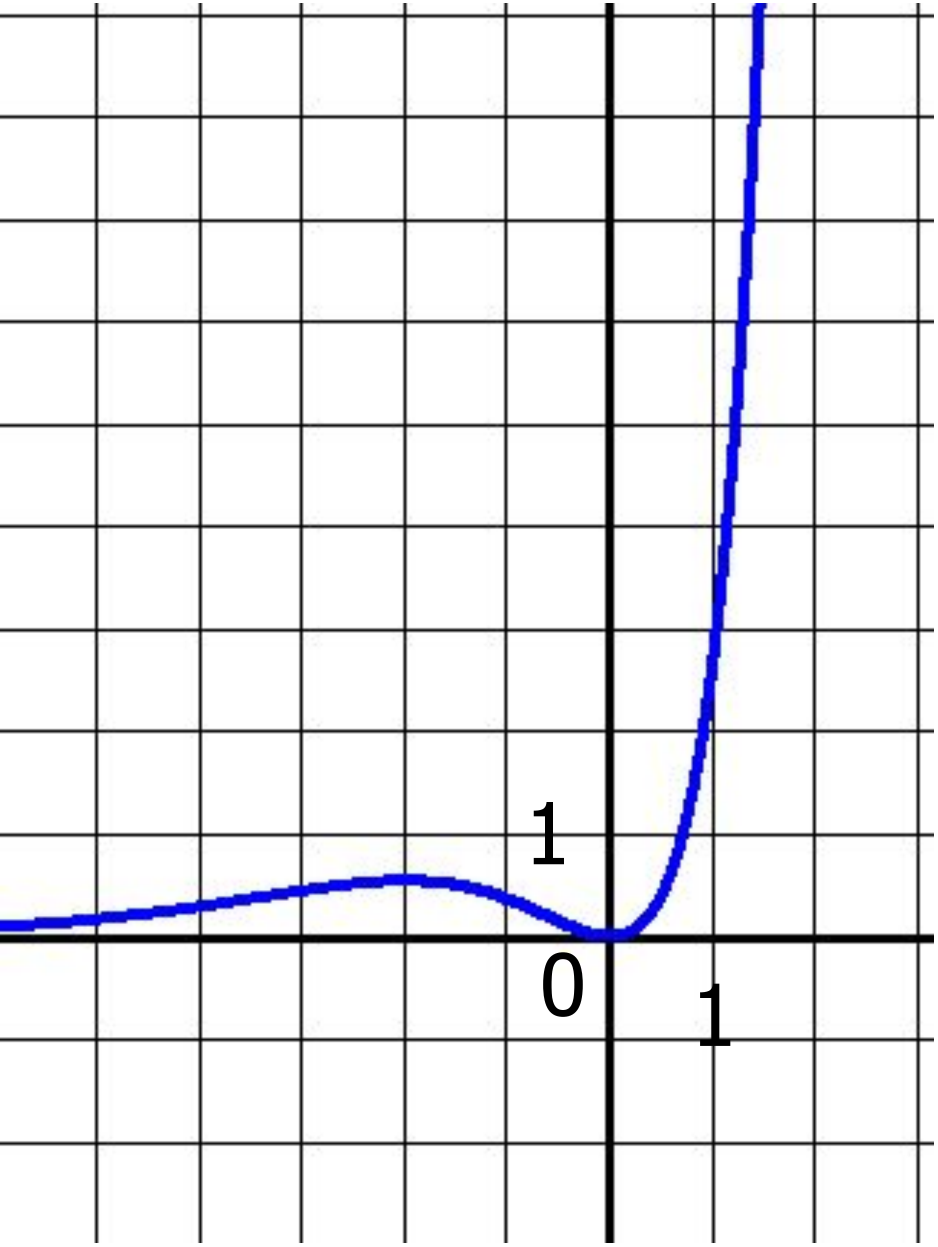


4) x=-2 – точка максимума

$$y_{\max} = y(-2) = (-2)^2 e^{-2} = 4e^{-2} = \frac{4}{e^2} \approx 0{,}5$$

x=0 – точка минимума

$$y_{\min} = (0)^2 e^{0} = 0$$



Ось абсцисс – горизонтальная асимптота графика.

Решите упражнения:

1620, 1623(а,б), 1624(а,б), 1628(а,б), 1629(а,б)

Решить дома: 1621, 1623(в,г), 1624(в,г), 1628(в,г), 1629(в,г), 1631.

Натуральные логарифмы: $\log_e 2 = \ln 2$

$$\log_e 7 = \ln 7$$

$$\ln 1 = 0$$

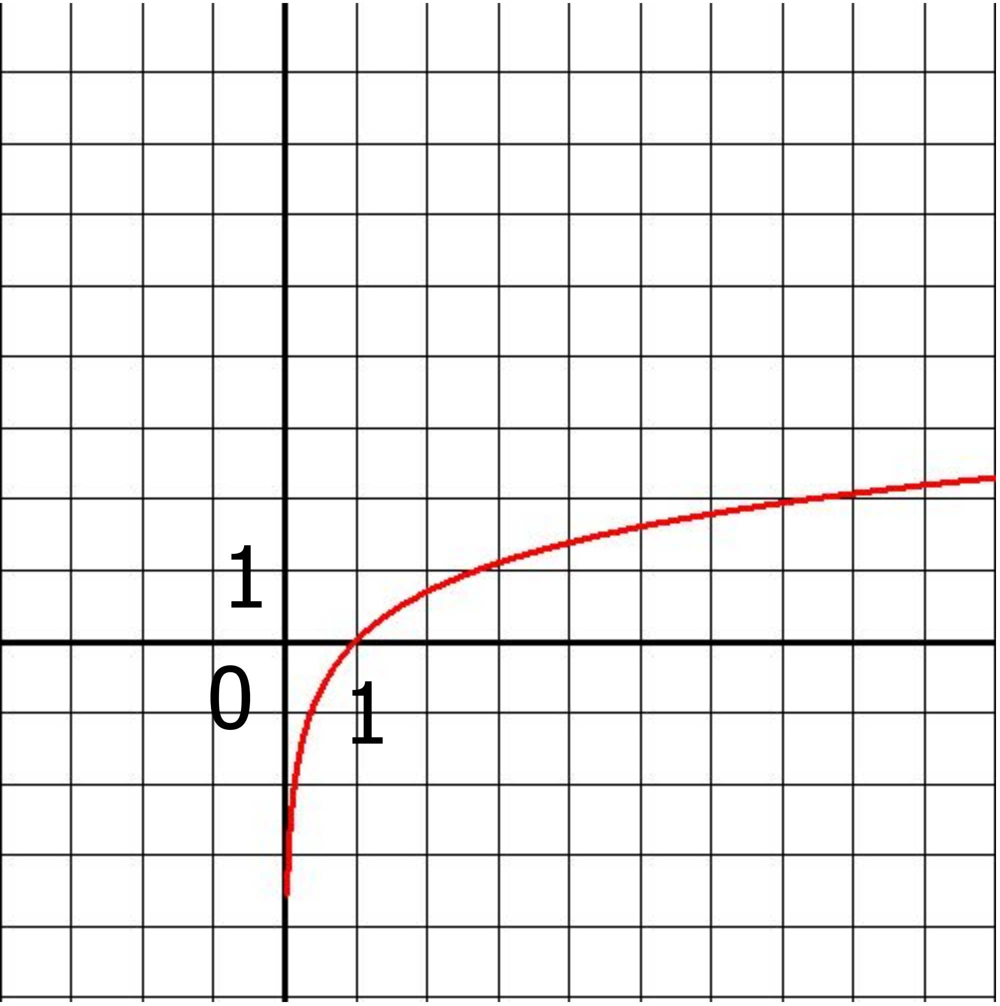
$$\ln e = 1$$

$$\ln e^r = r$$

$$e^{\ln x} = x$$

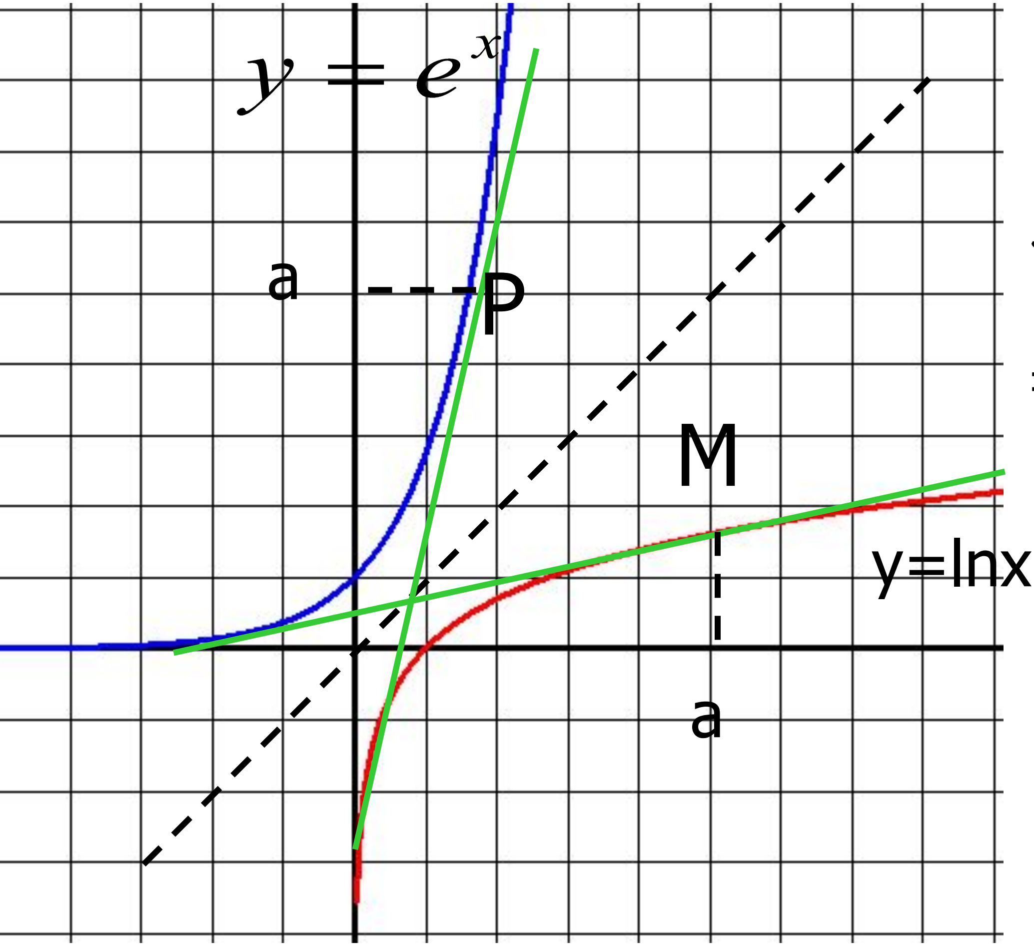
$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Функция y=ln x, ее свойства, график.



1. $D(f) = (0;+\infty);$
2. не является четной , ни нечетной;
3. возрастает;
4. не ограничена сверху, не ограничена снизу;
5. не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
6. непрерывна;
7. $E(f) = (-\infty;+\infty);$
8. выпукла вверх;
9. дифференцируема.

Дифференцирование функция y=ln x.



P(lna;a) M(a;lna)

$$f'(a) = tg\alpha = tg\left(90^0 - \beta\right) =$$

$$= ctg\beta = \frac{1}{tg\beta}$$

$$g'(\ln a) = tg\beta$$

$$g'(\ln a) = \underline{tg\beta}$$

$$f'(a) = \frac{1}{tg\beta}$$

$$g'(x) = (e^x)' = e^x$$

$$g'(\ln a) = e^{\ln a} = \underline{a}$$

$$f'(a) = \frac{1}{tg\beta} = \frac{1}{a}$$

$$\underline{f'(x) = \frac{1}{x}}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Дифференцирование функции $y = a^x$

$$a = e^{\ln a}$$

$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x$$

$$\boxed{(a^x)' = a^x \ln a}$$

Например, $\left(2^x\right)' = 2^x \cdot \ln 2;\quad \left(5^x\right)' = 5^x \cdot \ln 5.$

Дифференцирование функции $y = \log_a x$

$$y' = (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' =$$

$$= \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\boxed{(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}}$$