Лекция № 7
Динамические характеристики измерительных систем

Импульсной характеристикой стационарной измерительной системы, описываемой оператором T, называют функцию $g(t)$, являющуюся откликом системы на входной сигнал в виде дельта-функции:

$$g(t) = T\delta(t)$$

Поскольку в частотной области связь между спектральными плотностями сигналов на входе и выходе и частотной характеристикой системы описывается выражением:

$$S_g(j\omega) = K(j\omega)S_\delta(j\omega),$$

то с учетом:

$$S_\delta(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt = 1,$$

$$S_g(j\omega) = K(j\omega).$$

Динамические характеристики измерительных систем

Импульсная характеристика системы

Частотная характеристика и импульсная характеристика линейной стационарной системы связаны между собой прямым и обратным преобразованиями Фурье:

$$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S_g(j\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega)e^{j\omega t}d\omega\,,$$

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt\ .$$

Зная функцию $K(j\omega)$, всегда можно определить импульсную характеристику и наоборот. Таким образом, любую систему можно рассматривать либо во временной области с помощью ее импульсной характеристики, либо в частотной области, анализируя $K(j\omega)$.

Динамические характеристики измерительных систем

Переходная характеристика системы

Если на вход линейной стационарной системы, описываемой оператором T, воздействует сигнал, отображаемый единичной функцией (функцией Хевисайда) $1(t)$, то выходную реакцию $h(t) = T\left[1(t)\right]$ называют *переходной характеристикой системы.*

Можно показать, что между импульсной и переходной характеристиками имеется тесная связь – импульсная характеристика является производной от переходной характеристики:

$$g(t) = \frac{dh(t)}{dt} .$$

Динамические характеристики измерительных систем

Если входной сигнал представить в виде:

$$u_{вх}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u_{вх}(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\ ,$$

То отвечающая ему выходная реакция линейной стационарной системы запишется:

$$u_{вых}(t)=Tu_{вх}(t)=T\int_{-\infty}^{\infty}u_{вх}(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\ .$$

Учитывая, что оператор T воздействует лишь на величины, зависящие от текущего времени t, но не от переменной интегрирования τ, получаем:

$$u_{вых}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}u_{вх}(\tau)T\delta(t-\tau)d\tau\ .$$

Динамические характеристики измерительных систем

Интеграл Дюамеля

Соотношение, называемое интегралом Дюамеля, имеет вид:

$$u_{вых}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_{вх}(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Соотношение показывает, что выходной сигнал линейной стационарной системы представляет собой *свертку двух функций:* входного сигнала и импульсной характеристики системы. Для реальных систем (физически реализуемых) всегда выполняется условие: $g(t-\tau)=0$ при $t<\tau$, так как реакция такой системы на входное воздействие не может опережать само входное воздействие.

Следовательно, можно записать интеграл Дюамеля в виде:

$$u_{вых}(t) = \int_{0}^{t} u_{вх}(\tau)g(t-\tau)d\tau$$

Динамические характеристики измерительных систем

Передаточная функция системы

Решение дифференциального уравнения линейной системы, связывающего входные воздействия и выходные сигналы, может быть осуществлено *операторным методом* с помощью интегрального преобразования Лапласа.

Изображение по Лапласу входного и выходного сигналов имеет вид:

$$L\left[u_{вх}(t)\right]=U_{вх}(p)=\int_0^\infty u_{вх}(t)e^{-pt}dt; \quad L\left[u_{вых}(t)\right]=U_{вых}(p)=\int_0^\infty u_{вых}(t)e^{-pt}dt$$

Вычислив преобразование Лапласа от обеих частей дифференциального уравнения линейной системы, получим:

$$U_{вых}(p)\left[a_0+a_1p+a_2p^2+\ldots+a_np^n\right]=$$

$$U_{вх}(p)\left[b_0+b_1p+b_2p^2+\ldots+b_mp^m\right].$$

Динамические характеристики измерительных систем

Передаточная функция системы

Введем отношение изображений по Лапласу выходного и входного сигналов, называемое *передаточной функцией* или *операторным коэффициентом передачи* системы:

$$H(p) = \frac{U_{вых}(p)}{U_{вх}(p)} = \frac{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots + b_m p^m}{\left[a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \ldots + a_n p^n\right]}$$

Если передаточная функция системы известна, то поиск выходной реакции системы на заданное входное воздействие разбивается на три этапа:

1. $u_{вх}(t) \rightarrow U_{вх}(p)$

2. $U_{вых}(p) = H(p) U_{вх}(p)$

3. $U_{вых}(p) \rightarrow u_{вых}(t)$

Динамические характеристики измерительных систем

Сигнал на выходе системы находят с помощью обратного преобразования Лапласа:

$$u_{вых}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} U_{вых}(p) e^{pt} dt = \sum_{i=1}^{n} res \left[U_{вых}(p) e^{pt} \right] \Big|_{p=p_i}$$

Как известно, способ нахождения оригинала выходного сигнала по его изображению с помощью теоремы о вычетах без вычисления интеграла основан на представлении подынтегрального выражения в виде отношения двух многочленов $\varphi(p)/\psi(p)$, определении полюсов p_i подынтегральной функции и вычислении $u_{вых}(t)$ по сумме вычетов $\varphi(p)/\psi(p)$ в соответствующих полюсах:

$$u_{вых}(t) = \sum_{i=1}^{n} res \frac{\varphi(p)}{\psi(p)} \Bigg|_{p=p_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi(p_i)}{\psi'(p_i)} .$$

Динамические характеристики измерительных систем

При определении *передаточных функций* сложных систем, состоящих из ряда отдельных звеньев (преобразователей, функциональных блоков), вначале определяют передаточные функции отдельных звеньев. Далее, если эти звенья соединены последовательно, определяют общую передаточную функцию системы по формуле:

$$H(p) = \prod_{i=1}^{n} H_i(p) \ ,$$

где $H_i(p)$ - передаточные функции отдельных звеньев.

Если звенья какой-либо системы соединены параллельно, то расчет результирующей передаточной функции этой части системы осуществляют по формуле:

$$H(p) = \sum_{i=1}^{k} H_i(p)$$

Динамические характеристики измерительных систем

Пример. *Определить форму сигнала на выходе кремниевого диффузионного детектора, вызванного регистрацией α- частицы, создавшей заряд q_0 в рабочем объеме детектора.*

Дифференциальное уравнение цепи, полученное из анализа эквивалентной схемы детектора, имеет вид:

$$C_Э \frac{du(t)}{dt} + \frac{u(t)}{R_H} = I_0(t),$$

где R_H - резистор, включаемый в цепь для управления длительностью импульса; $C_Э$ - эквивалентная емкость, равная сумме собственной емкости детектора, входной емкости усилителя и емкости соединительного кабеля.

В операторном виде уравнение записывается так:

$$\frac{u(p)}{R_H} + pC_Э u(p) = i_0(p) \; .$$

Динамические характеристики измерительных систем

При условии локализации ионизационного эффекта при регистрации α-частицы и пренебрежимо малом времени собирания носителей зарядов импульс тока можно представить в виде: $I_0(t) = q_0 \delta(t)$.

Так как $L[\delta(t)] = 1$, уравнение в операторном виде запишется:

$$u(p) = \frac{q_0 R_H}{1 + p\tau_0}$$

Вычисляя оригинал выходного сигнала по его изображению, получим:

$$u_{вых}(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_1 - j\infty}^{\sigma_1 + j\infty} \frac{q_0 R_H}{1 + p\tau_0} e^{pt} dt = q_0 R_H \sum_{p = p_0} res \left[\frac{e^{pt}}{1 + p\tau_0} \right] \Bigg|_{p_0 = -1/\tau_0} =$$

$$= q_0 R_H \frac{e^{-t/\tau_0}}{\tau_0} = \frac{q_0}{C_Э} e^{-t/\tau_0}.$$