Динамическое описание систем

Фильтрация Калмана

Содержание

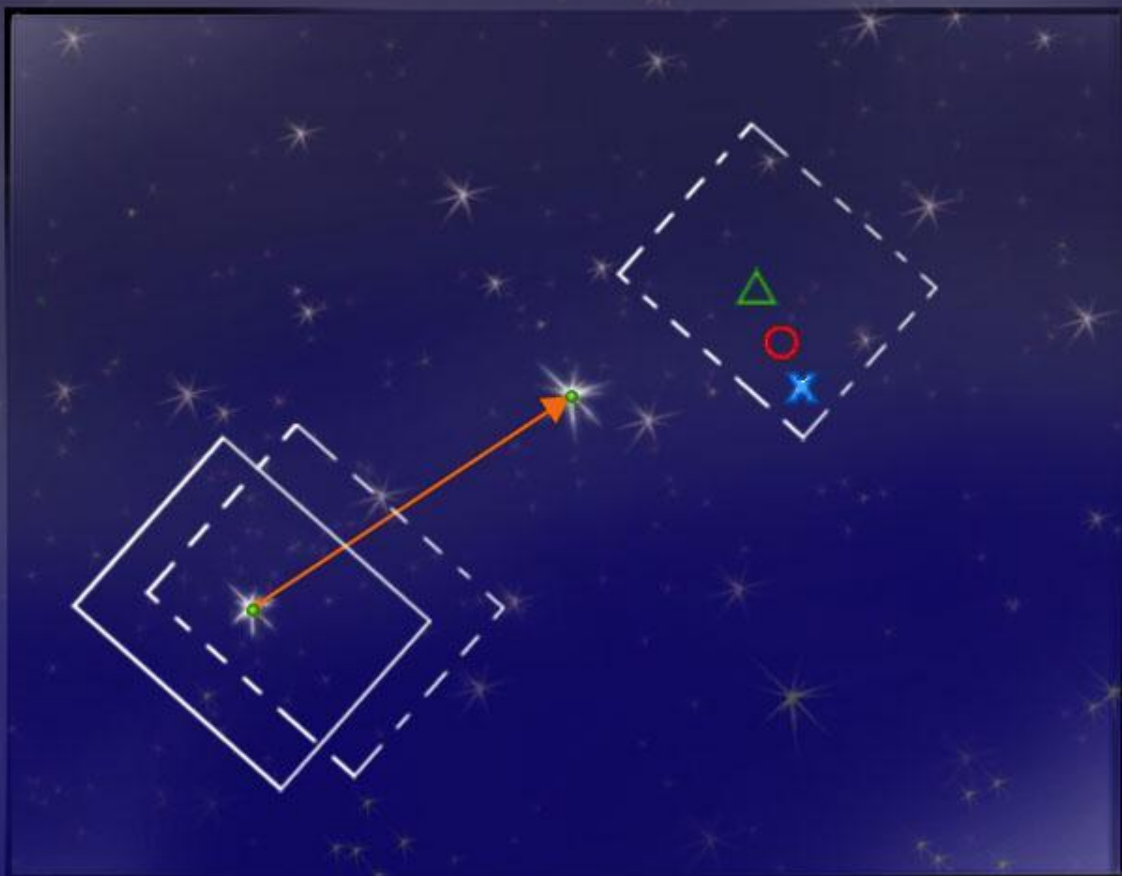


Схема обработки фильтром

ИСХ. ДАННЫЕ:

2 исходные оценки (зеленые точечки)

модель движения – вектор скорости позволяет указать центр строба

□ Δ

РЕКУРРЕНТНАЯ ОБРАБОТКА:

Очередная оценка;

Улучшенная экстраполяция,

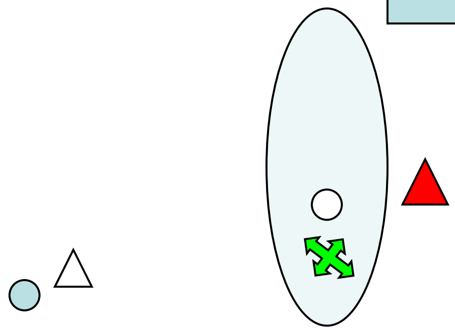
Обработка невязки

ЗАДАЧИ: уметь дать графические интерпретации

Условные обозначения и этапы обработки информации

Модель экстраполяции по опорным точкам оценок

Обработка измерений



ИЗМЕРЕНИЕ

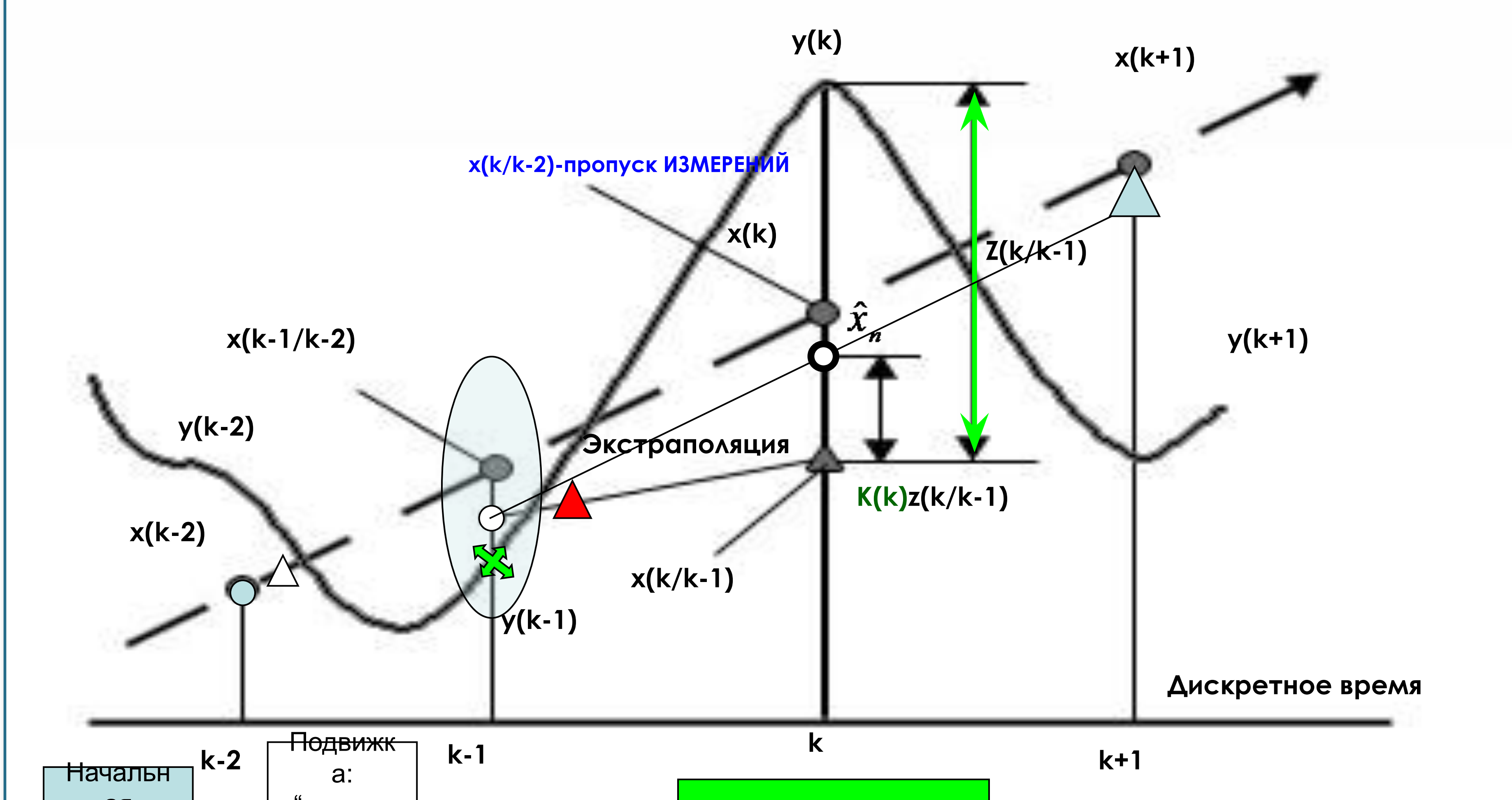
Начальная оценка

Подвижка: “экстра-поляция”

Обработка вектора невязки

Динамика обработки информ

Семантика экстраполяции по опорным точкам оценок



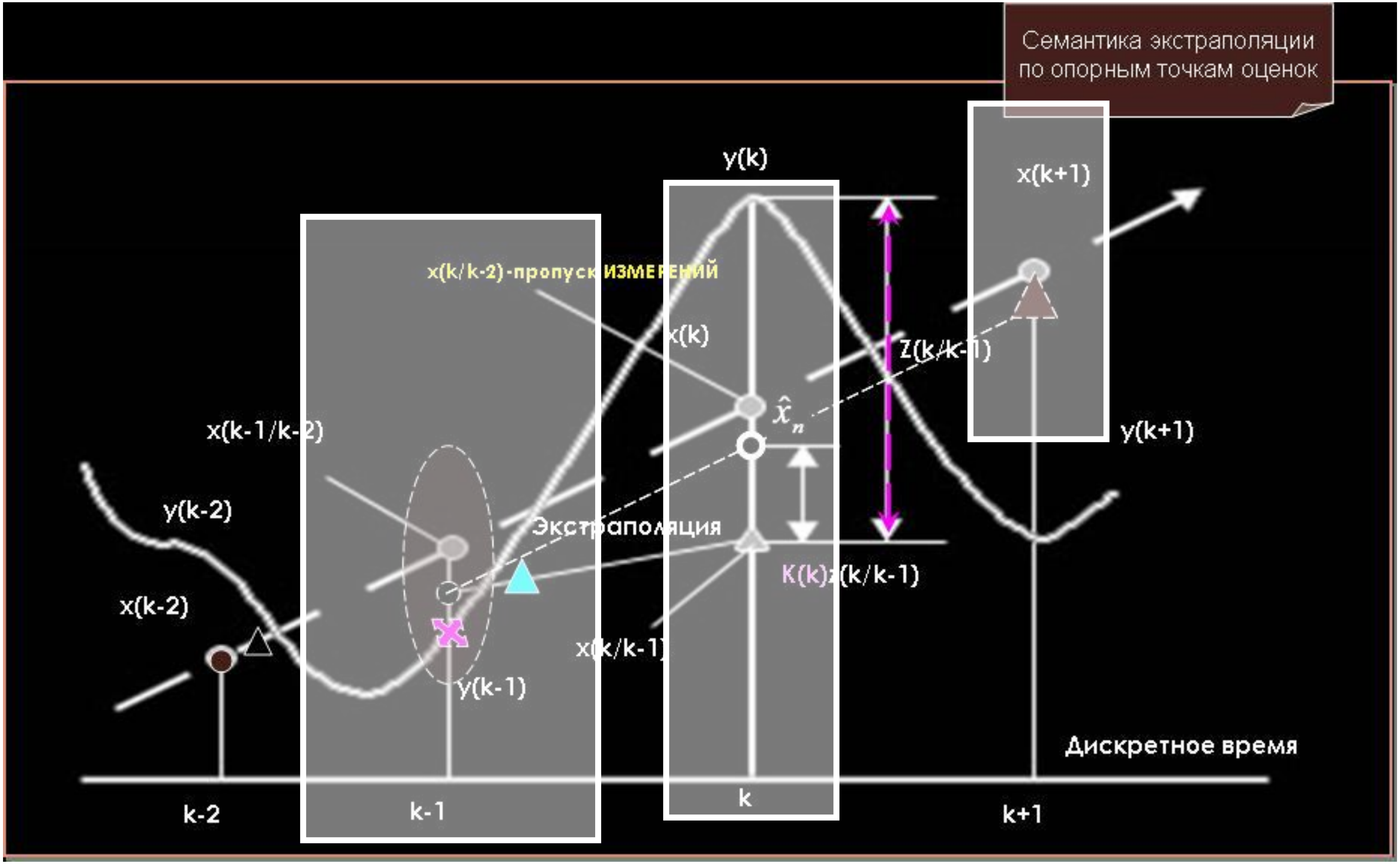
Начальная оценка

Подвижка: “экстра-поляция”

Обработка вектора невязки

Содержание

Размеры СТРОБА при пропуске измерений



Исходное описание движения в пространстве состояний в форме

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

$$y = Cx$$

От него легко перейти к передаточной функции W(p) с помощью однозначного преобразования

C (p I – A)$^{-1}$ B:

$$pX = AX + BU$$

$$X(pI - A) = BU$$

$$X = \frac{B}{(pI - A)}U = (pI - A)^{-1}BU$$

$$Y = C(pI - A)^{-1}BU$$

$$W(p) = Y/U = C(pI - A)^{-1}B$$

Итак,

$$\boxed{W(p) = \mathbf{C\,(p\,I - A)^{-1}\,B}}$$

Фильтр Калмана дает описание преобразований не в частотной, а во временной области

Фильтрация Калмана

Возможны два варианта описания динамических систем – с помощью дифференциальных или разностных уравнений.

$$\begin{cases} x_n = a x_{n-1} + \xi_n \\ y_n = x_n + \eta_n \end{cases}$$

Наш пример предполагает, что наблюдения и измерения проводятся в условиях шума. Как правило, принимается модель нормального закона распределения шума.

$$a < 1, x_n \in \Re^1$$

$$\eta_n, \xi_n \in \Re^1$$

(1) Одномерные динамические системы

Для уяснения характера математической постановки формирования оценок рассмотрим случай одномерной динамической системы. Матрица А представлена числом ***a***.

Матрица С, выделяющая наблюдаемые состояния отражена одиночным множителем ***1***

Уравнения движения и измерения имеют только по 2 слагаемых

Содержание

Задача фильтрации требует уменьшить влияние. $\boxed{\eta_n, \xi_n}$

Задачу фильтрации будем решать методом наименьших квадратов.

Вводится эмпирический риск :

$$\boxed{\rho(x_n) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)_i^{\,2} + \sum_{i=1}^{n} (x_i - a x_{i-1})_i^2 = \min(x_1, x_2 \ldots x_n)} \quad (2)$$

– классическая формулировка метода наименьших квадратов . Эмпирическим риск назван так потому, что в риск входят наблюдения.

Согласно формуле (2) требуется минимизировать риск, и следовательно уменьшить влияние шумов.

Принятая модель уравнения (1) дает возможность записать риск.

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - ax_{i-1})^2$$

Необходимо так выбрать xi, чтобы получить минимум по всей траектории. Набор оценок, соответствующий оптимальной траектории, будем обозначать

$$x_1, x_2, \ldots x_n$$

Он получается путем дифференцирования $\frac{d\rho}{dx_i} = 0$

Проделав математические операции получаем одномерный фильтр Калмана.

$$\begin{cases} \hat{x}_n = a\hat{x}_{n-1} + K_u(y_n - a\hat{x}_{n-1}) \\ K_u = \left(\dfrac{1}{K_{n-1}a^2 + \dfrac{\sigma_\xi^2}{\sigma_\eta^2}} + 1 \right)^{-1} \end{cases}$$ (3)

Фильтр Калмана

$K_1 = 1, \hat{x}_o$

– фильтр Калмана сглаживает шумы и, если шумы гауссовские, то этот фильтр является оптимальным.

$$M(\hat{x}_n - x_n)^2 = \min$$ (4)

n $\rightarrow$ **∞** $\hat{x}_n$

Формула (4) является критерием минимума среднеквадратической ошибки.

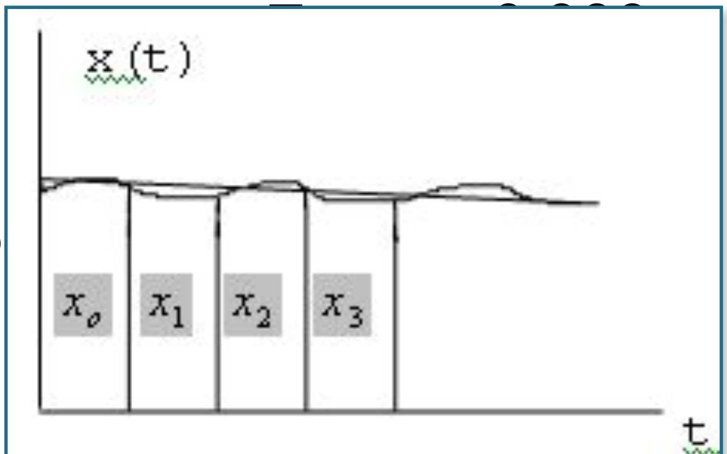
Фильтр Калмана дает оценку процесса истинного процесса для гауссовских шумов, оптимальную по критерию **(4)** – по критерию минимума среднеквадратической ошибки.

Замечание 1 : Оптимальность означает, что не существует другого фильтра, который мог бы дать такие же результаты по среднеквадратической ошибке. (Остальные фильтры дают большую ошибку)

Замечание 2 : Фильтр Калмана реализуется на ЭВМ во временной области, а не в частотной

Анализ свойств Фильтра Калмана

Фильтрация **медленных** процессов



$\sigma_{\xi}^{2} << 1$

про… медленный

$K_i \to 0$

что следует из формулы **(3)**

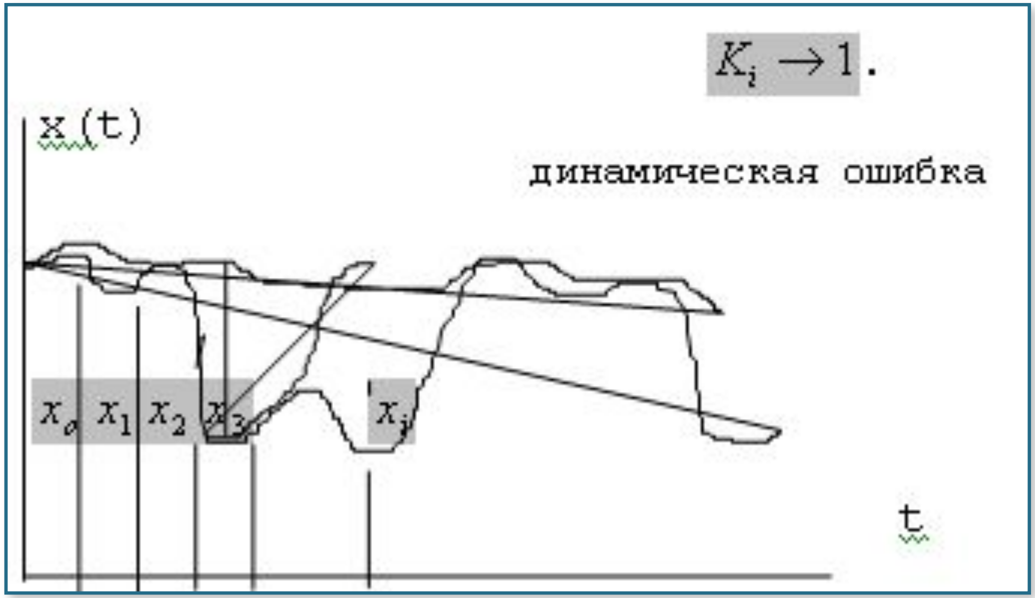
В этом случае $\boxed{\hat{x}_i = a\hat{x}_{i-1}}$ ФК осуществляет преимущественно экстраполяцию(прогноз),т.е.прошлая и текущая оценки почти одинаковы.

В таком фильтре Калмана почти полностью игнорируются наблюдения.

При оценке ситуации фильтр Калмана не доверяет наблюдениям, а доверяет лишь прошлой оценке.

Это годится для процессов, течение которых можно легко предсказать.

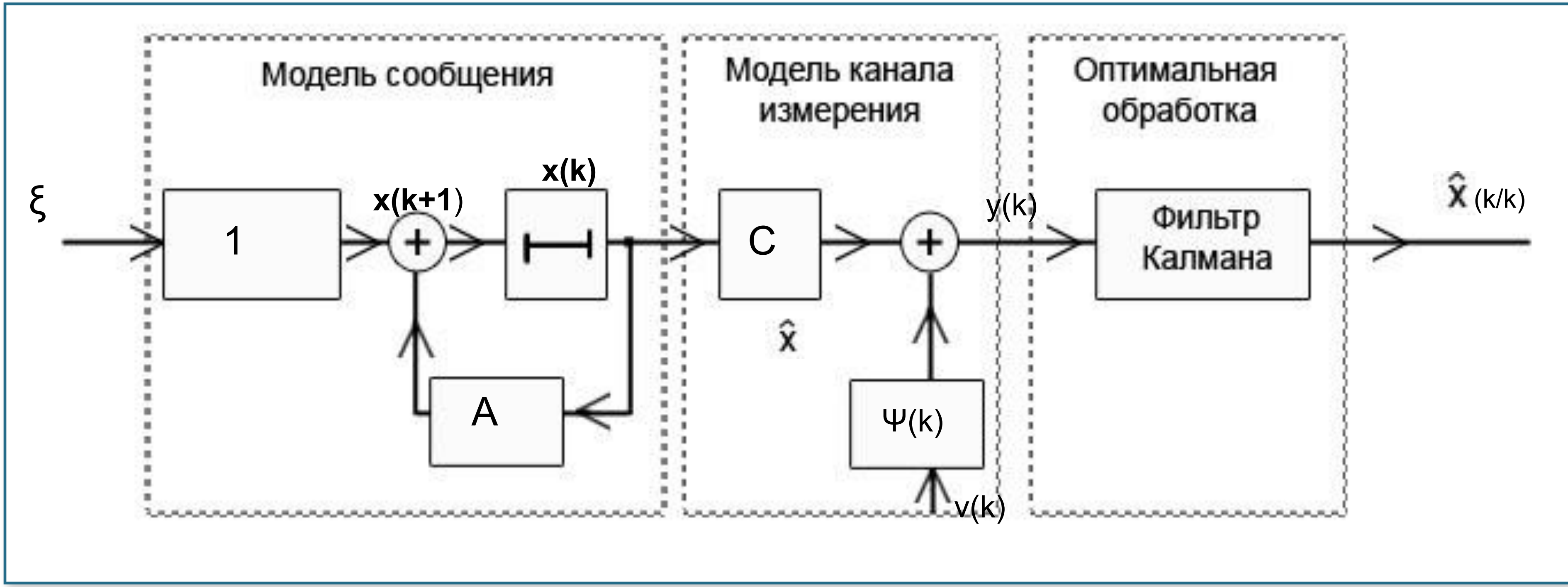
Фильтрация <u>быстрых процессов</u> $\boxed{\sigma_{\xi}^{2}}$ – большая величина (>1);



Тогда , в этом случае $\boxed{\hat{x}_i = y_i}$ (оценка) равна самим наблюдениям. Это значит, что фильтр Калмана не доверяет прошлым оценкам.

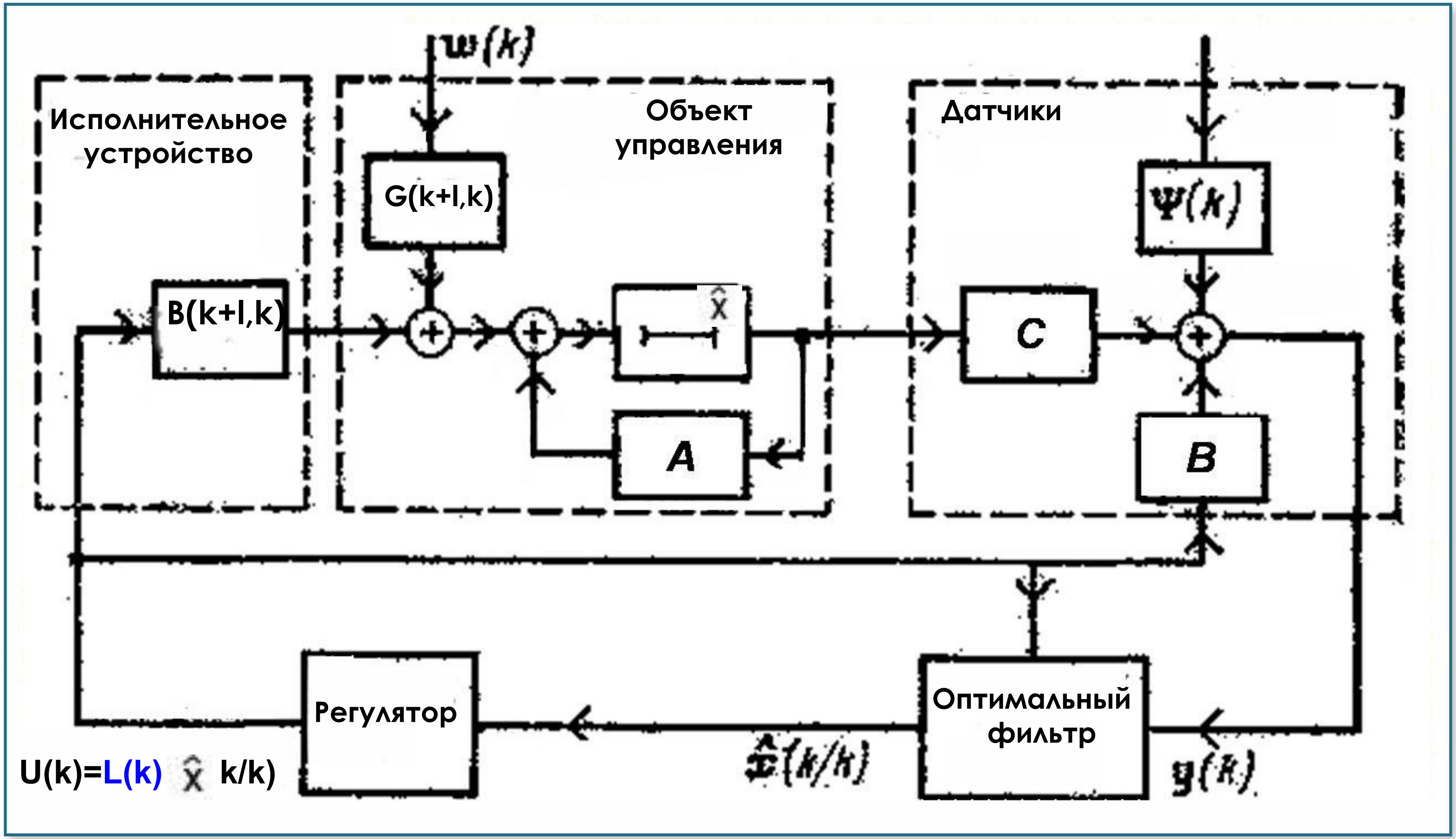
Вывод : Фильтр Калмана минимизирует и флуктуационную и динамическую ошибку.

Модель нормального функционирования системы передачи информации



В первом случае вектор состояния системы x(fe) содержит в качестве своей компоненты передаваемое сообщение. Это сообщение (например, траектория сопровождаемой цели в радиолокации) моделируется в виде случайного процесса, полученного путем пропускания белого гауссовского шума через линейный фильтр в общем случае с зависящими от времени параметрами (эти параметры определяются переходными матрицами системы и шумов возмущений). В канале измерения на сигнал, полученный путем линейного преобразования вектора состояния , аддитивно накладывается шум измерений прошедший предварительно безинерционное линейное преобразование с матрицей . Задача оптимального выделения принятого сообщения из наблюдаемого сигнала y в соответствии с критерием минимума среднего значения квадрата ошибки решается с помощью устройства оптимальной обработки, представляющего в рассматриваемом случае фильтр Калмана .

Модель системы управления



Содержание

- На выходе регулятора имеем оптимальное управление $a_{ik} = L(k)_{j.(k\backslash k),}$ где $x(f_c|f_t)$
- оптимальная оценка вектора состояния, получаемая на выходе фильтра Калмана — оператор оптимального регулятора. Основными задачами исследования ДС являются синтез алгоритмов оптимальной фильтрации и управления при известных динамических свойствах системы и заданных характеристиках канала измерения.

Одним из важных источников нарушений в ДС является канал измерения. Нарушения в канале измерения могут происходить но целому ряду причин, основными из которых являются:

- случайные пропадания информационных сигналов; появление ложных (аномальных) измерений y(k);
- резкое возрастание шумов измерений v(k) или случайное изменение их характеристик.

Использование при этих условиях алгоритмов оценивания, не учитывающих возможности появления нарушений канале измерения, приводит к существенному возрастанию ошибок фильтрации, а в задачах сопровождения целей — к срыву слежения.

Основные особенности фильтра Калмана.

- фильтр представляет собой рекуррентный, удобный для реализации на ЭВМ, алгоритм вычисления оценки состояния ДС при полностью известной ее модели;

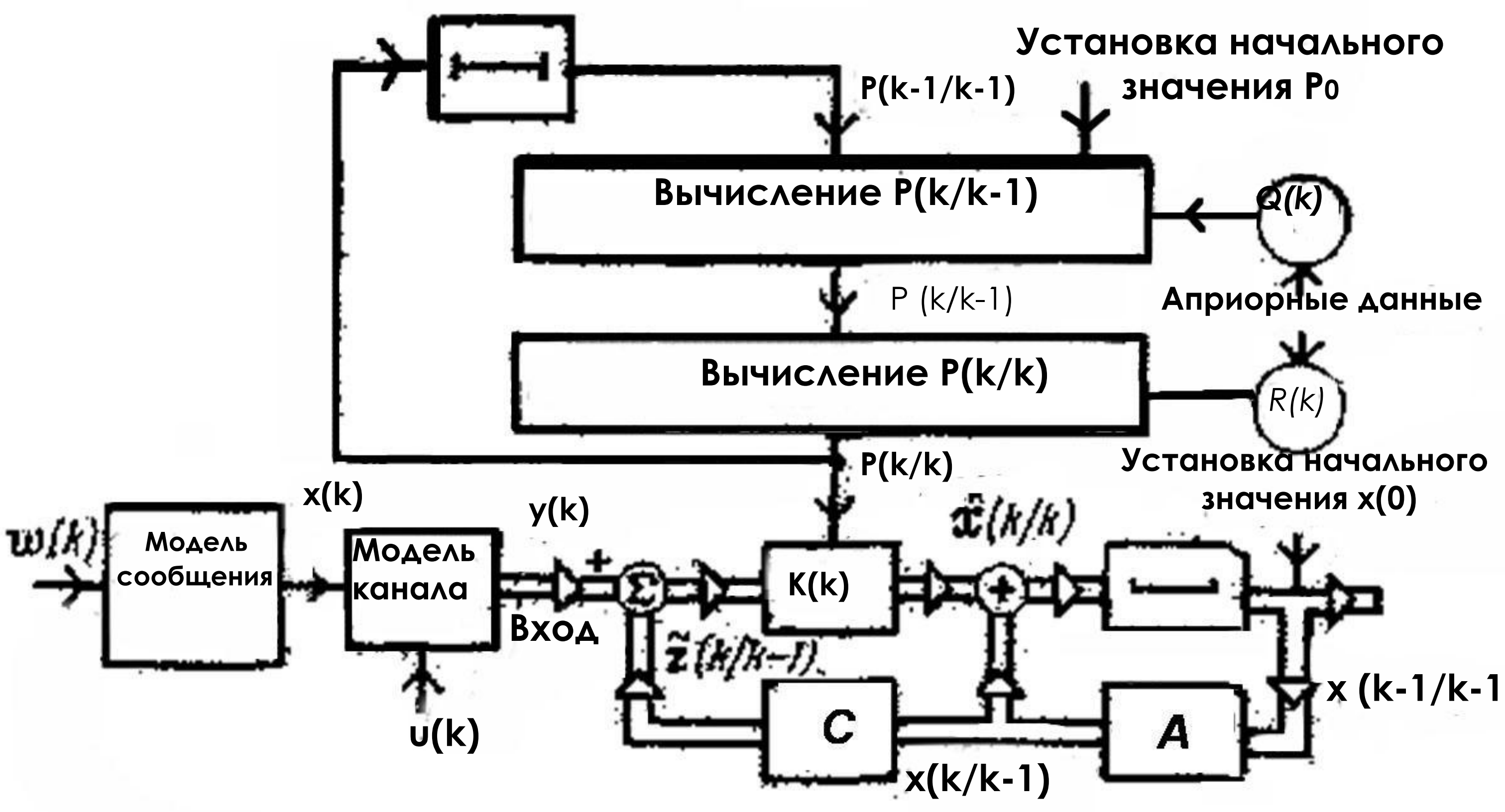
- оценка, получаемая с помощью этого фильтра, является линейной относительно наблюдений;

- корреляционная матрица ошибок фильтрации P(k/k) вследствие линейности фильтра не зависит от наблюдений y(k)и, следовательно, может быть вычислена заранее;

- алгоритмы фильтрации легко распространяются на многомерный случай(для многоканальных систем);

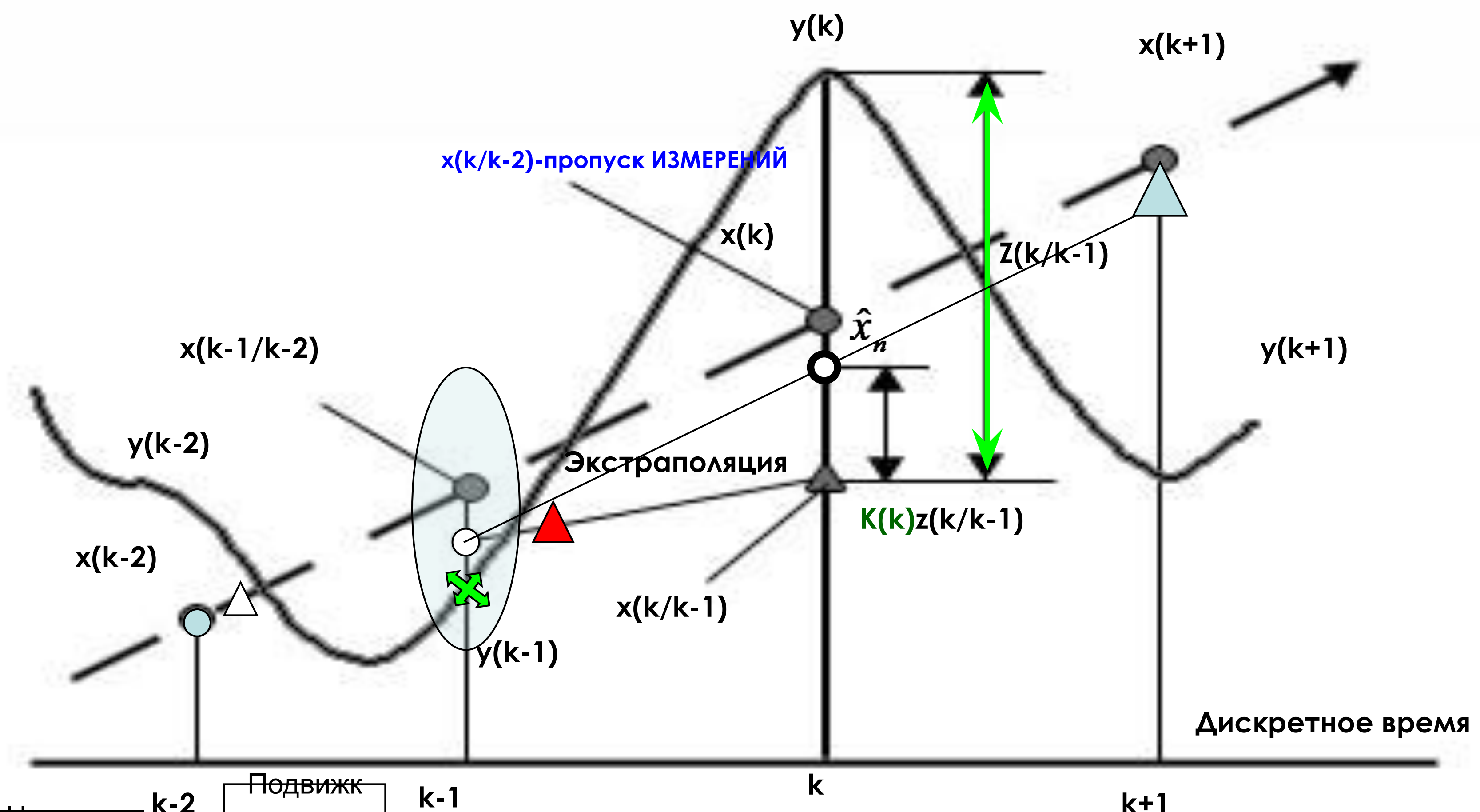
- так как параметры фильтра Калмана изменяются во времени, то такой фильтр минимизирует среднеквадратическое значение ошибки оценивания не только в установившемся режиме, но и в течение переходного процесса.

Вычислительная схема Фильтра Калмана



Динамика обработки информации

Семантика экстраполяции по опорным точкам оценок



Начальная оценка

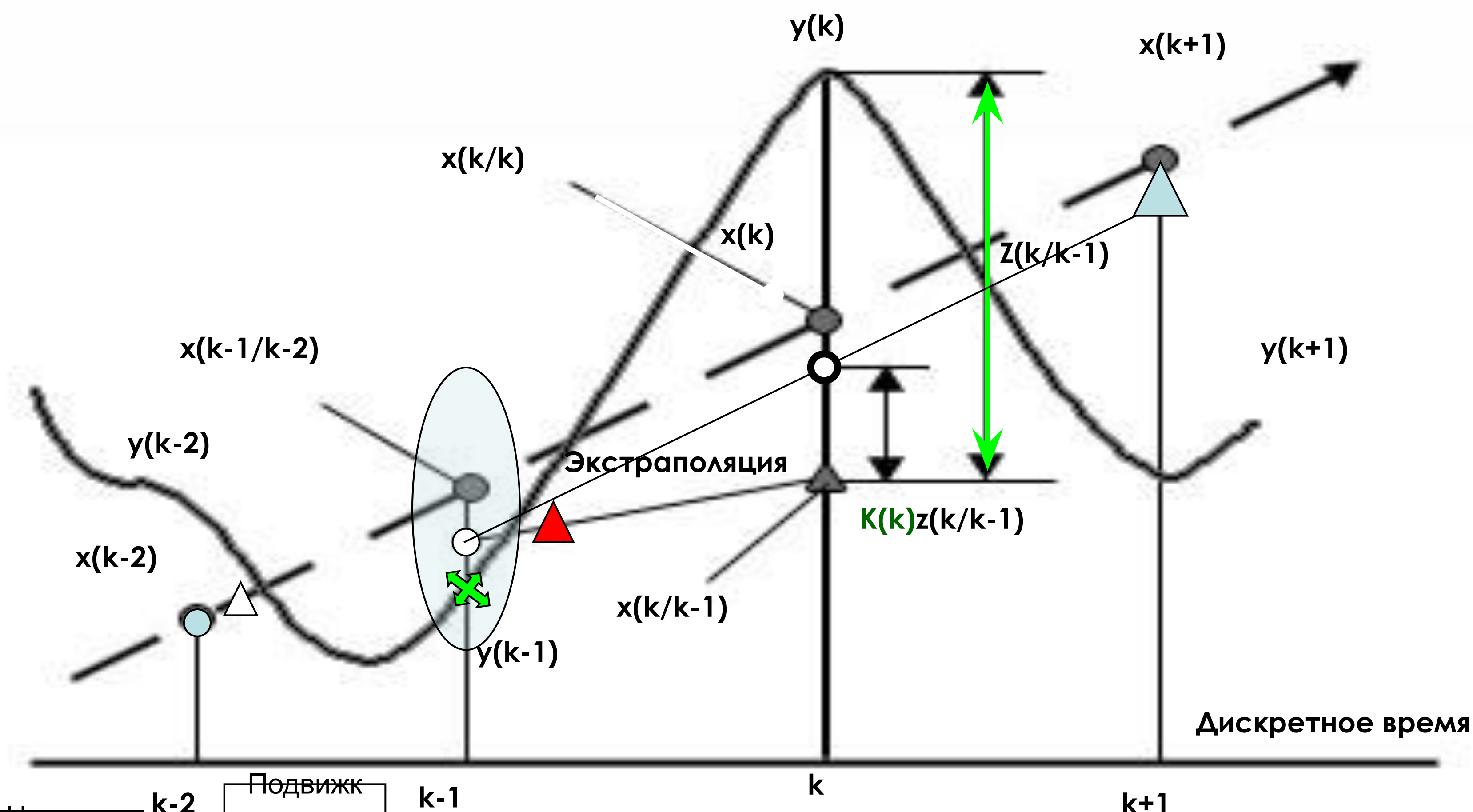
Подвижка: "экстра-поляция"

Обработка вектора невязки

Содержание

Динамика обработки информации

Семантика экстраполяции по опорным точкам оценок



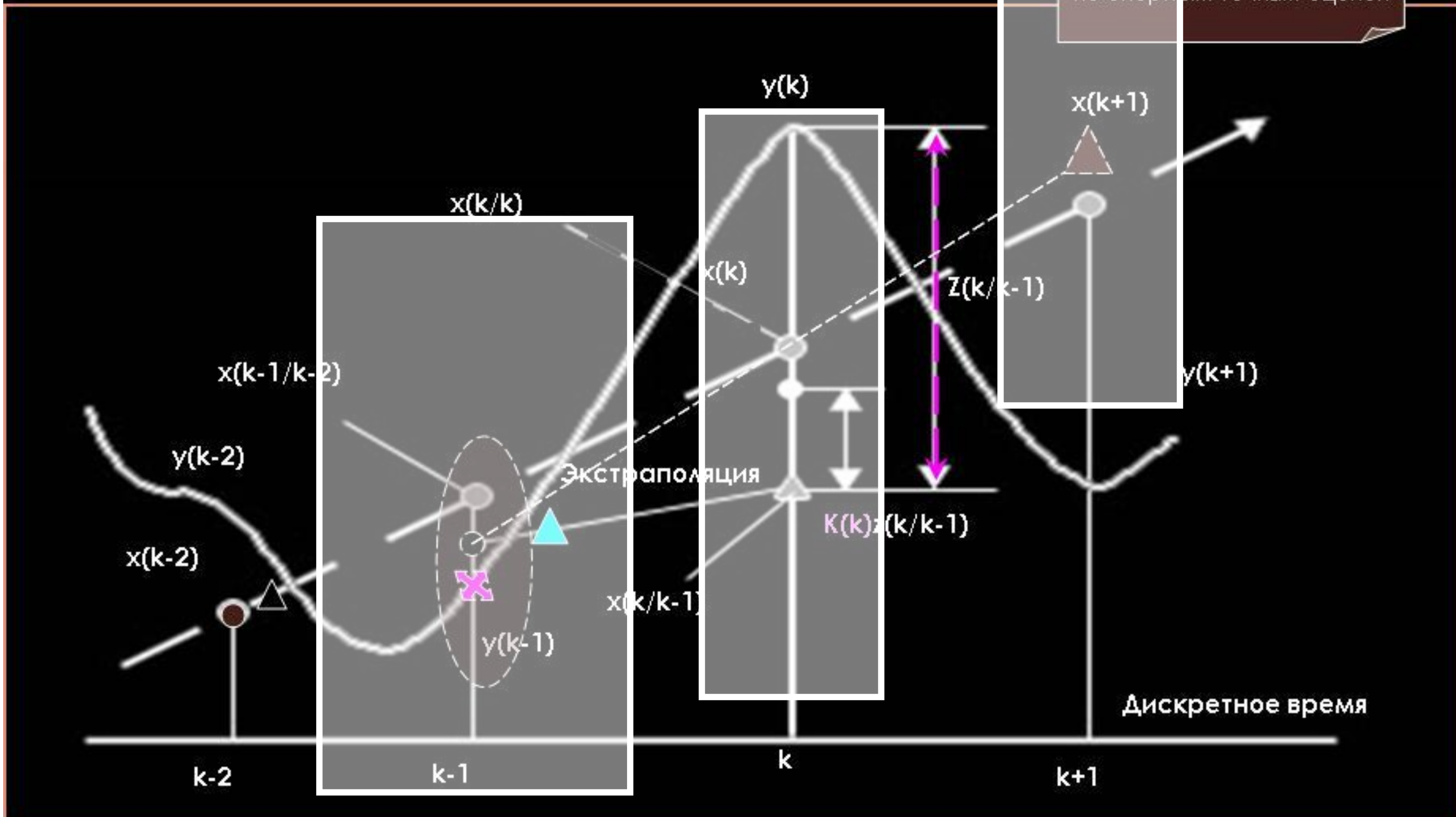
Начальная оценка

Подвижка: “экстра-поляция”

Обработка вектора невязки

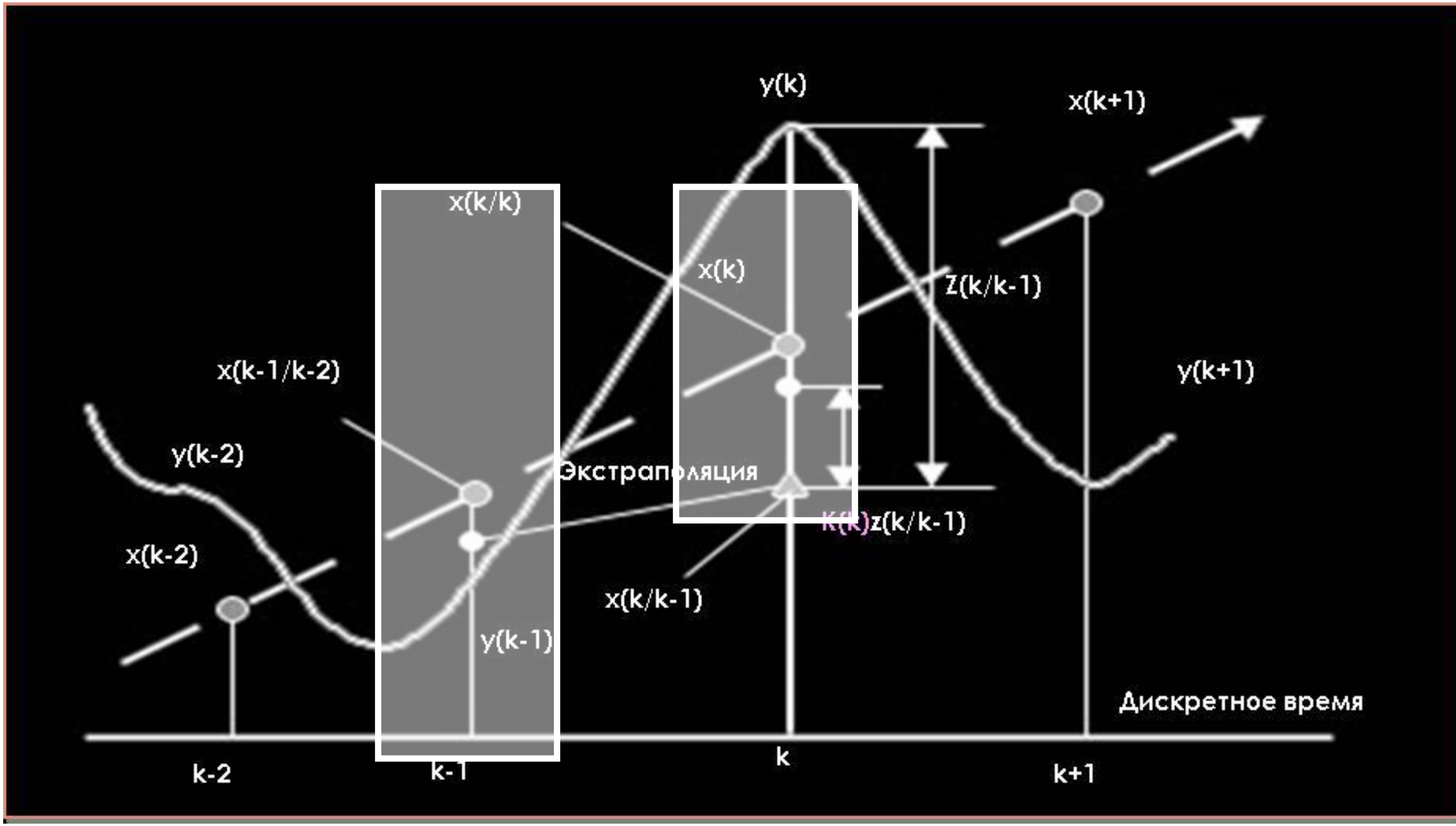
Содержание

Семантика экстраполяции
по опорным точкам оценок



Содержание

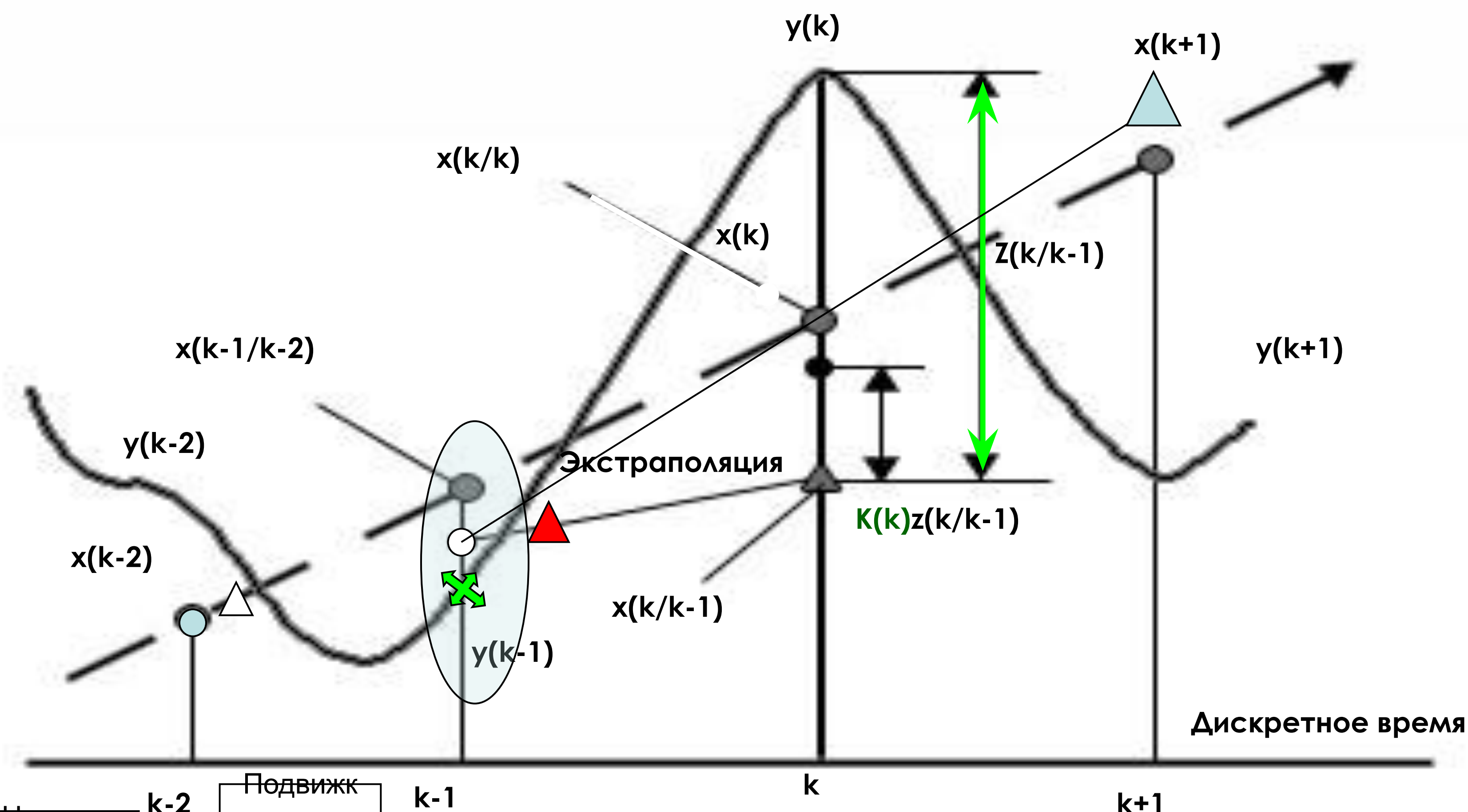
Стробы



y(k)
x(k+1)
x(k/k)
x(k)
Z(k/k-1)
x(k-1/k-2)
y(k+1)
y(k-2)
Экстраполяция
K(k)z(k/k-1)
x(k-2)
x(k/k-1)
y(k-1)
Дискретное время
k-2
k-1
k
k+1

Динамика обработки информации

Семантика экстраполяции по опорным точкам оценок



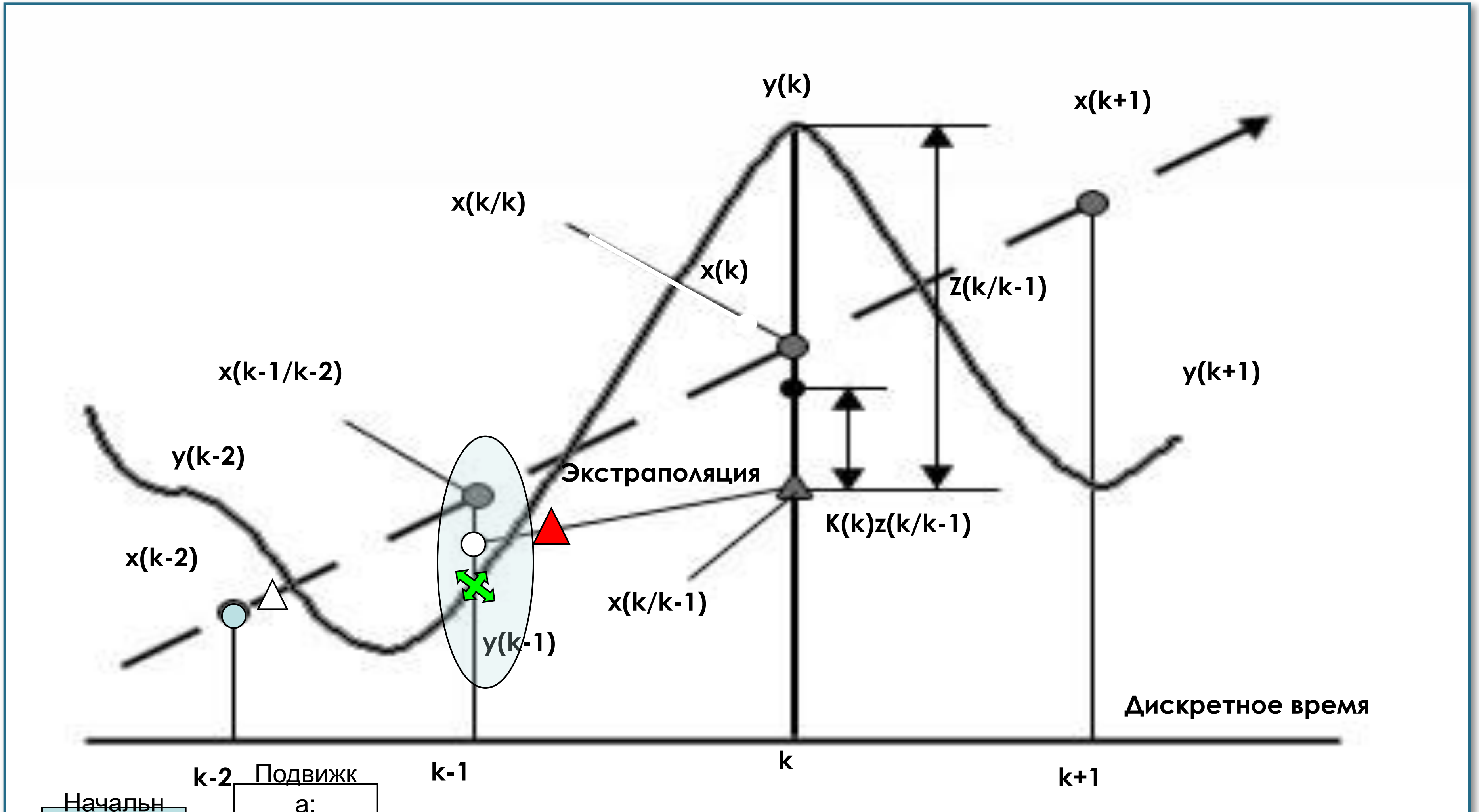
Начальная оценка

Подвижка: “экстра-поляция”

Обработка вектора невязки

Содержание

Динамика обработки информации



Начальная оценка

Подвижка: “экстра-поляция”