

# **Эконометрика**

## **Тема 8**

## ***Тема 8. Динамические эконометрические модели.***

- 1) Динамические эконометрические модели. Основные понятия.**
- 2) Интерпретация параметров моделей с распределенным лагом и моделей авторегрессии.**
- 3) Лаговые модели Алмон.**
- 4) Метод Койка.**
- 5) Оценка параметров моделей авторегрессии методом инструментальной переменной.**
- 6) Модели адаптивных ожиданий. Модели частичной корректировки.**

# 1. Динамические эконометрические модели. Основные понятия.

**Эконометрическая модель** является **динамической**, если в данный момент времени  $t$  она учитывает значения входящих в нее переменных, *относящиеся как к текущему, так и к предыдущим моментам времени*, т. е. если эта модель отражает динамику исследуемых переменных в каждый момент времени.

## Типы динамических эконометрических моделей

I. Модели, в которых значения переменных за прошлые периоды времени **(лаговые переменные)** непосредственно включены в модель.

II. Модели, в которые включены *переменные, характеризующие ожидаемый или желаемый уровень результата, или одного из факторов* в момент времени  $t$

# 1. Динамические эконометрические модели. Основные понятия.

I. Модели, в которых значения переменных за прошлые периоды времени (*лаговые переменные*) непосредственно включены в модель.

**Модели с распределенным лагом:** в таких моделях наряду с текущими значениями факторных переменных содержатся их *лаговые* значения

$$y_t = a + b_0 \cdot x_t + b_1 \cdot x_{t-1} + \dots + b_p \cdot x_{t-p} + \varepsilon_t$$

**Модели авторегрессии:** в таких моделях *лаговые значения результата* включены в модель в качестве факторных переменных

$$y_t = a + b_0 x_t + c_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

# 1. Динамические эконометрические модели. Основные понятия.

II. Модели, в которые включены *переменные*, характеризующие *ожидаемый* или *желаемый* уровень результата, или одного из факторов в момент времени  $t$ .

**Модели адаптивных ожиданий:** в таких моделях учитывается *ожидаемое значение факторного признака*

$$y_t = a + b \cdot x^*_{t+1} + \varepsilon_t$$

**Модели неполной (частичной) корректировки:** в таких моделях учитывается *ожидаемое значение результативного признака*

$$y^*_t = a + b \cdot x_t + \varepsilon_t$$

Оценка параметров этих моделей сводится *к оценке параметров моделей авторегрессии.*

# **1. Динамические эконометрические модели. Основные понятия.**

*Специфика построения моделей с распределенным лагом и моделей авторегрессии:*

- 1) оценка параметров моделей авторегрессии, а в большинстве случаев и моделей с распределенным лагом **не может быть проведена с помощью обычного МНК** ввиду нарушения его предпосылок и требует **специальных статистических методов**;
- 2) приходится решать проблемы **выбора оптимальной величины лага** и определения его **структуры**;
- 3) между моделями с распределенным лагом и моделями авторегрессии имеется **определенная взаимосвязь**, и в некоторых случаях необходимо осуществлять переход от одного типа моделей к другому.

**2. Интерпретация параметров моделей с распределенным лагом и моделей авторегрессии.**

**См. лабораторную работу №7 (изучить самостоятельно)**

### 3. Лаговые модели Алмон.

Текущие и лаговые значения факторной переменной оказывают *различное по силе воздействие на результирующую переменную модели.*

*Количественно* сила связи между результатом и значениями факторной переменной, относящимися к различным моментам времени, измеряется с помощью *коэффициентов регрессии при факторных переменных*, например:

$$y_t = -0,67 + 4,5 \cdot x_t + 3,0 \cdot x_{t-1} + 1,5 \cdot x_{t-2} + 0,5 \cdot x_{t-3}.$$

*(зависимость объемов продаж компании в среднем за месяц от расходов на рекламу)*

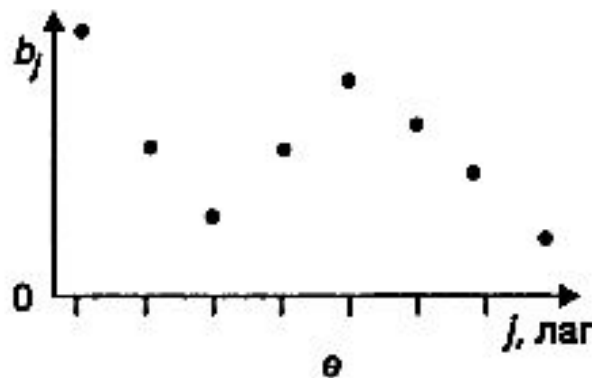
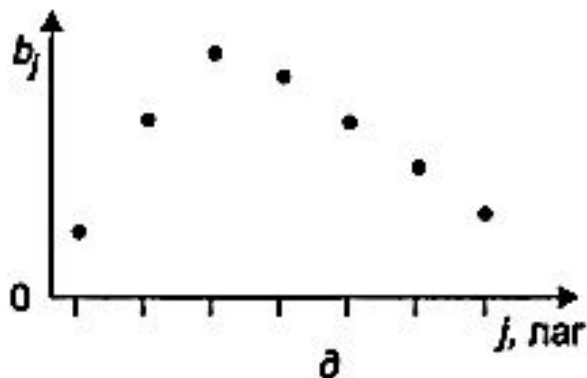
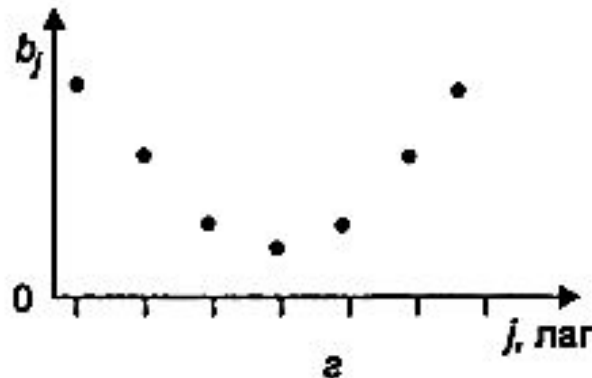
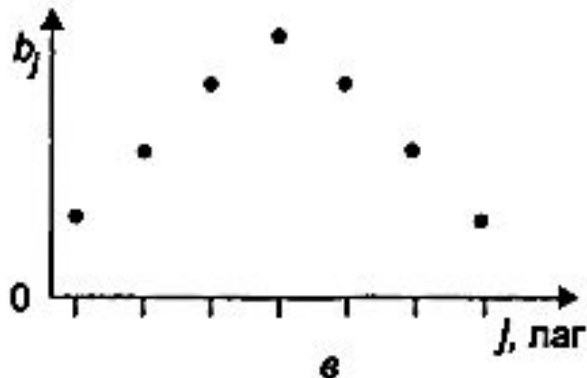
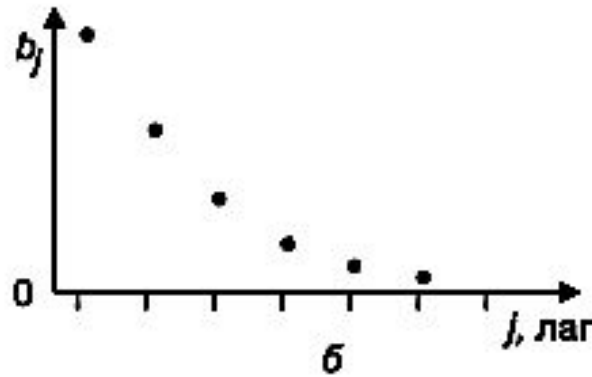
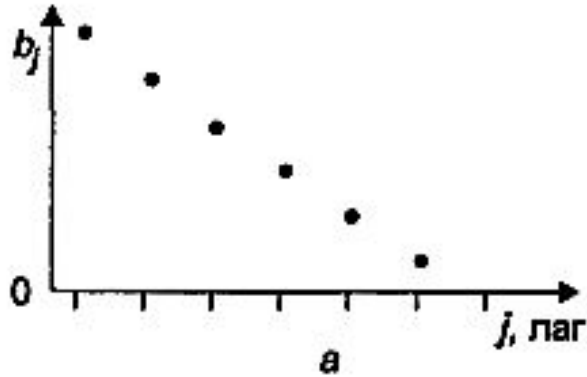
Если построить *график зависимости этих коэффициентов от величины лага*, можно получить графическое изображение *структуры лага*, или распределения во времени воздействия факторной переменной на результат.



### 3. Лаговые модели Алмон.

#### Основные формы структуры лага:

- а - линейная;
- б - геометрическая;
- в – перевернутая V-образная;
- г-е – полиномиальная



**Основная трудность** в выявлении структуры лага: **как получить значения параметров  $b_j$**



Часто предположения о структуре лага основаны на:  
1) общ. положениях экономической теории,  
2) на иссл-х взаимосвязи показателей, 3) на результатах проведенных ранее эмпирич. иссл-й, 4) иной априорной информации.

### 3. Лаговые модели Алмон.

Лаги, структуру которых можно описать с помощью **полиномов**, называют **лагами Алмон**.

**Процедура применения метода Алмон для расчета параметров модели с распределенным лагом:**

- 1) определяется максимальная величина лага  $l$ ;
- 2) определяется степень полинома  $k$ , описывающего структуру лага;
- 3) рассчитываются значения вспомогательных переменных  $z_0, \dots, z_k$ ;
- 4) определяются параметры уравнения линейной регрессии со вспомогательными переменными  $z_0, \dots, z_k$  (классическим МНК);
- 5) рассчитываются параметры исходной модели с распределенным лагом;

Пусть имеем общую модель с распределенным лагом, имеющую конечную **максимальную величину лага  $p$** :

$$y_t = a + b_0 \cdot x_t + b_1 \cdot x_{t-1} + \dots + b_p \cdot x_{t-p} + \varepsilon_t \quad (*)$$

Предположим, что в исследуемой модели имеет место **полиномиальная структура лага**, т. е. зависимость коэффициентов регрессии  $b_j$  от величины лага описывается **полиномом  $k$ -й степени**.

### 3. Лаговые модели Алмон.

Формально *модель зависимости коэффициентов  $b_j$  от величины лага  $j$*  в форме полинома можно записать так:

- для полинома первой степени  $b_j = c_0 + c_1 j$ ;
- для полинома второй степени  $b_j = c_0 + c_1 j + c_2 j^2$ ;
- для полинома третьей степени  $b_j = c_0 + c_1 j + c_2 j^2 + c_3 j^3$  и т. д.

В наиболее *общем виде* для полинома  $k$ -й степени имеем:

$$b_j = c_0 + c_1 j + c_2 j^2 + \dots + c_k j^k.$$

Тогда каждый из коэффициентов  $b_j$  модели (\*) можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} b_0 &= c_0; \\ b_1 &= c_0 + c_1 + \dots + c_k; \\ b_2 &= c_0 + 2c_1 + 4c_2 + \dots + 2^k c_k; \\ b_3 &= c_0 + 3c_1 + 9c_2 + \dots + 3^k c_k; \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ b_l &= c_0 + l c_1 + l^2 c_2 + \dots + l^k c_k. \end{aligned}$$

### 3. Лаговые модели Алмон.

*Подставив в (\*)* найденные соотношения для  $b_j$ , получим:

$$y_t = a + c_0 \cdot x_t + (c_0 + c_1 + \dots + c_k) \cdot x_{t-1} + (c_0 + 2 \cdot c_1 + 4 \cdot c_2 + \dots + 2^k \cdot c_k) \cdot x_{t-2} + (c_0 + 3 \cdot c_1 + 9 \cdot c_2 + \dots + 3^k \cdot c_k) \cdot x_{t-3} + \dots + (c_0 + l \cdot c_1 + l^2 \cdot c_2 + \dots + l^k \cdot c_k) \cdot x_{t-l} + \varepsilon_t.$$

*Перегруппируем* слагаемые в уравнении выше:

$$y_t = a + c_0 \cdot (x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + \dots + x_{t-l}) + c_1 \cdot (x_{t-1} + 2 \cdot x_{t-2} + 3 \cdot x_{t-3} + \dots + l \cdot x_{t-l}) + c_2 \cdot (x_{t-1} + 4 \cdot x_{t-2} + 9 \cdot x_{t-3} + \dots + l^2 \cdot x_{t-l}) + \dots + c_k \cdot (x_{t-1} + 2^k \cdot x_{t-2} + 3^k \cdot x_{t-3} + \dots + l^k \cdot x_{t-l}) + \varepsilon_t.$$

Обозначим слагаемые в скобках при  $c_i$ , как *новые переменные*:

$$z_0 = x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + \dots + x_{t-l} = \sum_{j=0}^l x_{t-j};$$

$$z_1 = x_{t-1} + 2 \cdot x_{t-2} + 3 \cdot x_{t-3} + \dots + l \cdot x_{t-l} = \sum_{j=1}^l j \cdot x_{t-j};$$

$$z_2 = x_{t-1} + 4 \cdot x_{t-2} + 9 \cdot x_{t-3} + \dots + l^2 \cdot x_{t-l} = \sum_{j=1}^l j^2 \cdot x_{t-j};$$

.....

$$z_k = x_{t-1} + 2^k \cdot x_{t-2} + 3^k \cdot x_{t-3} + \dots + l^k \cdot x_{t-l} = \sum_{j=1}^l j^k \cdot x_{t-j}.$$

### 3. Лаговые модели Алмон.

Перепишем модель (\*) с учетом соотношений для переменных  $z_0, \dots, z_k$ :

$$y_t = a + c_0 \cdot z_0 + c_1 \cdot z_1 + c_2 \cdot z_2 + \dots + c_k \cdot z_k + \varepsilon_t \quad (**)$$

Рассчитав параметры  $c_i$  в модели (\*\*) с помощью *классического МНК* можно затем определить *коэффициенты  $b_i$  модели с распределенным лагом* (используя формулы для  $b_i$ ).

#### *Проблемы применения метода Алмон:*

1. величина лага  $p$  должна быть *известна заранее* (лучше исходить из максимально возможного лага);
2. необходимо установить *степень полинома  $k$*  (обычно ограничиваются рассмотрением полиномов 2-й и 3-й степени);
3. переменные  $z$  будут *коррелировать между собой* в случаях, когда наблюдается высокая связь между исходными переменными  $x$ ; поэтому оценку параметров модели (\*) приходится проводить в условиях *мультиколлинеарности факторов*.

#### 4. Метод Койка.

**Метод Койка** используется для оценки параметров модели с распределенным лагом *с бесконечным лагом* вида:

$$y_t = a + b_0 \cdot x_t + b_1 \cdot x_{t-1} + b_2 \cdot x_{t-2} + \dots + \varepsilon_t \quad (1)$$

При этом используется допущение о **геометрической структуре** лага - такой структуры, когда воздействия лаговых значений фактора на результат *уменьшаются с увеличением величины лага в геометрической прогрессии*.

Койк предположил, что существует некоторый **постоянный темп уменьшения во времени лаговых воздействий фактора на результат** -  $\lambda$  ( $0 < \lambda < 1$ ). Тогда для коэффициентов модели (1) справедливо ( $j$  – номер лага):

$$b_j = b_0 \cdot \lambda^j; \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 < \lambda < 1.$$

#### 4. Метод Койка.

Выразим с помощью формулы для  $b_j$  все коэффициенты в модели (1) через  $b_0$  и  $\lambda$ :

$$y_t = a + b_0 \cdot x_t + b_0 \cdot \lambda \cdot x_{t-1} + b_0 \cdot \lambda^2 \cdot x_{t-2} + \dots + \varepsilon_t \quad (2)$$

Тогда для периода  $t-1$  модель (2) **можно записать так** – модель (3):

$$y_{t-1} = a + b_0 \cdot x_{t-1} + b_0 \cdot \lambda \cdot x_{t-2} + b_0 \cdot \lambda^2 \cdot x_{t-3} + \dots + \varepsilon_{t-1}.$$

Умножим обе части модели (3) на  $\lambda$ , получим модель (4):

$$\lambda \cdot y_{t-1} = \lambda \cdot a + b_0 \cdot \lambda \cdot x_{t-1} + b_0 \cdot \lambda^2 \cdot x_{t-2} + b_0 \cdot \lambda^3 \cdot x_{t-3} + \dots + \lambda \cdot \varepsilon_{t-1}.$$

**Вычтем** найденное соотношение (4) из соотношения (2):

$$y_t - \lambda \cdot y_{t-1} = a - \lambda \cdot a + b_0 \cdot x_t + \varepsilon_t - \lambda \cdot \varepsilon_{t-1}. \quad (5)$$

В результате преобразований (5) получаем **модель Койка**:

$$y_t = a \cdot (1 - \lambda) + b_0 \cdot x_t + \lambda \cdot y_{t-1} + u_t$$

$$\text{где } u_t = \varepsilon_t - \lambda \cdot \varepsilon_{t-1}. \quad 15$$

#### 4. Метод Койка.

Полученная модель Койка – *двухфакторная модель авторегрессии*.

Как правило, такая модель решается *методом инструментальной переменной*, а затем с помощью формулы

$$b_j = b_0 \cdot \lambda^j; \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad 0 < \lambda < 1$$

определяются параметры  $b_1, b_2, \dots$  исходной модели с распределенным лагом.

Описанное выше т.н. **«преобразования Койка»** позволяет перейти от модели с бесконечными распределенными лагами к модели авторегрессии, содержащей две независимые переменные  $x_t$  и  $y_{t-1}$ .



**5. Оценка параметров моделей авторегрессии методом инструментальной переменной.**

**См. лабораторную работу №7 (изучить самостоятельно)**

## 6. Модели адаптивных ожиданий. Модели частичной корректировки.

1) Рассмотрим решение **модели адаптивных ожиданий** вида:

$$y_t = a + b \cdot x_{t+1}^* + \varepsilon_t,$$

где  $y_t$  – фактическое значение результативного признака; (1)  
 $x_{t+1}^*$  – ожидаемое значение факторного признака.

Механизм *формирования ожиданий* в этой модели следующий:

$$x_{t+1}^* = \alpha \cdot x_t + (1 - \alpha) \cdot x_t^*, \quad \text{где } 0 < \alpha < 1. \quad (2)$$

Т.о., *ожидаемое значение факторной переменной  $x_t^*$*  в период  $t$  - это *средняя арифметическая взвешенная* ее фактического и ожидаемого значений в предыдущий период.

**Подставим** в модель (1) вместо  $x_{t+1}^*$  соотношение (2):

$$\begin{aligned} y_t &= a + b \cdot (\alpha \cdot x_t + (1 - \alpha) \cdot x_t^*) + \varepsilon_t = \\ &= a + \alpha \cdot b \cdot x_t + (1 - \alpha) \cdot b \cdot x_t^* + \varepsilon_t \end{aligned} \quad (3)$$

## 6. Модели адаптивных ожиданий. Модели частичной корректировки.

Если модель (1) имеет место для периода  $t$ , то она будет иметь место и для периода  $t-1$ . Таким образом, в период  $t-1$  получим:

$$y_{t-1} = a + b \cdot x_{t-1}^* + \varepsilon_{t-1}. \quad (4)$$

Умножим (4) на  $(1 - \alpha)$ :

$$(1 - \alpha) \cdot y_{t-1} = (1 - \alpha) \cdot a + (1 - \alpha) \cdot b \cdot x_{t-1}^* + (1 - \alpha) \cdot \varepsilon_{t-1}. \quad (5)$$

Вычтем почленно (5) из (3):

$$y_t - (1 - \alpha) \cdot y_{t-1} = a - (1 - \alpha) \cdot a + \alpha \cdot b \cdot x_t + \varepsilon_t - (1 - \alpha) \cdot \varepsilon_{t-1}$$

или модель (6):

$$y_t = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b \cdot x_t + (1 - \alpha) \cdot y_{t-1} + u_t, \quad u_t = \varepsilon_t - (1 - \alpha) \cdot \varepsilon_{t-1}.$$

В модели авторегрессии (6), определив ее параметры, можно легко **перейти к исходной модели адаптивных ожиданий (1)** и определить ее параметры  $a$  и  $b$ .

## 6. Модели адаптивных ожиданий. Модели частичной корректировки.

2) Рассмотрим решение **модели частичной корректировки**:

$$y_t^* = a + b \cdot x_t + \varepsilon_t. \quad (7)$$

Механизм *формирования ожиданий* в этой модели следующий:

$$y_t = \beta \cdot y_t^* + (1 - \beta)y_{t-1} + v_t, \quad \text{где } 0 < \beta < 1. \quad (8)$$

Т.о., *фактическое значение результата текущего периода*  $y_t$  - это *средняя арифметическая взвешенная* его ожидаемого значения текущего периода  $y_t^*$  и фактического значения за предыдущий период времени  $y_{t-1}$ .

**Подставим** уравнение (7) в выражение для  $y_t$  (8) и получим:

$$y_t = \beta \cdot (a + b \cdot x_t + \varepsilon_t) + (1 - \beta) \cdot y_{t-1} = \beta \cdot a + \beta \cdot b \cdot x_t + (1 - \beta) \cdot y_{t-1} + u_t, \quad (9)$$

где  $u_t = \beta \cdot \varepsilon_t + v_t$  - решаем это уравнение авторегрессии, **затем находим параметры  $a$  и  $b$  уравнения (7)**

## ***Вопросы изученные в Теме 8:***

- 1) Динамические эконометрические модели. Основные понятия.**
- 2) Интерпретация параметров моделей с распределенным лагом и моделей авторегрессии.**
- 3) Лаговые модели Алмон.**
- 4) Метод Койка.**
- 5) Оценка параметров моделей авторегрессии методом инструментальной переменной.**
- 6) Модели адаптивных ожиданий. Модели частичной корректировки.**