Динамическое описание информационных систем

Выполнил: Шестаков Антон
ИС-32

- **Динамическая система** — математическая абстракция, предназначенная для описания и изучения систем, эволюционирующих с течением времени.
- Система, которая развивается (эволюционирует) с течением времени

Основные понятия

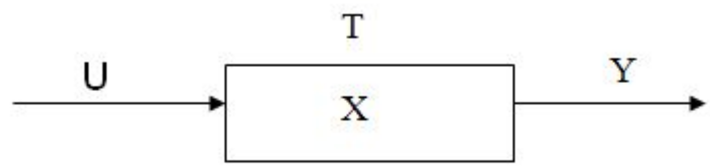
- Процесс функционирования системы - изменение состояния системы под действием внутренних и внешних причин.
- Фазовое пространство - множество всех возможных состояний системы в фиксированный момент времени.
- Эволюция системы - движение точки фазового пространства.
- Фазовая траектория - кривая, описываемая точкой фазового пространства.

Детерминированность

- Динамической системе приписывается важное свойство **детерминированности**: зная состояние системы в начальный момент времени, мы можем однозначно предсказать все ее дальнейшее поведение.

Описание системы

- Определим динамическую систему в виде отношения на множествах U, Y, T, X.



- Множества U и Y представляет воздействия на систему внешней среды и ее реакции. Далее будем их называть входными и выходными переменными. Множество T представляет множество t0, t1, t2, …множеств времени в интервале наблюдения.

- Множество моментов времени Т может быть представлено в виде:

1) Интервала вещественной прямой (тогда говорят, что время непрерывно «потоки»);

   вид: гладкая кривая

2) Множества целых или натуральных чисел (дискретное время «каскад»).

   вид: множеством точек, и называется обычно орбитой

- Несмотря на внешнее различие, между системами с непрерывным и дискретным временем имеется тесная связь: многие свойства являются общими для этих классов систем или легко переносятся с одного на другой.

Процесс переходов системы в фазовом пространстве состояний

- Пусть в начальный момент наблюдения t_0 система находилась в некотором состоянии, который будем называть начальное состояние Xt_0.
- Множество всех возможных начальных состояний есть декартовое произведение $t_0 * X$.
- Множество всех возможных входных сигналов в моменты времени t_1, t_2,… тоже есть декартово произведение $T * U$.

- Множество всех возможных переходов системы в интервале наблюдения под воздействием входных сигналов представляет соотношение вида:

$$(t_0 * X) * (T * U) * X \qquad (1)$$

- Математическую модель процесса переходов системы в фазовом пространстве, наблюдаемого во времени, можно записать в следующем виде:

$$X_t = P\{Xt_0, X, U\} \quad (2),$$

- где P – оператор перехода системы в фазовом пространстве состояний.

- Выходная реакция системы в любой момент времени определяется состоянием системы в этот момент времени.
- Поэтому справедливо следующее соотношение:

$$Y_t = G\{X_t\} \qquad (3)$$

- Таким образом, динамическая система представляет собой множество

$$S = (P, G, U, Y, X, T) \qquad (4)$$

- Описания динамических систем для задания закона эволюции также разнообразны: с помощью дифференциальных уравнений, дискретных отображений, теории графов, теории марковских цепей и т.д.
- Выбор одного из способов описания задает конкретный вид математической модели динамической системы

Кинематическая интерпретация системы дифференциальных уравнений

- Рассмотрим динамические системы, моделируемые конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений.
- Применительно к таким системам сохранились представления и терминология, первоначально возникшие в механике.
- В рассматриваемом случае для определения динамической системы необходимо указать объект, допускающий описание состояния заданием величин $x_1, x_2, \ldots, x_N$ в некоторый момент времени $t = t_0$. Величины x_i могут принимать произвольные значения, причем двум различным наборам величин x_1 и x_2 отвечают два разных состояния.
- Закон эволюции динамической системы во времени записывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = \dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, ..., x_N), i = 1, 2, ..., N \quad (5)$$

Если рассматривать величины x_1, x_2, ..., x_N как координаты точки x в N-мерном пространстве, то получается наглядное геометрическое представление состояния динамической системы в виде этой точки, которую называют изображающей, а чаще фазовой точкой, а пространство состояний — фазовым пространством динамической системы.

Изменению состояния системы во времени отвечает движение фазовой точки вдоль некоторой линии, называемой фазовой траекторией.

В фазовом пространстве системы уравнениями (5) определяется векторное поле скоростей, сопоставляющее каждой точке x выходящий из нее вектор скорости F(x), компоненты которого даются правыми частями уравнений (5):

$$[f_1(x_1, x_2, ..., x_N), f_2(x_1, x_2, ..., x_N), ..., f_N(x_1, x_2, ..., x_N)]. \quad (6)$$

- Динамическая система (5) может быть записана в векторной форме:

$$\dot{x} = F(x),$$

где $F(x)$ — вектор-функция размерности N.

- Необходимо уточнить взаимосвязь понятий числа степеней свободы и размерности фазового пространства динамической системы.
- Под <u>числом степеней свободы</u> понимается наименьшее число независимых координат, необходимых для однозначного определения состояния системы.
- Под <u>координатами</u> первоначально понимались именно пространственные переменные, характеризующие взаимное расположение тел и объектов.
- В то же время для однозначного решения соответствующих уравнений движения необходимо помимо координат задать соответствующие начальные значения импульсов или скоростей. В связи с этим система с n степенями свободы характеризуется фазовым пространством в два раза большей размерности ($N = 2n$).

Общие свойства динамической системы

- Наиболее общими свойствами динамических систем являются *устойчивость* и *управляемость*.

Устойчивость динамических систем

- Пусть множество входных U воздействий содержат элементы в интервале ($\cdot\, k = \overline{1,k}$ $+\infty$) и пусть p = {p_k, } семейство операторов перехода, которые при заданном множестве входных воздействий U реализуют полное множество X состояний системы.

$$(X) = M_1 \cdot M_2 \cdot \ldots \cdot M_N \cdot$$

- Реальный объект имеет вполне определенный оператор переходов P_k и находится под воздействием определенного множества входных сигналов U. Если для заданных U и $P_к$ существует соотношение:

$$U_t = p_k\{(t_0, t), U_{t_0}, X\},$$

то множество $U_{t_0}, U_{t_1}, \ldots, U_t$ на любом интервале наблюдения является замкнутым, а система:

$$S = \{p_k, G, U, Y, T\}$$

<u>устойчивой</u> относительно множества входных воздействий U.

Управляемость динамических систем

- В общем случае задача управления формируется в следующем виде:
- Известно множество входных сигналов U, и семейство операторов перехода P и выходов G.
- Задано необходимое значение выхода Y_t в момент времени t.
- Найти управляющее воздействие $u \in U$ обеспечивающие выбор операторов перехода $p \in P$ и выхода $g \in G$ обеспечивающие необходимое y_t.
- Достижение цели управления обеспечивается выбором операторов p и q.

- Система является управляемой, если для заданных $U^t \subset U$ и $X^t \subset X$, существуют такие $U^{t_0} \subset U$, что существуют $p(X, U^t) \subset P$ или $g(X^t y^t)$.
- Отсюда следует, что управление может осуществляться начальным состоянием, операторами переходов и выходов.
- При этом задача управления сводится к следующему. Известно $u \subset U, p \subset \mathrm{P}, g \subset G$. Задано $y^t = y \subset Y$. Необходимо найти $v \subset V$ при котором

$p\left(X^t = x \subset X, U^t = u \subset U\right)$ $g\left(y^t = y \subset Y, X^t = x \subset X\right)$

- **По степени определенности динамические системы разделяются**:

1) Детерминированная система без последствий;

2) Детерминированная система с последствиями;

3) Стохастические (вероятностные) системы.

- В *детерминированной системе* по ее предыдущему состоянию и некоторой дополнительной информации можно вполне определенно предсказать ее последующее состояние.
- В *вероятностной системе* на основе такой же информации, можно предсказать лишь множество будущих состояний и определить вероятность каждого из них.