



# Диофантовы уравнения.



# Содержание.

- Цели и задачи.
- Определение диофантова уравнения
- Биография Диофанта
- Диофантовые уравнения первой степени
- Диофантовые уравнения высших степеней
- Проект учащихся «Метод бесконечного спуска»
- Другие методы решения диофантовых уравнений



# Цели урока:

## Образовательные:

1. Познакомить учащихся с уравнениями, которые решаются в целых числах.
2. Организовать самостоятельный поиск решений диофантовых уравнений.
3. Рассмотреть различные приёмы решения.
4. Научить решать текстовые задачи, по которым можно составить диофантово уравнение.

## Развивающие.

1. Формирование умений обобщать, сравнивать, оценивать, контролировать, анализировать, делать выводы,
2. Развитие познавательных возможностей, творческих способностей, креативности личностных качеств,
3. Организация способности общения (живого, виртуального, обоюдного, группового и т.д.),
4. Развитие инициативы, познавательного интереса,
5. Обучение методам исследовательского поиска,
6. Развитие мыслительной деятельности,
7. Развитие практической направленности изучаемого материала
8. Привитие любви к математике



# Задача.

- У мальчика было 50 р., на которые он хотел купить почтовые марки. В киоске имелись марки по 4 р. и по 3 р., но у киоскера совсем не было сдачи. Помогите мальчику и киоскеру выйти из создавшегося затруднения.



## Решение.

Пусть марок по 4 р.  $x$  штук,  
по 3 р. –  $y$  штук.

Всего имеется 50 р., отсюда

уравнение:  $4x + 3y = 50$

Эта задача имеет не одно, а несколько  
решений.



$x$	2	5	8	11
$y$	14	10	6	2

Первым начал рассматривать такие уравнения **Диофант** (II – III вв. до нашей эры). Он рассматривал уравнения, которые сегодня мы записали бы, например, так:

$$ax + by = c; \quad (1)$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  целые числа, и ответ должен быть дан только в целых числах.

Такие уравнения называют «**диофантовыми**».





- Диофант пытался ответить на следующий вопрос: «Дано уравнение с целыми коэффициентами. Имеет ли оно целые решения?»

- **Диофантовы уравнения** - алгебраические уравнения или их системы с целыми коэффициентами, имеющие число неизвестных, превосходящее число уравнений, и у которых разыскиваются целые или рациональные решения.

Примеры диофантовых уравнений:  
 $ax+by=c$ ,  $x^2+y^2=d^2$ .





DIOPHANTI  
ALEXANDRINI  
ARITHMETICORVM  
LIBRI SEX.  
ET DE NUMERIS MULTANGVLIS  
LIBER VNVS.

*Nunc primum Graecæ et Latinæ editi, atque abſolutiſſimis  
Commentariis illuſtrati.*

AUCTORE CLAVDIO GASPARÈ BACHETO  
MEZIRIACO SEBVSIANOVIC.



LVTETIAE PARISIORVM,  
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, viâ  
Iacobæ, ſub Ciconis.  
M. DC. XXI.  
CVM PRIVILEGIO REGIÆ.

- Биографических данных о древнегреческом ученом-математике Диофанте из Александрии практически не сохранилось. До наших времен дошла лишь часть математического трактата Диофанта "Арифметика", 6 книг из 13, а также отрывки книги о многоугольных числах. В "Арифметике", Диофант излагал начала алгебры, привел множество задач, сводящихся к неопределенным уравнениям различных степеней, и отметил методы нахождения решений таких уравнений в рациональных положительных числах. Сочинения Диофанта были отправной точкой для теоретико-числовых исследований П. Ферма, Л. Эйлера, К. Гаусса и других математиков. Именем Диофанта названы два больших раздела теории чисел - теория диофантовых уравнений и теория диофантовых приближений.

- Рассмотрим линейное диофантово уравнение  $2x + 3y = 1$ .

Найдите целые решения.

Одно из решений – пара чисел  $x = 5, y = -3$

Проверка:  $2 \cdot 5 + 3 \cdot (-3) = 1$

**Любое решение диофантова уравнения называется частным решением**



- При  $c = 0$  уравнение (1) имеет вид  $ax + by = 0$

и называется **однородным диофантовым уравнением**.

Пример.  $2x + 3y = 0$

$$2x = -3y$$

Левая часть равенства делится на 2, а правая – на 3. Числа 2 и 3 взаимно просты.  
 $n \in \mathbb{Z}$ ,

Поэтому  $y = 2n$ ,  $x = -3n$ , где



В общем виде решением уравнения  $ax + by = 0$

является пара  $(-b n, a n)$

Общим решением диофантова уравнения

$2x + 3y = 1$  является  $x = 5 - 3n, y = -3 + 2n,$   
 $n \in \mathbb{Z};$



# Работа в группах.

1 группа. Предложите как можно подобрать частное решение уравнения  $31x + 11y = 1$

2 группа. Решите уравнение:  $6x + 9y = 2$

3 группа. Решите уравнение:  $6x + 9y = 3$

4 группа. Решите уравнение:  $2x + 3y = 7$



# Проверка.

- **Группа 1.** Частное решение уравнения  $31x + 11y = 1$  можно найти с помощью алгоритма Евклида;  $31 \overline{) 11} 4 \cdot 2$

$$\begin{array}{r}
 22 \overline{) 2} \\
 11 \overline{) 9} \\
 9 \overline{) 1} \\
 9 \overline{) 2} \\
 8 \overline{) 4} \\
 \hline
 1
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 2 &= 11 - 9 \cdot 1 && \text{подставим} \\
 9 &= 31 - 11 \cdot 2 && \text{подставим} \\
 1 &= 9 - 4 \cdot (11 - 9) = 5 \cdot 9 - 4 \cdot 11 \\
 &= 5 \cdot (31 - 11 \cdot 2) - 4 \cdot 11 = 5 \cdot 31 + \\
 &11 \cdot (-14). \quad x=5; y=-14 \text{ (частное} \\
 &\text{решение)}
 \end{aligned}$$



• **Группа 2.**  $6x + 9y = 2$

$(6x + 9y) : 3$ ; 2 не делится на 3  $\Rightarrow$  это уравнение не имеет решений.

**Группа 3.**  $6x + 9y = 3$ . Разделим обе части уравнения на 3.

$2x + 3y = 1$ . Частное решение:  $x = 5$ ;  $y = -3$ .

$$2x + 3y = 2 \cdot 5 + 3 \cdot (-3)$$

$2(x - 5) + 3(y + 3) = 0$ . Сделаем замену:

$$x' = x - 5, y' = y + 3; 2x' + 3y' = 0; x' = -3n, y' = 2n$$

$$x = 5 + x' = 5 - 3n; y = -3 + y' = -3 + 2n.$$



Ответ:  $(5 - 3n; -3 + 2n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

• **Группа 4.**  $2x + 3y = 7$

Частное решение  $x = 2; y = 1$

Решение соответствующего однородного уравнения:  $x = 3n; y = -2n$ .

Ответ:  $(2 + 3n; 1 - 2n), n \in \mathbb{Z}$ ;



# Другой способ решения.

- $2x + 3y = 7$

$$x = \frac{7 - 3y}{2} = \frac{6 - 2y + 1 - y}{2} = 3 - y + \frac{1 - y}{2}; \quad \frac{1 - y}{2} = n$$

$$y = 1 - 2n; \quad x = 3 - (1 - 2n) + n = 2 + 3n$$

Ответ:  $(2 + 3n; 1 - 2n)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;



# Диофантовы уравнения высших степеней.

## 1. Метод разложения на множители

### Задача 1.

Доказать: что уравнение  $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3 = 30$  не имеет решений в целых числах.

Решение:

Разложив левую часть на множители, приведем уравнение к виду

$$(x - y)(y - z)(z - x) = 10.$$

Заметим, что  $(x - y) + (y - z) + (z - x) = 0$ . С другой стороны, делителями 10 являются числа  $\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$ . Нетрудно проверить, что сумма любых трех чисел из этого множества, дающих в произведении 10, не будет равняться 0.



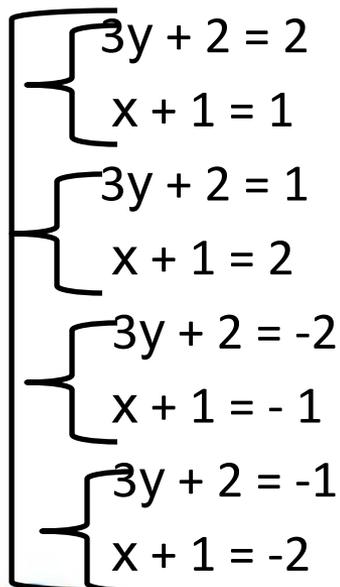
- **Задача 2.** Решите уравнение в целых числах :  $3xy + 2x + 3y = 0$

Решение:

$$3xy + 2x + 3y + 2 = 2$$

$$3y(x + 1) + 2(x + 1) = 2$$

$$(3y + 2)(x + 1) = 2$$


$$\begin{cases} 3y + 2 = 2 \\ x + 1 = 1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3y + 2 = 1 \\ x + 1 = 2 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3y + 2 = -2 \\ x + 1 = -1 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3y + 2 = -1 \\ x + 1 = -2 \end{cases}$$

Решите системы и отберите целые решения



Ответ: (0;0); (-3; -1)

# Проект учащихся «Метод бесконечного спуска»



- **2. Метод «бесконечного спуска»**

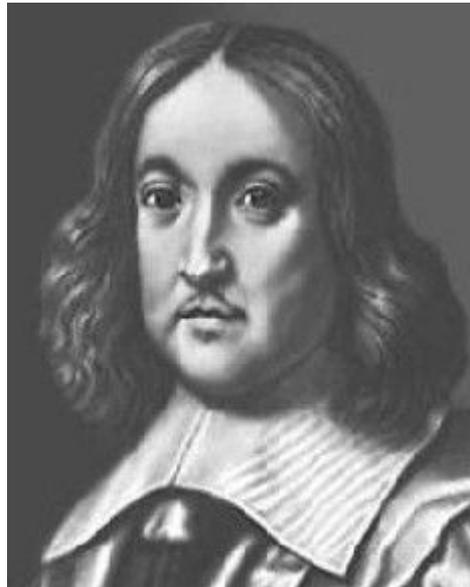
Предположим, что уравнение имеет решение, строим бесконечный процесс, в то время как по смыслу задачи этот процесс должен на чём-то закончиться.

Часто метод бесконечного спуска применяется в более простой форме. Предположим, что мы уже добрались до естественного конца, и видим, что «остановиться» НЕВОЗМОЖНО.



- Историческая справка.

- Метод бесконечного спуска изобрели, по-видимому, древнегреческие математики.
- Метод бесконечного спуска был существенно развит Пьером Ферма. Есть основания полагать, что Ферма пытался доказывать свою Великую теорему именно этим методом.





- Несмотря на отсутствие многих важных деталей в беглых заметках Ферма, в них отчетливо просматривался один из способов доказательства от противного, известный под названием метода бесконечного спуска. Чтобы доказать, что уравнение  $x^4 + y^4 = z^4$  не допускает решения в целых числах, Ферма начал с предположения о существовании гипотетического решения в целых числах  $x = X_1, y = Y_1, z = Z_1$ . При изучении свойств чисел  $(X_1, Y_1, Z_1)$  Ферма показал, что если бы такое гипотетическое решение действительно существовало, то существовало бы меньшее решение  $(X_2, Y_2, Z_2)$ . Рассматривая это новое решение, Ферма смог показать, что если бы оно существовало, то существовало бы еще меньшее решение  $(X_3, Y_3, Z_3)$  и т.д. Эйлер попытался воспользоваться методом бесконечного спуска в качестве исходного пункта при построении общего доказательства для всех других степеней в уравнении Ферма. Он хотел получить доказательство для всех вплоть до бесконечности, но прежде всего он хотел «опуститься на одну ступень» и получить доказательство при  $n=3$ . В письме к прусскому математику Христиану Гольдбаху в августе 1753 года Эйлер сообщил, что ему удалось приспособить метод бесконечного спуска и успешно доказать Великую теорему Ферма для случая  $n=3$ .



# Задача.

- Решите уравнение в целых числах:

$$4x^3 - 2y^3 - z^3 = 0$$

Решение.

$$4x^3 - 2y^3 = z^3. z^3 - \text{чётное число} \Rightarrow z = 2z_1 \Rightarrow z : 2$$

$$4x^3 - 2y^3 - 8z_1^3 = 0 \Rightarrow 2x^3 - y^3 - 4z_1^3 = 0 \Rightarrow$$

$$y^3 = 2(x^3 - 2z_1^3) \Rightarrow y^3 - \text{чётное}, y : 2, y = 2y_1$$

$$2x^3 - 8y_1^3 - 4z_1^3 = 0 \Rightarrow x^3 - 4y_1^3 - 2z_1^3 = 0 \Rightarrow$$

$$x^3 - \text{чётное число}, x : 2, x = 2x_1$$



- Значит числа  $x_1$ ,  $y_1$  и  $z_1$  – тоже делятся на 2.

Сколько бы раз мы не делили на 2, получаем числа, которые снова делятся на 2. Таким свойством обладает только 0.

Ответ: (0;0;0).



# Задание для самостоятельной работы.

- Доказать, что уравнение  $x^3 + 2y^3 + 4z^3 - 6xyz = 0$  в целых числах не имеет решений, не равных нулю одновременно.



# Другие методы решения диофантовых уравнений

Задача:

Доказать, что уравнение

$$x^3 + y^3 + z^3 = 2$$

имеет бесконечно много решений в целых числах.

Решение:

Положим  $x = a + b$ ,  $y = a - b$ . Тогда  $x^3 + y^3 = 2a^3 + 6ab^2$ . С учетом последнего равенства исходное уравнение принимает вид

$$2a^3 + 6ab^2 + z^3 = 2.$$

Положив  $a = 1$ , получим  $z^3 = -6b^2$ . Положим теперь  $b = 6t^3$ .

Отсюда  $z = -6t^2$ ,  $x = 1 + 6t^3$ ,  $y = 1 - 6t^3$ . Таким образом, получено бесконечное множество решений исходного уравнения, соответствующих целочисленным значениям параметра  $t$



# Домашнее задание.

- № 1

Решите в целых числах уравнение:

а)  $8x + 14y = 32$ ; б)  $6x - 15y = 27$ ; в)  $19x - 5y = 119$

№ 2.

Найдите общий вид целых неотрицательных чисел,  
дающих

при делении на 7 остаток 3, а при делении на 11 остаток 4.

№ 3.

Разделите 200 на два слагаемых так, чтобы при делении  
одного на 6, а другого на 11 получились соответственно

остатки 5 и 4.



# Итоги урока

*• За что ты можешь себя*

## ***ПОХВАЛИТЬ?***

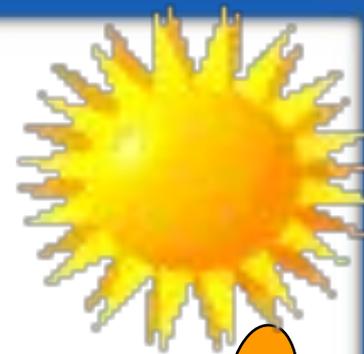
- Что тебе УДАЛОСЬ на уроке?***
- Над чем еще нужно***

## ***ПОРАБОТАТЬ?***

- Зачем нам нужен был этот урок?***



Урок окончен!  
УДАЧИ!



# Литература

1. Пичурин Л.Ф. За страницами учебника алгебры. Книга для учащихся 7-9кл. общелюобразоват. учреждений.- М.: Просвещение, 1999.-237 с.
2. Ткачева М.В. Домашняя математика. Книга для учащихся 7 кл. общеобразоват. учреждений. – М. : Просвещение, 1994.- 190с.
3. <http://garshin.ru/evolution/mathematics/math-history.html>
4. <http://www.math.md/school/krujok/diofantr/diofantr.html>
5. <http://virlib.eunnet.net/books/numbers/text/5.html>
6. <http://maths3.narod.ru/algteo4.html>

