Дискретная математика

ЧАСТЬ 2 Отношения на множествах и элементы комбинаторики

Ларионов Владимир Борисович
E – mail: vb_larionov@mti.edu.ru

2.2. Действия над бинарными отношениями

Операции над бинарными отношениями.

1.*Объединением отношений* является отношение

$$R = R_1 \cup R_2 = \{(a,b) \mid (a,b) \in R_1 \text{ или } (a,b) \in R_2\}.$$

Чтобы получить характеристическую матрицу объединенного отношения $\|R\| = \|R_1 \cup R_2\|$, необходимо логически сложить характеристические матрицы $\|R_1\|$ и $\|R_2\|$.

2. *Пересечением отношений* является отношение:

$$R = R_1 \cap R_2 = \{(a,b) \mid (a,b) \in R_1 \text{ и } (a,b) \in R_2\}.$$

Чтобы получить характеристическую матрицу отношения $R = R_1 \cap R_2$, необходимо поэлементно логически перемножить характеристические матрицы $\|R_1\|$ и $\|R_2\|$.

Примеры решения задач (композиция отношений)

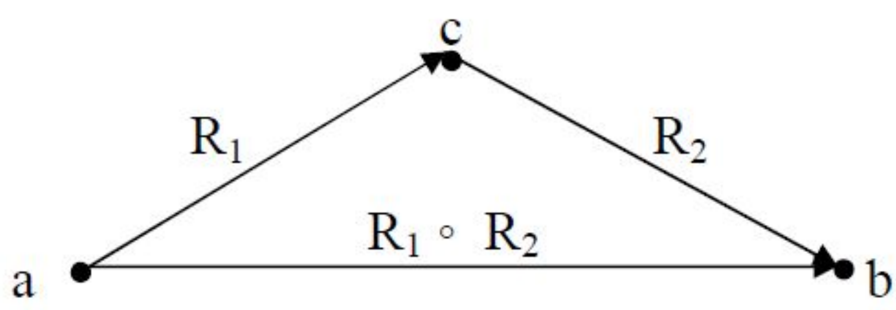
3. *Композиция отношений.* Пусть $R_1 \subset A \times C$ – отношение из A в C, а $R_2 \subset C \times B$ – отношение из C в B.

Композицией двух отношений $R = R_1 \circ R_2$ называется отношение $R \subset A \times B$ из A в B, определяемое следующим образом:

$$R = R_1 \circ R_2 = \left\{ (a, b) \,\middle|\, a \in A \ \text{и}\ b \in B, \text{и существует } c \in C, \text{такое, что } a R_1 c \ \text{ и } \ c R_2 b \right\}$$

Композиция отношений на множестве А является отношением на множестве А.

Приведенное выше определение композиции можно трактовать как установление отношения между элементами a и b через обязательно существующего «посредника» c:



Чтобы получить характеристическую матрицу отношения $R = R_1 \circ R_2$, необходимо перемножить характеристические матрицы $\|R_1\|$ и $\|R_2\|$ по правилу перемножения матриц (строка на столбец), но под «суммой» и «произведением» подразумевать логические «сумму» и «произведение», то есть $r[i, j] = \sum_{k=1}^{n} r_1[i, k] \times r_2[j, k]$.

Пример 1.2.3. Используя отношения R_1 и R_2 из примера 1.2.1, найти отношение $R = R_1 \circ R_2$.

Решение:

R_1 = {(a, b), (b, c), (e, b), (e, a)},

R_2 = {(a, b), (a, d), (d, e), (d, c), (c, b), (e, a)}.

Построим характеристические матрицы отношений R_1 и R_2 .

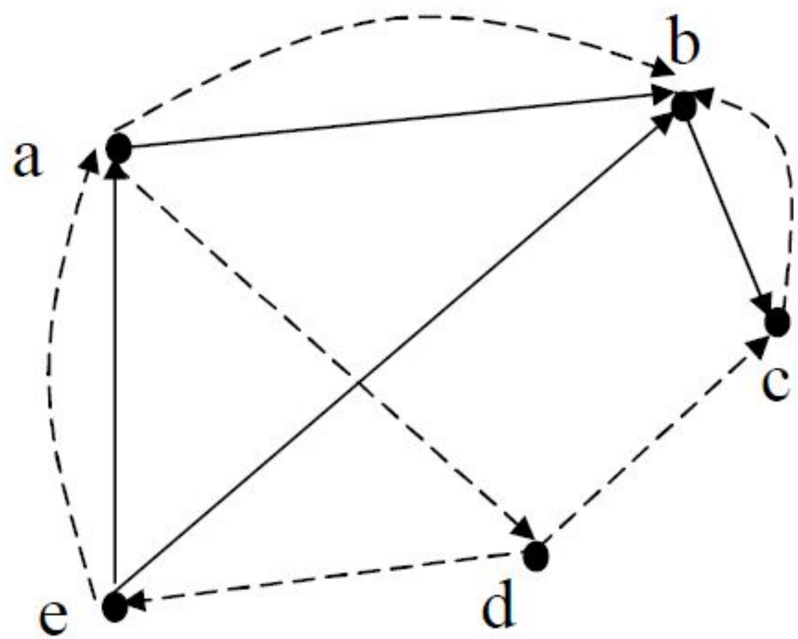
$$\|R_1\| = \begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \quad \|R_2\| = \begin{array}{c|ccccc} & a & b & c & d & e \\ \hline a & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ e & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}.$$

Построим характеристическую матрицу отношения $R = R_1 \circ R_2$:

$$\|R\| = \|R_1 \circ R_2\| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Получим, что $R = R_1 \circ R_2 = \{(b, b), (e, b), (e, d)\}$.

Замечание. Чтобы увидеть, что отношение $R = R_1 \circ R_2$ устанавливается через «посредника», изобразим совместно ориентированные графы отношений R_1 и R_2. При этом отношения на R_1 будем обозначать «⟶», отношения на R_2 будем обозначать «- - →»:



«Посредник»

b ⟶ c - - → b

e ⟶ a - - → b

e ⟶ a - - → d

3. Основы комбинаторики

Комбинаторика – раздел математики, посвященный решению задач выбора и расположения элементов некоторого, обычно конечного, множества в соответствии с заданными правилами. Каждое такое правило определяет способ построения некоторой конструкции из элементов исходного множества, называемого *комбинаторной конфигурацией*. Простейшими примерами комбинаторных конфигураций являются перестановки, размещения, сочетания и разбиения.

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ – множество из n элементов.

Из этого множества можно выбирать элементы, которые будут образовывать подмножества с определенными свойствами. В зависимости от свойств подмножеств получатся различные *комбинаторные объекты*. С каждым комбинаторным объектом связано *комбинаторное число* – количество комбинаторных объектов этого вида, которые можно выбрать из исходного множества.

Теорема перемножения (принцип произведения)

1. Если элемент a_1 можно выбрать n_1 способами, после каждого выбора следующий за ним элемент a_2 можно выбрать n_2 способами, …, после выбора элементов $a_1, \ldots, a_{k-1}$ элемент a_k выбирается n_k способами, т. е.

$$a_1 \to n_1,$$
$$a_2 \to n_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$a_m \to n_m,$$

Тогда мощность множества **A={(a_1,$a_{2,}$…..a_m)}** равняется $|A| = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots n_m$

2. *Перестановки без повторений* – это число способов введения линейного порядка на множестве из *n* элементов.

$P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ – перестановка *n* элементов в ряд.

$P_n = (n-1)!$ – перестановка *n* элементов в круг.

3. *Перестановки с повторениями.* Пусть имеется **n_1** предметов 1-го типа, **n_2** предметов 2-го, **n_m** предметов m-го типа и при этом **$n_1 + n_2 + \ldots + n_m = n$**. Количество разных перестановок предметов равно

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_m!}.$$

4. *Размещения без повторений* – это когда из n элементов множества требуется выбрать m элементов $(m \le n)$ и линейно их упорядочить:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

При этом порядок расположения элементов в выборке важен и повторы элементов исключены.

Число A_n^m называют числом размещений без повторений из n по m.

5. *Размещения с повторениями.* Если имеется n типов предметов (количество предметов каждого типа неограниченно) и m позиций (ящиков, кучек, разрядов), то количество различных последовательностей при условии, что в позициях предметы могут повторяться, вычисляется по формуле

$$\overline{A}_n^m = n^m.$$

При этом порядок расположения элементов в выборке важен. Такие последовательности называют размещениями с повторениями.

6. *Сочетания без повторений* – это когда из n-элементного множества просто выбирается его m-элементное подмножество без упорядочивания. Число m-элементных подмножеств n-элементного множества обозначается через C_n^m и называется числом сочетаний из n по m.

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{m!} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

Порядок расположения элементов в выборке не важен, и повторы элементов исключены.

Замечание. Вышеприведенную формулу можно трактовать, как число способов разбить n-элементное множество на две группы, в одной из которых m элементов, в другой $(n - m)$ элементов.

7. Сочетания с повторениями – это когда m-элементные наборы составляются из предметов n видов.

$$\overline{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}.$$

Порядок расположения элементов в выборке не важен, и повторы элементов возможны.

3.1. Примеры решения задач

Пример 2.1. В шахматном турнире играют 10 человек. Сколько различных вариантов распределения трех призовых мест между участниками?

Решение. Есть три призовых места, которые не равнозначны. На них претендуют 10 участников. Поэтому число различных распределений призовых мест равно числу размещений из 10 по 3: $A_{10}^3 = (10)_3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ вариантов.

Ответ: 720 вариантов.

Пример 2.2. В городском первенстве по хоккею участвуют 10 команд. Команды, занявшие три первых места, получают путевки на чемпионат страны. Сколько различных вариантов команд города на чемпионате страны?

Решение. Есть три призовых места, которые равнозначны. На них претендуют 10 команд. Поэтому число различных троек победителей равно числу сочетаний из 10 по 3: $C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3!} = 120$ вариантов.

Ответ: 120 вариантов.

Пример 1.3.1. Сколько существует четырехзначных чисел, которые делятся на 5?

Решение. Четырехзначное число содержит четыре десятичных разряда. Старший разряд числа может быть заполнен любой из девяти цифр: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Нуль не может использоваться, так как иначе число будет трехзначным, а не четырехзначным. Второй и третий разряды заполняются любой цифрой из десяти. Младший разряд можно заполнить только нулем или пятеркой, так как число делится на пять, если оно оканчивается на 0 или 5. Таким образом, по правилу произведения общее число способов составления заданных чисел равно $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 2 = 1800$.

Пример 1.3.3. Найти количество перестановок букв слова «КОМБИНАТОРИКА».

Решение. В этом слове 2 буквы «К», 2 буквы «О», 1 буква «М», 1 буква «Б», 2 буквы «И», 1 буква «Н», 2 буквы «А», 1 буква «Т» и 1 буква «Р». Общее количество букв в слове равно $2+2+1+1+2+1+2+1+1=13$. Количество перестановок букв этого слова определяем по формуле

$$\frac{n!}{n_1!\cdot n_2!\cdot \ldots \cdot n_m!},$$

где $n = 13$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$, $n_4 = 1$, $n_5 = 2$, $n_6 = 1$, $n_7 = 2$, $n_8 = 1$, $n_9 = 1$.

Получаем $\dfrac{13!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!} = \dfrac{13!}{16} = 389188800$ перестановок

Упражнения для самостоятельной работы

Задано универсальное множество U и множества A, B, C и D. (см.таблица 1)

Выполнить задание двумя способами:

а) вычислить элементы результирующего множества, используя непосредственно операции над множествами;

б) сформировать характеристические векторы для исходных множеств и получить результирующее множество, используя действия над характеристическими векторами.

Сравнить результаты.

Таблица 1.

Вариант	Дано	Найти
1	$U=\{-15,-14,-13,-12,-11\}$, $A=\{-15,-13,-12,\}$; $B=\{-14,-12,-11\}$; $C=\{-15,-11,\}$; $D=\{-12\}$	$A\cup\overline{C}$; $(B\cup C)\setminus(A\setminus D)$; $(U\setminus C)\cap A$
2	$U=\{a,b,c,d,e\}$, $A=\{a,b,c\}$; $B=\{b,c,d\}$; $C=\{a,e\}$; $D=\{d\}$	$\overline{A\cap B}$; $(B\setminus D)\setminus(A\cup C)$; $(U\setminus B)\cup D$
3	$U=\{1,2,3,4,5\}$; $A=\{1,3,5\}$; $B=\{2,4\}$; $C=\{2,3,4\}$; $D=\{5\}$.	$\overline{\overline{A}\cap\overline{D}}$; $((A\setminus C)\setminus D)\cup B$; $(U\setminus A)\cup D$.

Таблица 1. продолжение

4	$U = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $A = \{2, 4\}$; $B = \{4, 6, 8\}$; $C = \{2, 6, 10\}$; $D = \{4\}$.	$A \cap \overline{D}$; $(B \setminus C) \cap D$; $(A \setminus B) \cap (U \setminus D)$.
5	$U = \{x, y, z, t, u\}$, $A = \{t\}$; $B = \{x, u\}$; $C = \{x, y, z\}$; $D = \{y,\ t\}$.	$C \cup \overline{D}$; $(A \cup C) \setminus B$; $(U \setminus A) \setminus \overline{B}$.
6	$U = \{-10, -5, 5, 10, 15\}$, $A = \{-10, 10\}$; $B = \{-5, 5, 15\}$; $C = \{5, 10, 15\}$; $D = \{5\}$.	$A \cap \overline{B}$; $\overline{D \cap C} \setminus A$; $U \cap (B \setminus \overline{D})$.

Таблица 1. продолжение

7	$U=\{10,11,12,13,14\}$, $A=\{10,11,12\}$; $B=\{12,13,14\}$; $C=\{10,14\}$; $D=\{12\}$.	$(B\cup A)\setminus\overline{C}$; $\overline{B\cup D}$; $(U\setminus(B\cap C))\setminus D$.
8	$U=\{a,b,c,d,e,f,g\}$, $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{c,d,e,f,g\}$, $C=\{d,e,f\}$, $D=\{f,g\}$.	$(U\setminus A)\setminus B$; $C\cap\overline{D}$; $\overline{\overline{A}\cap\overline{C}}$.
9	$U=\{1,2,3,4,5,6,7\}$, $A=\{1,2,3,4\}$; $B=\{4,5,6,7\}$; $C=\{2,4,6\}$; $D=\{2,4\}$.	$(B\cup D)\setminus(A\cap C)$; $\overline{D\cup\overline{C}}$; $(U\setminus\overline{A})\setminus\overline{D}$.
10	$U=\{1,3,4,5,7,9\}$, $A=\{1,3,9\}$; $B=\{5,7,9\}$; $C=\{4,5\}$; $D=\{9\}$.	$(U\setminus D)\setminus C$; $(\overline{C\setminus B})\cup A$; $A\cap D$.