Диофантовы уравнения

Проблема подтолкнувшая на создание работы:

Диофантовы уравнения
Глобально не изучаются в школьной программе, а присутствуют на экзамене!

Актуальность моего исследования

обусловлена трудностями решения уравнений и задач на составление

«Диофантовых уравнений»

Целью моей работы является:

- -Исследовать варианты решения уравнений с одной неизвестной;
- -Исследовать варианты уравнений с двумя неизвестными;
- -Найти общие закономерности результатов решений поставленных задач.

Немного истории…

О прожитых годах жизни Диофанта Александрийского можно только предполагать, по написанному стихотворению:

Прах Диофанта гробница покоит; дивись ей - и камень.
Мудрым искусством его скажет усопшего век.
Волей богов шестую часть жизни он прожил ребенком.
И половину шестой встретил с пушком на щеках.
Только минула седьмая. С подругой он обручился.
С нею, пять лет проведя, сына дождался мудрец;
Только полжизни отцовской, возлюбленный сын его прожил.
Отнят он был у отца ранней могилой своей.
Дважды два года родитель оплакивал тяжкое горе,
Тут и увидел предел жизни печальной своей.

Мы узнаем годы жизни Диофанта Александрийского.

Пусть Диофант прожил x лет. Составим и решим уравнение:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x.$$

Умножим уравнение на 84, чтобы избавиться от дробей:

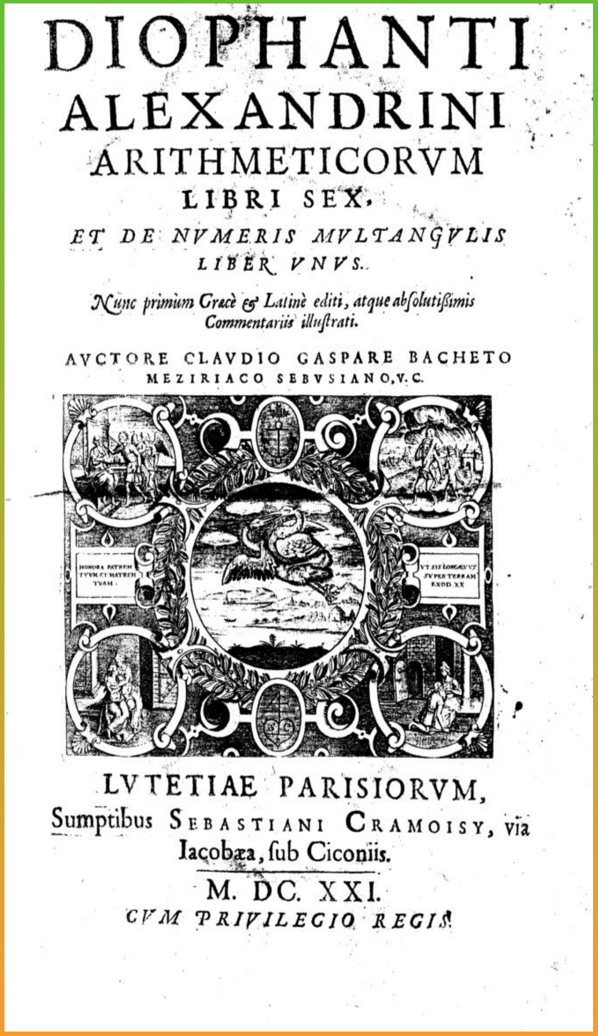
$$14x+7x+12x+420+42x+336=84x,$$

$$-9x=-756,$$

$$x=84.$$

Арифметика…

Основное произведение Диофанта Александрийского– «Арифметика» в тринадцати книгах. К сожалению, до наших дней сохранились только шесть первых книг из тринадцати. «Арифметика» Диофанта – это сборник задач их всего 189, каждая из которых снабжена решением или несколькими способами решения и необходимыми пояснениями. Поэтому, с первого взгляда, кажется, что она не является теоретическим произведением. Однако, при внимательном чтении видно, что задачи тщательно подобраны и служат для иллюстрации вполне определенных, строго продуманных методов.



DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis
Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE BACHETO
MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.

LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via
Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Диофантовы уравнения с одним неизвестным.

Если уравнение $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$

с целыми коэффициентами имеет целый корень, то этот корень является делителем числа свободного члена уравнения. Таким образом, при отыскании целых корней уравнения с целыми коэффициентами достаточно испытать лишь делители свободного члена.

Например:

Решить в целых числах уравнение:

$$x^4 + 3x^3 - x - 3 = 0$$

Решение. Свободный член уравнения имеет следующие делители $\pm 1, \pm 3$

Среди этих чисел и будем искать целые корни данного уравнения. Подстановкой

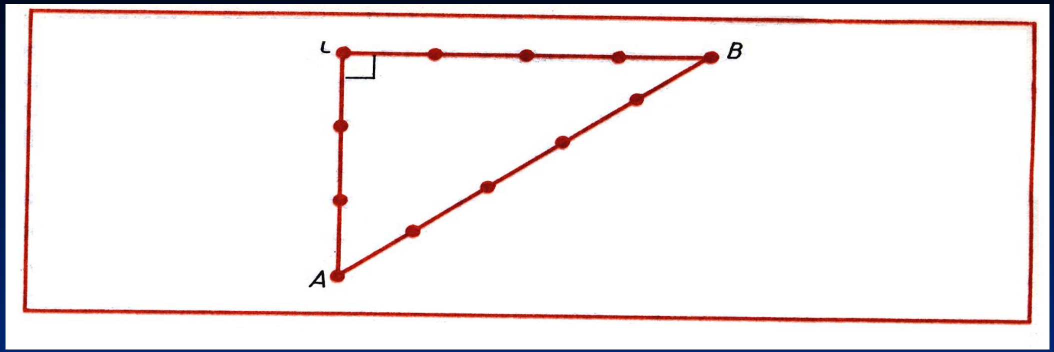
убеждаемся, что корнями являются числа 1 и –3.

Неопределенные уравнения II-ой степени вида

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Существует еще одна частная задача на неопределенные уравнения – теперь уже второй степени, возникшая примерно за две тысячи лет до Диофанта в Древнем Египте.

Если стороны треугольника пропорциональны числам 3, 4 и 5, то этот треугольник – прямоугольный. Этот факт использовали для построения на местности прямых углов. Поступали довольно просто. На веревке на равном расстоянии друг от друга завязывали узлы



В точке С где надо было построить прямой угол, забивали колышек, веревку натягивали в направлении, нужном строителям, забивали колышек в точке В при СВ = 4 и натягивали веревку так, чтобы АС = 3 и АВ = 5. Треугольник с такими длинами сторон называют египетским. Мы, конечно, понимаем, что безошибочность такого построения следует из теоремы, обратной теореме Пифагора. Действительно,

$3^2 + 4^2 = 5^2$. Говоря иначе, числа 3, 4, 5 – корни уравнения

Запишем подряд квадраты натуральных чисел, а под ними разность между последовательными квадратами:

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196 … .

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27 … .

Найдем в нижнем ряду квадратные числа. Первое из них $\boldsymbol{3^2 = 9}$, над ним $\boldsymbol{4^2 = 16}$ и 5^2 $\boldsymbol{=25}$, знакомая нам тройка 3, 4, 5.Следующее квадратное число в нижней строке 25, ему соответствует 144 и 169, отсюда находим вторую известную нам тройку 5, 12, 13. Отсюда мы имеем право сформулировать такую теорему:

Каждое нечетное число есть разность двух последовательных квадратов

$$y = \frac{x^2 - 1}{2} \qquad z = \frac{x^2 + 1}{2}$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

Числа, найденные по такому правилу, всегда будут составлять решение интересующего нас неопределенного уравнения. Это уравнение будем называть «уравнением Пифагора», а его решения – «пифагоровыми тройками». По этому правилу можно получить уже известные нам тройки:

$$x = 3, \qquad y = \frac{9-1}{2} = 4, \qquad z = \frac{9+1}{2} = 5,$$

$$x = 5, \qquad y = \frac{25-1}{2} = 12 \qquad z = \frac{25+1}{2} = 13$$

Мои исследования:

Заключались в изучении решений задач и уравнений…. И я понял, что для решения задач есть много подходов. Диофант Александрийский не останавливался на одном решении, он находил каждый раз новые и более сложные пути получения результатов.

Куплены фломастеры по 7 рублей и карандаши по 4 рубля за штуку, всего на сумму 53 рубля. Сколько куплено фломастеров и карандашей?

Именно эта задача проявила мой интерес к изучению «Диофантовых уравнений» и с неё начались мои исследования!

Решение:

Пусть x – число фломастеров, y – число карандашей, тогда по условию $7x+ 4y=53$. Частное решение этого линейного диофантова уравнения есть: $x=7$, $y=1$. Тогда общее решение его имеет вид: $x=7-4t$, $y=1+7t$. Однако условию $x> 0$, $y>0$, то значениями параметра t могут быть лишь $t=0$ и $t=1$. При $t=0$ получаем $x=7$, $y=1$, а при $t=1$ имеем: $x=3$, $y=8$. Таким образом, решений два, т.е. возможны два варианта покупки фломастеров и карандашей на сумму 53 рубля.

Решить диофантово уравнение: $23x-13y+7z=5$

Выбираем наименьший по модулю коэффициенты x,y,z. В нашем случае это 7, затем остальные коэффициенты 23 и 13, при неизвестных представляем в виде: $23= 7*3+2$, $13=7*2+(-1)$, тогда преобразуем уравнение следующим образом: $(7*3+2)x-(7*2-1)y+7z=5$,

Откуда $2x+y+7(3x-2y+z)=5$. Полагая теперь $t= 3x-2y+z$, получаем уравнение: $2x+y+7t=5$.

Далее находим y из последнего равенства, т.е. $y=5-2x-7t$ и $z=-3x+2y+t$. Подставляя в последние равенство выражение для y, находим, что $z=-3x+2(5-2x-7t)+t=-7x -13t+10$.

Таким образом, окончательно получаем: $У= 5-2x-7t$, $z=10-7x-13t$, где параметры x, и Є Z дают общее решение предположенного диофантова уравнения. Этот метод «наименьшего коэффициента» применим и для решения диофантовых уравнений вида $ax+by=c$.

Найти все пары натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 - y^2 = 69$$

Разложим левую часть уравнения на множители и запишем уравнение вида: (x-y)(x+y)=69 Т.к. делителями числа 69 являются числа 1, 3, 23 и 69, то 69 можно получить двумя способами: 69=1*69 и 69=3*23. Учитывая, что , получим две системы уравнений, решив которые мы сможем найти искомые числа:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 69 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y = 23 \end{cases}$$

Первая система имеет решение x=35, y=34 , а вторая система имеет решение x=13, y=10.

Ответ: (35;34) и (13;10)

Заключение:

В заключительной части своей работы мне особенно хотелось подчеркнуть, что изучив специальную литературу, посвященную диофантовым уравнениям, я расширил свои математические навыки и получил дополнительные знания о самом Диофанте, также о влиянии его научных трудов на дальнейшее развитие научной математической мысли. Именно благодаря методам Диофанта были разгаданы методы самого Архимеда. Методы Диофанта растягиваются еще на несколько сотен лет, переплетаясь с развитием теории алгебраических функций и алгебраической геометрии. Развитие идей Диофанта можно проследить вплоть до работ Анри Пуанкаре и Андре Вейля. Именно Диофант открыл нам мир арифметики и алгебры. Поэтому история Диофантова анализа показалась мне особенно интересной.

- Диофантовы уравнения и их решения и по сей день остаются актуальной темой.
- Умение решать такие уравнения позволяет найти остроумные и сравнительно простые решения казалось бы «неразрешимых» задач, а в практической деятельности значительно сэкономить затраты средств и времени.
- Проведя данное исследование, я овладел новыми математическими навыками, рассмотрел некоторые методы решения неопределенных уравнений.
- Изучая диофантовы уравнения, показал практическое им применение, решив несколько задач.

Спасибо за внимание!

До скорых встреч!!!

Работу подготовил:

Калита Виталий Алексеевич