

Лекция № 11

Дискретное преобразование Фурье

- Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) относится к классу основных преобразований при цифровой обработке сигналов. Дискретное преобразование Фурье, по возможности вычисляемое быстрыми методами, лежит в основе различных технологий спектрального анализа.
- Моделью последовательности из N дискретных отсчетов $x(k)$ является сигнал из смещенных по времени дельта-функций:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(t - kT)$$

Дискретное преобразование Фурье

- Мысленно периодизируем этот сигнал с периодом $T_1 = NT$
Дискретный периодический сигнал можно представить рядом Фурье:

$$x_{\text{дн}}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(n)e^{jn\omega_1 t}$$

- Коэффициенты $c(n)$ этого ряда находят согласно формуле:

$$\begin{aligned} c(n) &= \frac{1}{NT} \int_0^{NT} x(t)e^{-jn\omega_1 t} dt = \frac{1}{NT} \int_0^{NT} \sum_{k=0}^{n-1} x(k)\delta(t - kT)e^{-jn\omega_1 t} dt = \\ &= \frac{1}{NT} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \int_0^{NT} \delta(t - kT)e^{-jn\omega_1 t} dt. \end{aligned}$$

Дискретное преобразование Фурье

- Переходя к новой переменной $t' = t/T$, получим:

$$c(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \int_0^N \delta(t' - k) e^{-jn\omega_1 T t'} dt' = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-jn\omega_1 k T}$$

- Так как $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{NT}$, окончательно имеем:

$$c(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j \frac{2\pi nk}{N}}. \quad (11.1)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots, (N-1).$$

Дискретное преобразование Фурье

- Соотношение, позволяющее вычислить комплексные амплитуды гармоник дискретного сигнала, представляет собой линейную комбинацию отсчетов этого сигнала. Его называют **прямым дискретным преобразованием Фурье (ДПФ)**.
- Наряду с прямым ДПФ существует обратное дискретное преобразование Фурье:

$$x(k) = \sum_{n=0}^{N-1} c(n) e^{j \frac{2\pi}{N} kn}, \quad k = 0, 1, \dots, (N-1).$$

- Замечание. В размещении множителя $1/N$ в выражении ДПФ нет полного единства. В некоторых источниках этот множитель относят к формуле обратного ДПФ, удаляя его из формулы для прямого ДПФ.

Свойства дискретного преобразования Фурье

- Линейность.

Дискретное преобразование Фурье – линейное преобразование, то есть если последовательностям $x(k)$ и $y(k)$ с одним и тем же периодом N соответствуют наборы гармоник $c_1(n)$ и $c_2(n)$, то последовательности $\{ax(k) + by(k)\}$ будет соответствовать спектр $ac_1(n) + bc_2(n)$.

- Ортогональный дискретный базис Фурье, в котором выполняется ДПФ, представляет собой систему дискретных экспоненциальных функций (ДЭФ), заданную на дискретной временной оси N отсчетами:

$$e_N(k, n) = \exp(j \frac{2\pi}{N} kn); \quad k, n = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Свойства дискретного преобразования Фурье

- **Симметрия.**

Свойство симметрии, которым обладает спектр непрерывного сигнала, сохраняется и для спектра дискретного периодического сигнала. Если отсчеты $x(k)$ – вещественные числа, тогда коэффициенты ДПФ, номера которых расположены симметрично относительно $N/2$, образуют сопряженные пары:

$$c(N - n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j \frac{2\pi}{N} k(N-n)} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{j \frac{2\pi}{N} kn} = c^*(n)$$

Из формулы следует, что спектр является сопряжено симметричным относительно $N/2$, то есть содержит ровно такое же количество информации, что и сам сигнал.

Свойства дискретного преобразования Фурье

- Гармоника с нулевым номером (постоянная составляющая) представляет собой среднее значение всех отсчетов сигнала на одном периоде:

$$c(0) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) = c(N)$$

- Если N – четное число, то

$$c(N/2) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)(-1)^k$$

и амплитуда гармоники с номером $N/2$ определяется суммой отсчетов с чередующимися знаками:

$$c(N/2) = \frac{1}{N} [x(0) - x(1) + \dots + x(N-2) - x(N-1)]$$

Свойства дискретного преобразования Фурье

- ДПФ круговой свертки.

Возьмем две последовательности $\{x_1(k)\}$ и $\{x_2(k)\}$ одинаковой длины N , ДПФ которых соответственно равны $c_1(n)$ и $c_2(n)$. Вычислим их круговую свертку по одному периоду:

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2(n-m)$$

Найдем N -точечное ДПФ этой свертки:

$$\begin{aligned} s(k) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y(n) e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m)x_2(n-m) \right\} e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x_1(m) \left\{ \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n-m) e^{-j\frac{2\pi k(n-m)}{N}} \right\} e^{-j\frac{2\pi km}{N}} = c_1(k)c_2(k), \quad (11.2) \end{aligned}$$

$$k = 0, 1, \dots, N-1.$$

Свойства дискретного преобразования Фурье

Таким образом, круговой свертке дискретизированных и заданных на одном временном промежутке сигналов соответствует перемножение их спектров.

Вычисление круговой свертки двух сигналов с помощью ДПФ осуществляется по следующему алгоритму:

- вычисление ДПФ исходных сигналов по формуле (11.1);
- перемножение коэффициентов полученных ДПФ согласно (11.2);
- вычисление сигнала $y(n)$ с помощью обратного ДПФ полученной последовательности $\{s(k)\}$.

Свойства дискретного преобразования Фурье

- Равенство Парсеваля для дискретных сигналов.

Определим значение $\sum_{n=0}^{N-1} |c(n)|^2$, используя формулу ДПФ:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{N-1} |c(n)|^2 &= \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \tilde{e}_N(k, n) \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) e_N(m, n) \right\} = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(k) \tilde{x}(m) \left\{ \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e_N(k, n) e_N(m, n) \right\} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |x(k)|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, мощность сигнала на N отсчетах равна сумме мощностей его частотных компонентов.

Свойства дискретного преобразования Фурье

- **Связь ДПФ с Z-преобразованием.**

Сравнивая формулу прямого ДПФ дискретной последовательности с формулой Z-преобразования, видим, что коэффициенты ДПФ равны значениям Z-преобразования этого сигнала в N точках, равномерно распределенных по единичной окружности Z-плоскости.

- Получим Z-преобразование последовательности через коэффициенты ДПФ этой последовательности:

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{k=0}^{N-1} c(k)e^{j\frac{2\pi nk}{N}} \right] z^{-n} = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} c(k) \sum_{n=0}^{N-1} \left(e^{j\frac{2\pi k}{N}} z^{-1} \right)^n = \sum_{k=0}^{N-1} c(k) \frac{1 - z^{-N}}{1 - e^{j\frac{2\pi k}{N}} z^{-1}} \end{aligned}$$