Эконометрика

Тема 8

Тема 8. Динамические эконометрические модели.

1) **Динамические эконометрические модели. Основные понятия.**
2) **Интерпретация параметров моделей с распределенным лагом и моделей авторегрессии.**
3) **Лаговые модели Алмон.**
4) **Метод Койка.**
5) **Оценка параметров моделей авторегрессии методом инструментальной переменной.**
6) **Модели адаптивных ожиданий. Модели частичной корректировки.**

1. Динамические эконометрические модели. Основные понятия.

Эконометрическая модель является ***динамической***, если в данный момент времени t она учитывает значения входящих в нее переменных, *относящиеся как к текущему, так и к предыдущим моментам времени*, т. е. если эта модель отражает динамику исследуемых переменных в каждый момент времени.

Типы динамических эконометрических моделей

I. Модели, в которых значения переменных за прошлые периоды времени *(лаговые переменные) непосредственно включены в модель.*

II. Модели, в которые включены *переменные, характеризующие ожидаемый или желаемый уровень результата, или одного из факторов* в момент времени t

1. Динамические эконометрические модели. Основные понятия.

I. Модели, в которых значения переменных за прошлые периоды времени *(лаговые переменные) непосредственно включены в модель.*

Модели с распределенным лагом: в таких моделях наряду с текущими значениями факторных переменных содержатся их *лаговые* значения

$$y_t = a + b_0 \cdot x_t + b_1 \cdot x_{t-1} + \ldots + b_p \cdot x_{t-p} + \varepsilon_t$$

Модели авторегрессии: в таких моделях *лаговые значения результата* включены в модель в качестве факторных переменных

$$y_t = a + b_0 x_t + c_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$$

1. Динамические эконометрические модели. Основные понятия.

II. Модели, в которые включены *переменные, характеризующие ожидаемый или желаемый уровень результата, или одного из факторов* в момент времени t.

Модели адаптивных ожиданий: в таких моделях учитывается *ожидаемое значение факторного признака*

$$y_t = a + b \cdot x^*_{t+1} + \varepsilon_t$$

Модели неполной (частичной) корректировки: в таких моделях учитывается *ожидаемое значение результативного признака*

$$y^*_t = a + b \cdot x_t + \varepsilon_t$$

Оценка параметров этих моделей сводится к оценке параметров моделей авторегрессии.

1. Динамические эконометрические модели. Основные понятия.

Специфика построения моделей с распределенным лагом и моделей авторегрессии:

1) оценка параметров моделей авторегрессии, а в большинстве случаев и моделей с распределенным лагом *не может быть проведена с помощью обычного МНК* ввиду нарушения его предпосылок и требует *специальных статистических методов;*

2) приходится решать проблемы *выбора оптимальной величины лага* и определения его *структуры*;

3) между моделями с распределенным лагом и моделями авторегрессии имеется *определенная взаимосвязь*, и в некоторых случаях необходимо осуществлять переход от одного типа моделей к другому.

2. Интерпретация параметров моделей с распределенным лагом и моделей авторегрессии.

См. лабораторную работу №7 (изучить самостоятельно)

3. Лаговые модели Алмон.

Текущие и лаговые значения факторной переменной оказывают *различное по силе воздействие на результативную переменную модели.*

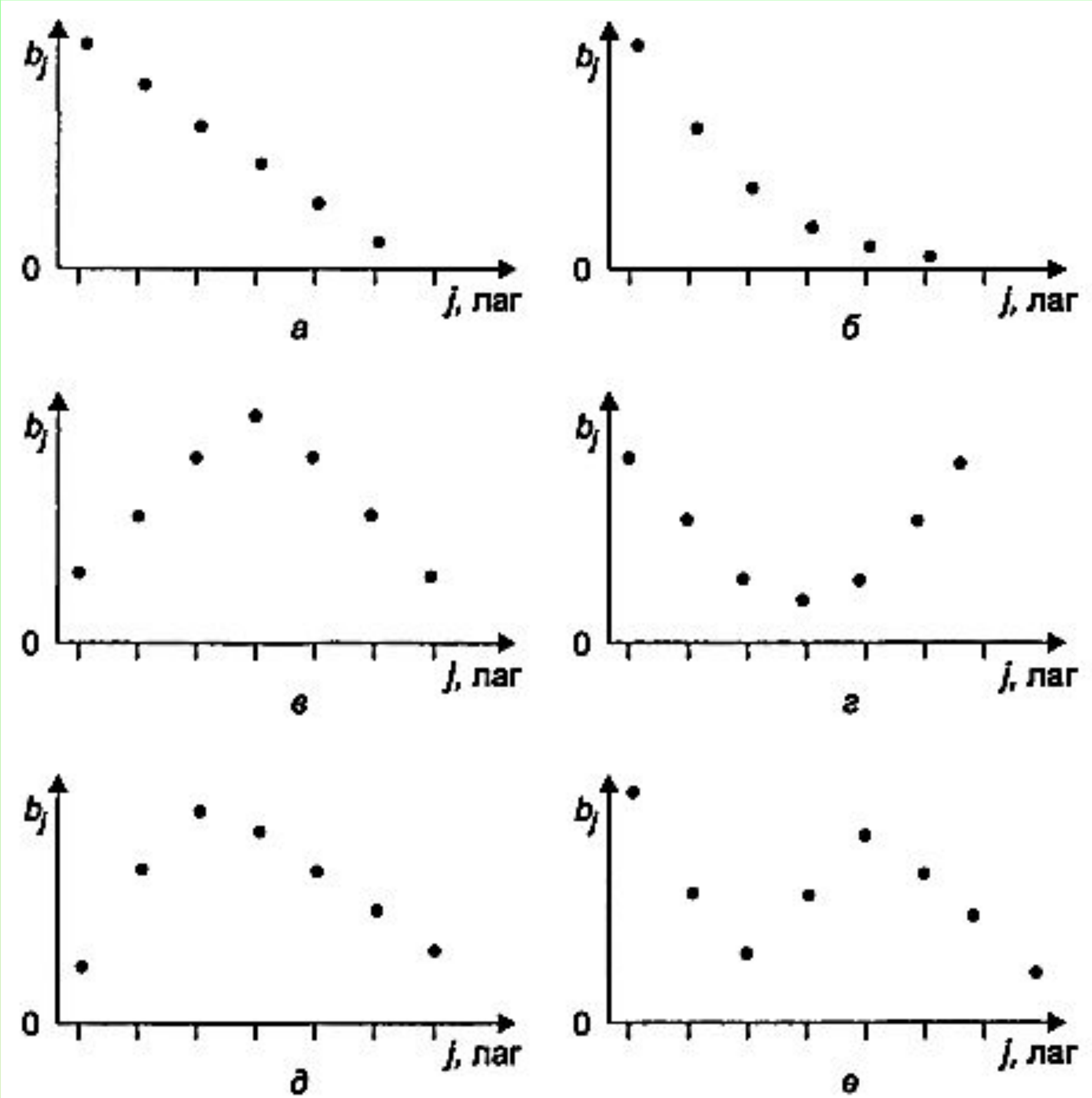
Количественно сила связи между результатом и значениями факторной переменной, относящимися к различным моментам времени, измеряется с помощью ***коэффициентов регрессии при факторных переменных***, например:

$$y_t = -0{,}67 + 4{,}5 \cdot x_t + 3{,}0 \cdot x_{t-1} + 1{,}5 \cdot x_{t-2} + 0{,}5 \cdot x_{t-3}.$$

(зависимость объемов продаж компании в среднем за месяц от расходов на рекламу)

Если построить *график зависимости этих коэффициентов от величины лага*, можно получить графическое изображение ***структуры лага***, или распределения во времени воздействия факторной переменной на результат.

3. Лаговые модели Алмон.



Основные формы структуры лага:

а - линейная;
б - геометрическая;
в – перевернутая V-образная;
г-е – полиномиальная

Основная трудность в выявлении структуры лага: *как получить значения параметров b_j.*

Часто предположения о стр-ре лага основаны на: 1) общ. положениях экономической теории, 2) на иссл-х взаимосвязи показателей, 3) на рез-тах проведенных ранее эмпирич. иссл-й, 4) иной априорной информации.

3. Лаговые модели Алмон.

Лаги, структуру которых можно описать с помощью *полиномов*, называют ***лагами Алмон.***

Процедура применения метода Алмон для расчета параметров модели с распределенным лагом:

1) определяется максимальная величина лага l;
2) определяется степень полинома k, описывающего структуру лага;
3) рассчитываются значения вспомогательных переменных $z_0, \ldots, z_k$;
4) определяются параметры уравнения линейной регрессии со вспомогательными переменными $z_0, \ldots, z_k$ (классическим МНК);
5) рассчитываются параметры исходной модели с распределенным лагом;

Пусть имеем общую модель с распределенным лагом, имеющую конечную *максимальную величину лага p:*

$$y_t = a + b_0 \cdot x_t + b_1 \cdot x_{t-1} + \ldots + b_p \cdot x_{t-p} + \varepsilon_t \quad (*)$$

Предположим, что в исследуемой модели имеет место *полиномиальная структура лага*, т. е. зависимость коэффициентов регрессии b_j от величины лага описывается *полиномом k-й степени.*

3. Лаговые модели Алмон.

Формально *модель зависимости коэффициентов b_j от величины лага j* в форме полинома можно записать так:

- для полинома первой степени $b_j = c_0 + c_1 j$;
- для полинома второй степени $b_j = c_0 + c_1 j + c_2 j^2$;
- для полинома третьей степени $b_j = c_0 + c_1 j + c_2 j^2 + c_3 j^3$ и т. д.

В наиболее *общем виде* для полинома k-й степени имеем:

$$b_j = c_0 + c_1 j + c_2 j^2 + \ldots + c_k j^k.$$

Тогда каждый из коэффициентов b_j модели (*) можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned}
b_0 &= c_0; \\
b_1 &= c_0 + c_1 + \ldots + c_k; \\
b_2 &= c_0 + 2\,c_1 + 4\,c_2 + \ldots + 2^k\,c_k; \\
b_3 &= c_0 + 3\,c_1 + 9\,c_2 + \ldots + 3^k\,c_k; \\
&\vdots \\
b_l &= c_0 + l\,c_1 + l^2\,c_2 + \ldots + l^k\,c_k.
\end{aligned}$$

3. Лаговые модели Алмон.

Подставив в (*) найденные соотношения для b_j, получим:

$$y_t = a + c_0 \cdot x_t + (c_0 + c_1 + \ldots + c_k) \cdot x_{t-1} + (c_0 + 2 \cdot c_1 + 4 \cdot c_2 + \ldots + 2^k \cdot c_k) \cdot x_{t-2} + (c_0 + 3 \cdot c_1 + 9 \cdot c_2 + \ldots + 3^k \cdot c_k) \cdot x_{t-3} + \ldots + (c_0 + l \cdot c_1 + l^2 \cdot c_2 + \ldots + l^k \cdot c_k) \cdot x_{t-l} + \varepsilon_t.$$

Перегруппируем слагаемые в уравнении выше:

$$y_t = a + c_0 \cdot (x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + \ldots + x_{t-l}) + c_1 \cdot (x_{t-1} + 2 \cdot x_{t-2} + 3 \cdot x_{t-3} + \ldots + l \cdot x_{t-l}) + c_2 \cdot (x_{t-1} + 4 \cdot x_{t-2} + 9 \cdot x_{t-3} + \ldots + l^2 \cdot x_{t-l}) + \ldots + c_k \cdot (x_{t-1} + 2^k \cdot x_{t-2} + 3^k \cdot x_{t-3} + \ldots + l^k \cdot x_{t-l}) + \varepsilon_t.$$

Обозначим слагаемые в скобках при c_i, как *новые переменные*:

$$z_0 = x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + \ldots + x_{t-l} = \sum_{j=0}^{l} x_{t-j};$$

$$z_1 = x_{t-1} + 2 \cdot x_{t-2} + 3 \cdot x_{t-3} + \ldots + l \cdot x_{t-l} = \sum_{j=1}^{l} j \cdot x_{t-j};$$

$$z_2 = x_{t-1} + 4 \cdot x_{t-2} + 9 \cdot x_{t-3} + \ldots + l^2 \cdot x_{t-l} = \sum_{j=1}^{l} j^2 \cdot x_{t-j};$$

....

$$z_k = x_{t-1} + 2^k \cdot x_{t-2} + 3^k \cdot x_{t-3} + \ldots + l^k \cdot x_{t-l} = \sum_{j=1}^{l} j^k \cdot x_{t-j}.$$

3. Лаговые модели Алмон.

Перепишем модель (*) с учетом соотношений для переменных $z_0, \ldots, z_k$:

$$y_t = a + c_0 \cdot z_0 + c_1 \cdot z_1 + c_2 \cdot z_2 + \ldots + c_k \cdot z_k + \varepsilon_t. \quad (**)$$

Рассчитав параметры c_i в модели (**) с помощью *классического МНК* можно затем определить *коэффициенты b_i модели с распределенным лагом* (используя формулы для b_i).

Проблемы применения метода Алмон:

1. величина лага p должна быть *известна заранее* (лучше исходить из максимально возможного лага);
2. необходимо установить *степень полинома k* (обычно ограничиваются рассмотрением полиномов 2-й и 3-й степени);
3. переменные z будут *коррелировать между собой* в случаях, когда наблюдается высокая связь между исходными переменными x; поэтому оценку параметров модели (*) приходится проводить в условиях *мультиколлинеарности факторов*.

4. Метод Койка.

Метод Койка используется для оценки параметров модели с распределенным лагом *с бесконечным лагом* вида:

$$y_t = a + b_0 \cdot x_t + b_1 \cdot x_{t-1} + b_2 \cdot x_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t \quad (1)$$

При этом используется допущение о ***геометрической структуре*** лага - такой структуры, когда воздействия лаговых значений фактора на результат *уменьшаются с увеличением величины лага в геометрической прогрессии.*

Койк предположил, что существует некоторый ***постоянный темп*** *уменьшения во времени лаговых воздействий фактора на результат* - $\lambda \ (0 < \lambda < 1)$. Тогда для коэффициентов модели (1) справедливо (j – номер лага):

$$b_j = b_0 \cdot \lambda^j; \;\; j = 0, 1, 2, \ldots, \;\; 0 < \lambda < 1 .$$

4. Метод Койка.

Выразим с помощью формулы для b_j все коэффициенты в модели (1) через b_0 и λ :

$$y_t = a + b_0 \cdot x_t + b_0 \cdot \lambda \cdot x_{t-1} + b_0 \cdot \lambda^2 \cdot x_{t-2} + \ldots + \varepsilon_t. \quad \textbf{(2)}$$

Тогда для периода t-1 модель (2) можно записать так – модель **(3)**:

$$y_{t-1} = a + b_0 \cdot x_{t-1} + b_0 \cdot \lambda \cdot x_{t-2} + b_0 \cdot \lambda^2 \cdot x_{t-3} + \ldots + \varepsilon_{t-1}.$$

Умножим обе части модели (3) на λ , получим модель **(4)**:

$$\lambda \cdot y_{t-1} = \lambda \cdot a + b_0 \cdot \lambda \cdot x_{t-1} + b_0 \cdot \lambda^2 \cdot x_{t-2} + b_0 \cdot \lambda^3 \cdot x_{t-3} + \ldots + \lambda \cdot \varepsilon_{t-1}.$$

Вычтем найденное соотношение (4) из соотношения (2):

$$y_t - \lambda \cdot y_{t-1} = a - \lambda \cdot a + b_0 \cdot x_t + \varepsilon_t - \lambda \cdot \varepsilon_{t-1}. \quad \textbf{(5)}$$

В результате преобразований (5) получаем **модель Койка:**

$$y_t = a \cdot (1 - \lambda) + b_0 \cdot x_t + \lambda \cdot y_{t-1} + u_t$$

где $u_t = \varepsilon_t - \lambda \cdot \varepsilon_{t-1}.$

4. Метод Койка.

Полученная модель Койка – *двухфакторная модель авторегрессии.*

Как правило, такая модель решается *методом инструментальной переменной*, а затем с помощью формулы

$$b_j = b_0 \cdot \lambda^j; \ \ j = 0, 1, 2, \ldots, \ \ 0 < \lambda < 1$$

определяются параметры b_1, b_2, … исходной модели с распределенным лагом.

Описанное выше т.н. ***«преобразования Койка»*** *позволяет перейти от модели с бесконечными распределенными лагами к модели авторегрессии*, содержащей две независимые переменные x_t, и y_{t-1}.

5. Оценка параметров моделей авторегрессии методом инструментальной переменной.

См. лабораторную работу №7 (изучить самостоятельно)

6. Модели адаптивных ожиданий. Модели частичной корректировки.

1) Рассмотрим решение **модели адаптивных ожиданий** вида:

$$y_t = a + b \cdot x^*_{t+1} + \varepsilon_t, \qquad (1)$$

где y_t – фактическое значение результативного признака;

x^*_{t+1} – ожидаемое значение факторного признака.

Механизм *формирования ожиданий* в этой модели следующий:

$$x^*_{t+1} = \alpha \cdot x_t + (1 - \alpha) \cdot x^*_t, \quad \text{где } 0 < \alpha < 1. \qquad (2)$$

Т.о., *ожидаемое значение факторной переменной* x_t^* в период t - это *средняя арифметическая взвешенная* ее фактического и ожидаемого значений в предыдущий период.

Подставим в модель (1) вместо x_{t+1}^* соотношение (2):

$$\begin{aligned} y_t &= a + b \cdot (\alpha \cdot x_t + (1 - \alpha) \cdot x^*_t) + \varepsilon_t = \\ &= a + \alpha \cdot b \cdot x_t + (1 - \alpha) \cdot b \cdot x^*_t + \varepsilon_t. \end{aligned} \qquad (3)$$

6. Модели адаптивных ожиданий. Модели частичной корректировки.

Если модель (1) имеет место для периода t, то она будет иметь место и для периода t-1. Таким образом, в период t-1 получим:

$$y_{t-1} = a + b \cdot x^*_t + \varepsilon_{t-1}. \quad \textbf{(4)}$$

Умножим (4) на $(1-\alpha)$:

$$(1-\alpha) \cdot y_{t-1} = (1-\alpha) \cdot a + (1-\alpha) \cdot b \cdot x^*_t + (1-\alpha) \cdot \varepsilon_{t-1}. \quad \textbf{(5)}$$

Вычтем почленно (5) из (3):

$$y_t - (1-\alpha) \cdot y_{t-1} = a - (1-\alpha) \cdot a + \alpha \cdot b \cdot x_t + \varepsilon_t - (1-\alpha) \cdot \varepsilon_{t-1}$$

или модель **(6)**:

$$y_t = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b \cdot x_t + (1-\alpha) \cdot y_{t-1} + u_t, \quad u_t = \varepsilon_t - (1-\alpha) \cdot \varepsilon_{t-1}.$$

В модели авторегрессии (6), определив ее параметры, можно легко ***перейти к исходной*** ***модели адаптивных ожиданий (1)*** и определить ее параметры a и b .

6. Модели адаптивных ожиданий. Модели частичной корректировки.

2) Рассмотрим решение ***модели частичной корректировки:***

$$y^*_t = a + b \cdot x_t + \varepsilon_t. \quad (7)$$

Механизм *формирования ожиданий* в этой модели следующий:

$$y_t = \beta \cdot y^*_t + (1-\beta) y_{t-1} + v_t. \quad \text{где } 0 < \beta < 1. \quad (8)$$

Т.о., *фактическое значение результата текущего периода y_t* - это *средняя арифметическая взвешенная* его ожидаемого значения текущего периода y_t^* и фактического значения за предыдущий период времени y_{t-1}.

Подставим уравнение (7) в выражение для y_t (8) и получим:

$$y_t = \beta \cdot (a + b \cdot x_t + \varepsilon_t) + (1-\beta) \cdot y_{t-1} = \beta \cdot a + \beta \cdot b \cdot x_t + \\ + (1-\beta) \cdot y_{t-1} + u_t, \quad (9)$$

где $u_t = \beta \cdot \varepsilon_t + v_t.$ - решаем это уравнение авторегрессии, *затем находим параметры a и b уравнения (7)*

Вопросы изученные в Теме 8:

1) **Динамические эконометрические модели. Основные понятия.**
2) **Интерпретация параметров моделей с распределенным лагом и моделей авторегрессии.**
3) **Лаговые модели Алмон.**
4) **Метод Койка.**
5) **Оценка параметров моделей авторегрессии методом инструментальной переменной.**
6) **Модели адаптивных ожиданий. Модели частичной корректировки.**