



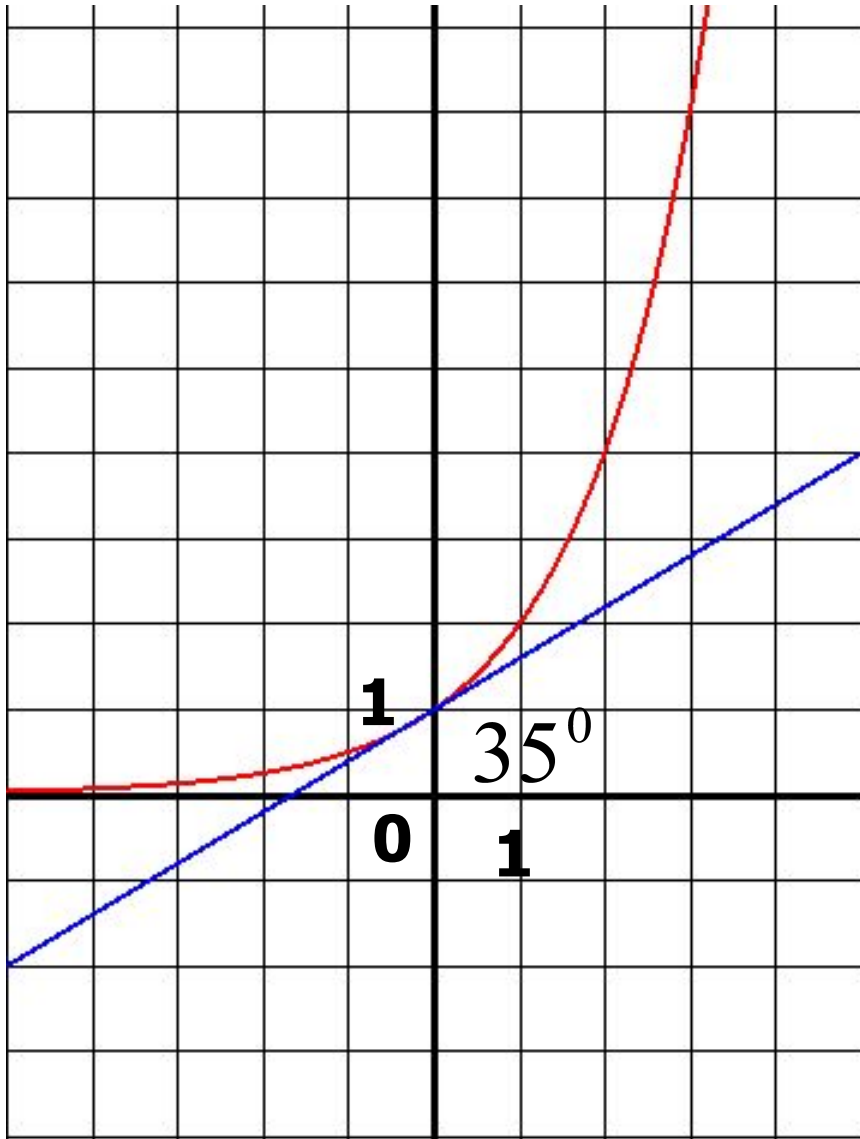
Дифференцирование показательной и логарифмической функций.

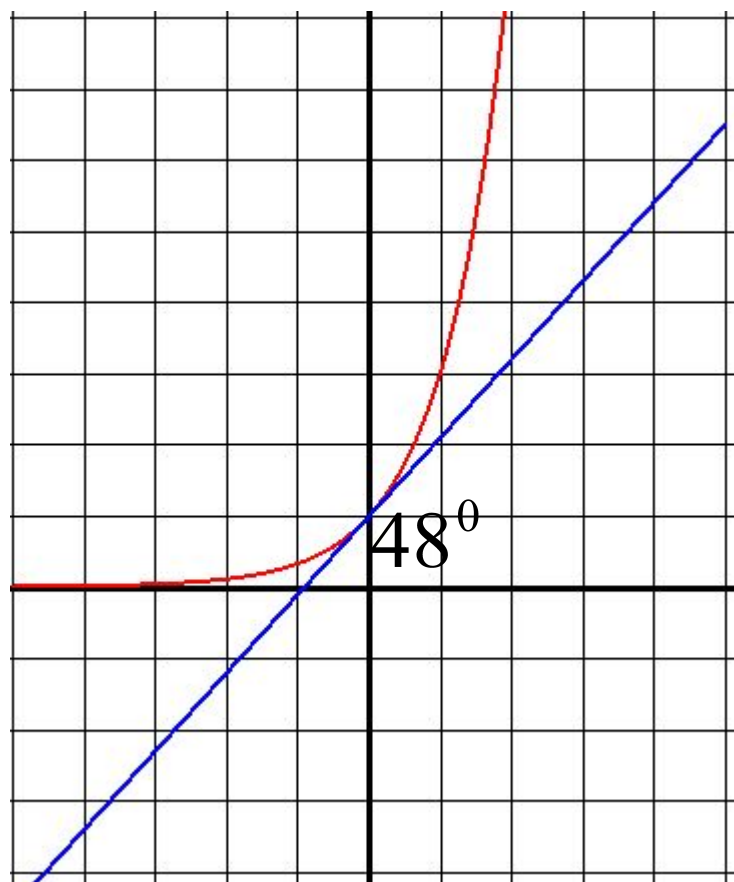
Сычева Г.В.

Число e.

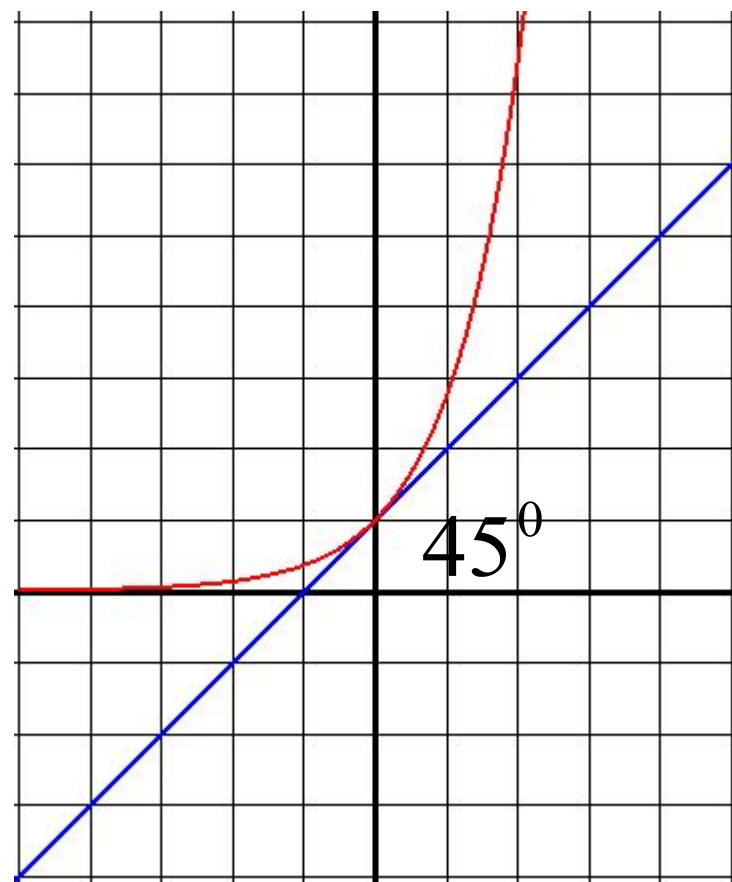
$$y = a^x \quad a > 1.$$

$$y = 2^x$$





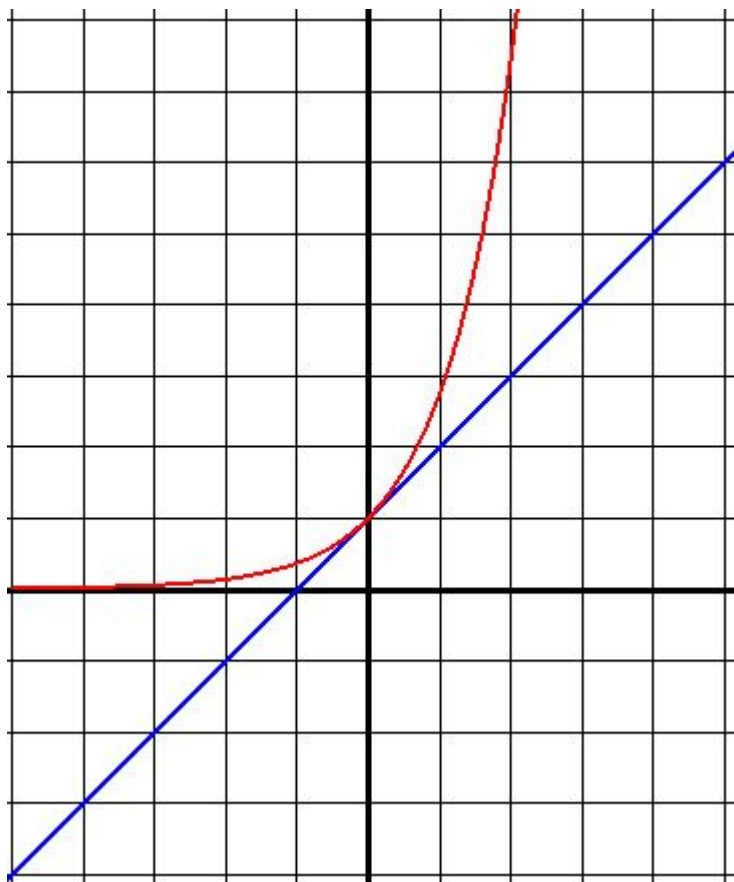
$$y = 3^x$$



$$y = e^x$$

$e = 2,7182818284590\dots$

Свойства функции $y = e^x$:



1. $D(f) = (-\infty; +\infty)$;
2. не является четной, ни нечетной;
3. возрастает;
4. не ограничена сверху, ограничена снизу;
5. не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
6. непрерывна;
7. $E(f) = (0; +\infty)$;
8. выпукла вниз;
9. дифференцируема.

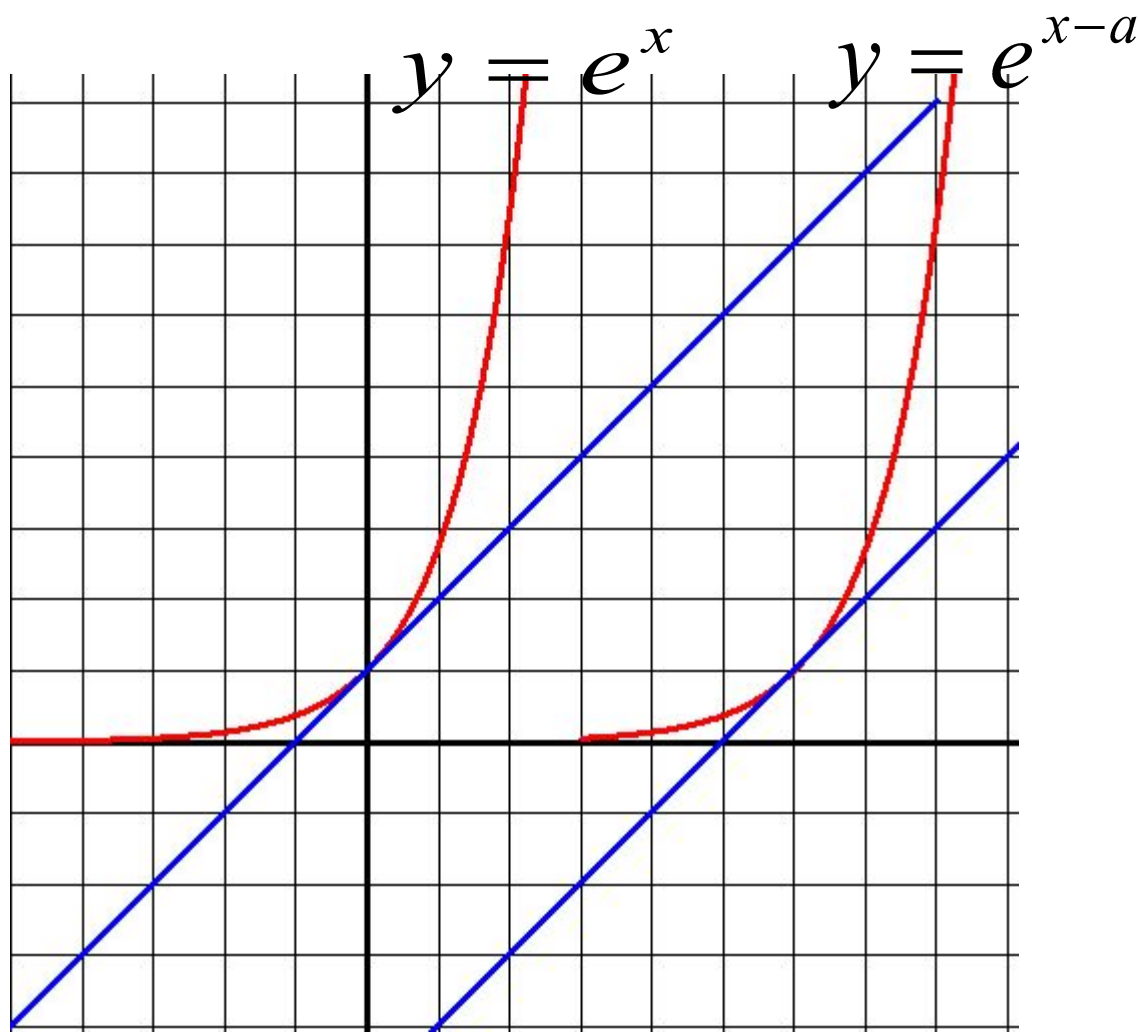
Производная функции $y = f(x)$,

$$f(x) = e^x$$

где

1. $f'(0) = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$

2. $y = g(x)$,
где $g(x) = f(x-a)$



$$g(x) = e^{x-a}$$

$$g'(a) = 1$$

$$f(x) = e^x = e^a \cdot e^{x-a} = e^a \cdot g(x)$$

$$f'(x) = e^a \cdot g'(x) \qquad f'(a) = e^a \cdot g'(a)$$

$$g'(a) = 1 \qquad f'(a) = e^a$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

Пример 1. Провести касательную к графику функции $y = e^x$ в точке $x=1$.

Решение: $y = f(a) + f'(a)(x - a)$

1) $a=1$

2) $f(a)=f(1)=e$

3) $f'(x) = e^x$; $f'(a) = f'(1) = e$.

4) $y=e+e(x-1)$; $y = ex$

Ответ: $y=ex$

Пример 2.

Вычислить значение производной функции $y = e^{4x-12}$ в точке $x=3$.

Решение:

$$y' = (e^{4x-12})' = 4e^{4x-12}$$

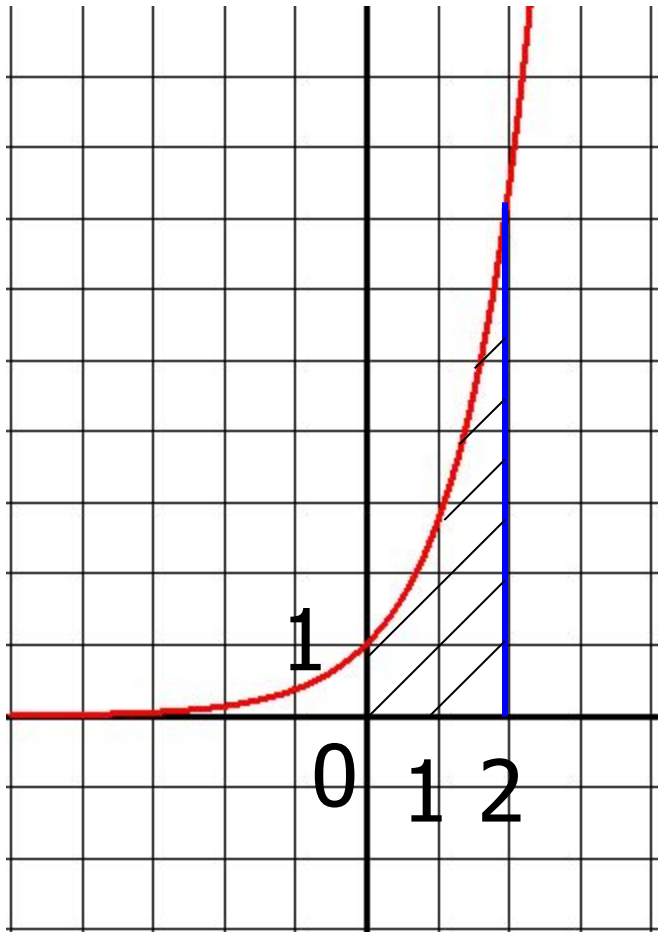
$$y'(3) = (e^{4 \cdot 3 - 12})' = 4e^0 = 4$$

Ответ: 4

Пример 3.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=0$, $x=0$, $x=2$, $y = e^x$

Решение:



$$S = \int_0^2 e^x dx = e^x \Big|_0^2 =$$
$$= e^2 - e^0 = e^2 - 1$$

Ответ: $S = e^2 - 1$

Пример 4.

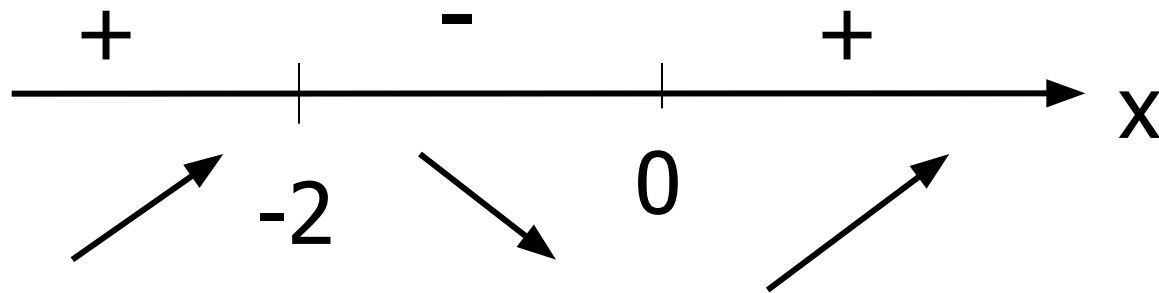
Исследовать на экстремум и схематически изобразить график функции $y = x^2 e^x$

Решение:

$$1) \quad D(f) = (-\infty; +\infty)$$

$$\begin{aligned} 2) \quad y' &= (x^2 e^x)' = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' = \\ &= 2xe^x + x^2 e^x = xe^x (x + 2) \end{aligned}$$

$$3) \quad y' = xe^x(x+2)$$

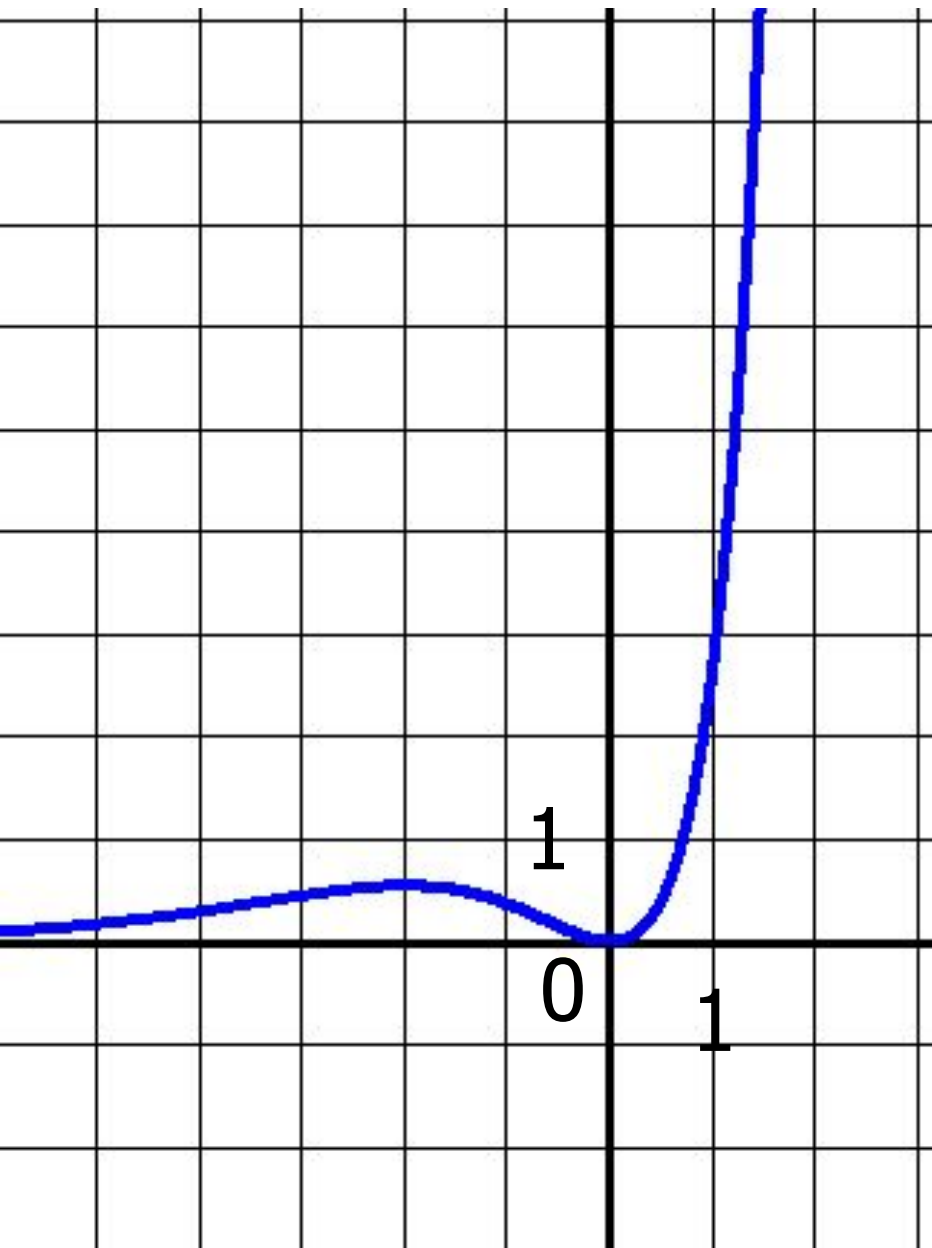


4) $x = -2$ – точка максимума

$$y_{\max} = y(-2) = (-2)^2 e^{-2} = 4e^{-2} = \frac{4}{e^2} \approx 0,5$$

$x = 0$ – точка минимума

$$y_{\min} = (0)^2 e^0 = 0$$



Ось абсцисс –
горизонтальная
асимптота графика.

Решите упражнения:

1620, 1623(а,б), 1624(а,б), 1628(а,б), 1629(а,б)

Решить дома: 1621, 1623(в,г), 1624(в,г),
1628(в,г), 1629(в,г), 1631.

Натуральные логарифмы: $\log_e 2 = \ln 2$

$$\log_e 7 = \ln 7$$

$$\ln 1 = 0$$

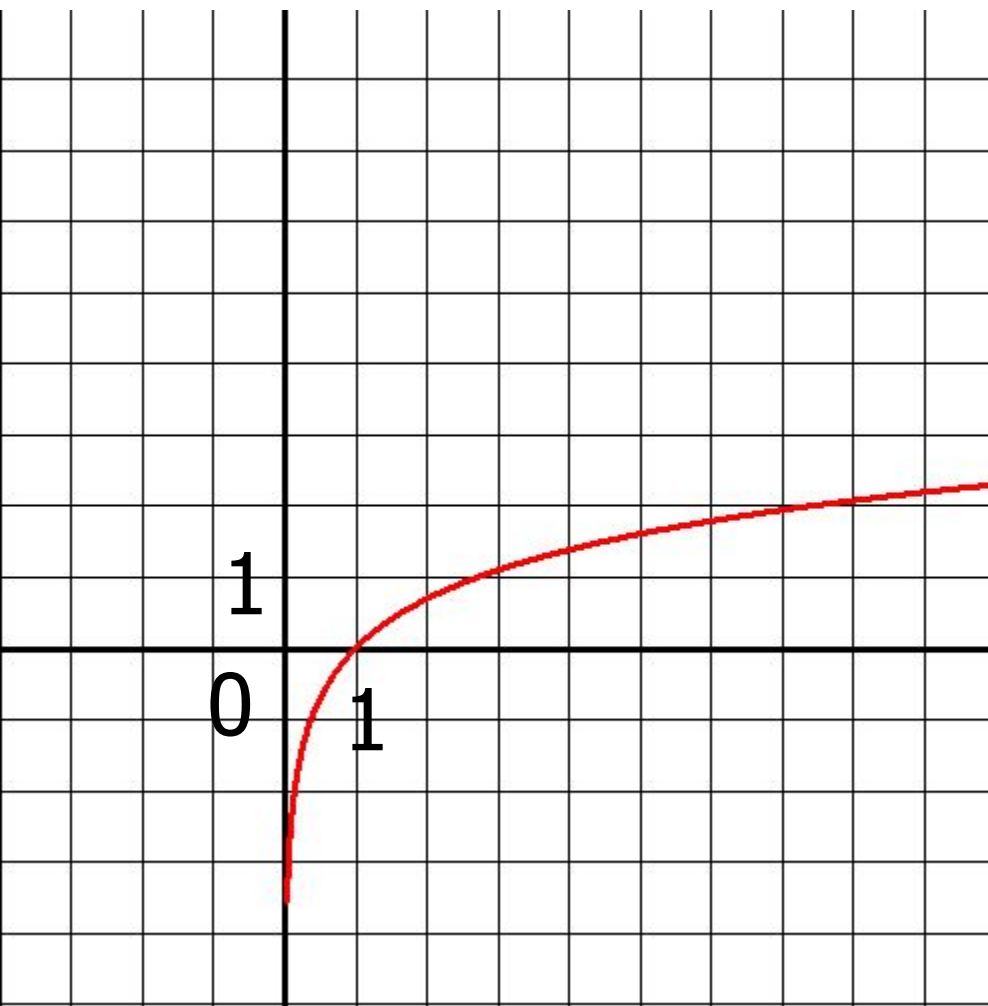
$$\ln e = 1$$

$$\ln e^r = r$$

$$e^{\ln x} = x$$

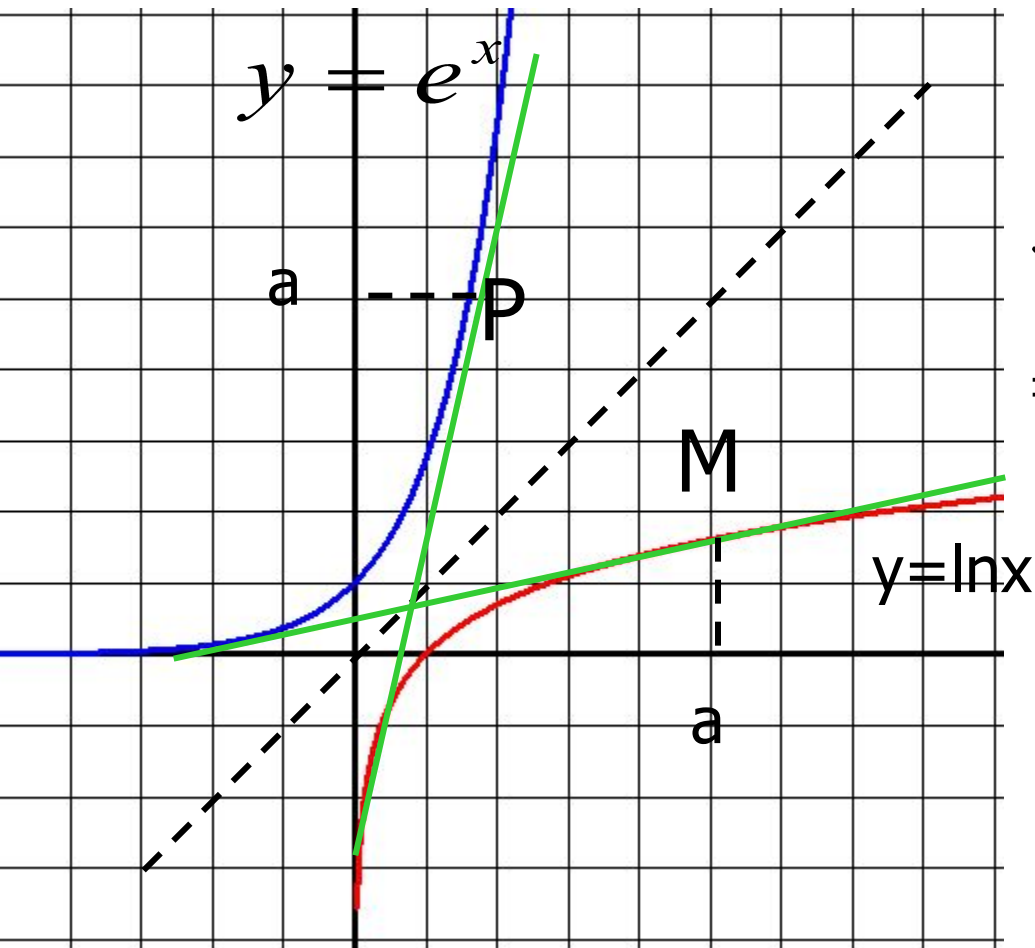
$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Функция $y = \ln x$, ее свойства, график.



1. $D(f) = (0; +\infty)$;
2. не является четной, ни нечетной;
3. возрастает;
4. не ограничена сверху, не ограничена снизу;
5. не имеет ни наибольшего, ни наименьшего значений;
6. непрерывна;
7. $E(f) = (-\infty; +\infty)$;
8. выпукла вверх;
9. дифференцируема.

Дифференцирование функция $y = \ln x$.



$P(\ln a; a)$ $M(a; \ln a)$

$$f'(a) = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \beta) = \\ = \operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$$

$$g'(\ln a) = \operatorname{tg} \beta$$

$$g'(\ln a) = \underline{\text{tg}\beta}$$

$$f'(a) = \frac{1}{\text{tg}\beta}$$

$$g'(x) = (e^x)' = e^x$$

$$g'(\ln a) = e^{\ln a} = \underline{a}$$

$$f'(a) = \frac{1}{\text{tg}\beta} = \frac{1}{a}$$

$$\underline{f'(x) = \frac{1}{x}}$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Дифференцирование функции $y = a^x$

$$a = e^{\ln a}$$

$$a^x = e^{x \ln a}$$

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \ln a \cdot a^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln a$$

Например, $(2^x)' = 2^x \cdot \ln 2$; $(5^x)' = 5^x \cdot \ln 5$.

Дифференцирование функции $y = \log_a x$

$$y' = (\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a} \right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot (\ln x)' =$$

$$= \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln a}$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$