

ДИСКРЕТНЫЕ СТРУКТУРЫ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ БИНАРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ. ОТНОШЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

ЛЕКЦИЯ 4

**Математический факультет. Кафедра математического
моделирования**

Тема: Бинарные отношения.

Отношение эквивалентности

Цель лекции – изучить свойства бинарных отношений, способы их задания для применения в задачах компьютерной инженерии

Содержание:

- Определение бинарного отношения
- Способы задания бинарных отношений
- Свойства бинарных отношений
- Бинарное отношение эквивалентности
- Классы эквивалентности
- Применение в задачах компьютерной инженерии

Литература

- **Горбатов В.А.** Основы дискретной математики. М.: Высш. шк., 1986. 10-14 с.
- **Лавров И.А., Максимова Л.Л.** Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 224 с.
- **Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М.** Дискретная математика для инженера. М.: Энергия, 1980. 344 с.
- **Богомолов А.М., Сперанский Д.В.** Аналитические методы в задачах контроля и анализа дискретных устройств. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1986. 240с.
- **Новиков Ф.А.** Дискретная математика для программистов. С.-П., 2001. С. 4-24.
- **Хаханов В.І., Хаханова І.В., Кулак Е.М., Чумаченко С.В.** Методичні вказівки до практичних занять з курсу "Дискретна математика". Харків, ХНУРЕ. 2001. 12-16 с.

Термины

Базовые понятия:

- множество
- подмножество
- упорядоченная пара
- вектор
- декартово произведение
- декартова степень
- отношение

Ключевые слова:

- бинарное отношение
- матрица смежности
- граф
- фактор-множество
- рефлексивность
- симметричность
- транзитивность
- отношение эквивалентности

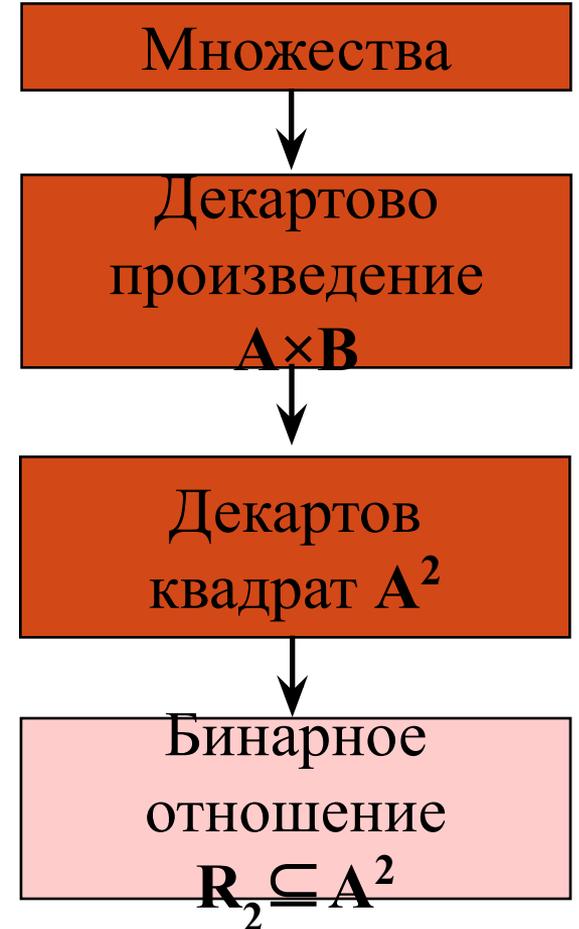


Определение бинарного отношения

- **Def:** бинарным (двухместным) отношением на множестве M называется подмножество декартова квадрата множества M :

$$R_2 \subseteq M^2$$

- $n=2$ степень отношения (бинарное)



Способы задания бинарных отношений. 1

1. Матрица смежности



Def: матрица смежности бинарного отношения на множестве $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ – это таблица размера $n \times n$, в которой элемент c_{ij} , определяется следующим образом:

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } a_i R a_j ; \\ 0 & \text{в противном случае} \end{cases}$$

Пример

Дано: $A = \{a, b\}$,
 $R_2 = \{(a, a), (b, a)\} \subset A^2$

Матрица смежности бинарного отношения R_2 представляется так:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} a & b \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \left\| \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{array} \right\| \end{array}$$

Способы задания бинарных отношений. 2

2. Граф



Def: граф – это совокупность множества V с заданным на нем отношением $U \subset V^2$:

$$G = \langle V, U \rangle$$

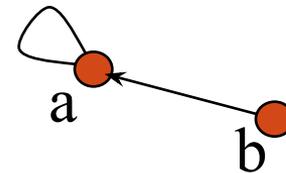
V – носитель графа (множество вершин),

U – сигнатура графа (множество ребер или дуг).

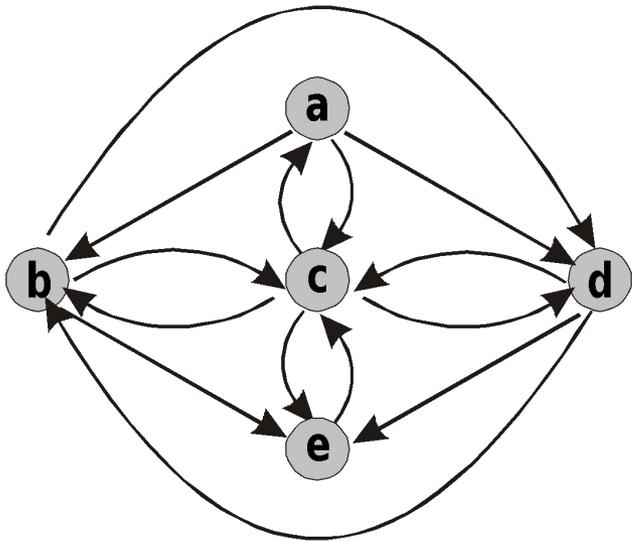
Пример

Дано: $A = \{a, b\}$,
 $R_2 = \{(a, a), (b, a)\} \subset A^2$

Граф бинарного отношения R_2 изображается так:



Пример: информационный обмен между устройствами ЭВМ



- $V = \{a, b, c, d, e\}$, $T \subset V^2$

$T = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d), (b, e), (c, a), (c, b), (c, d), (c, e), (d, b), (d, c), (e, c), (d, e)\}$

- **a** – устройство ввода;
- **b** – процессор;
- **c** – устройство управления;
- **d** – запоминающее устройство;
- **e** – устройство вывода.

Историческая справка

- Американский математик
- Доктор физико-математических наук
- Член Национальной Академии наук США
- Профессор Принстонского университета в США (с 1933)
- Член Комиссии по атомной энергии США (с 1954)
- Директор Бюро по проектированию ЭВМ (1945-1955).



Джон фон Нейман

Способы задания бинарных отношений. 3

3. Фактор-множество

Def: окрестность единичного радиуса элемента $a_i \in A$:

$$O(a_i) = \{ a_j \mid (a_i, a_j) \in R \subseteq A^2, a_j \in A \}$$

Def: фактор-множество A/R (или $A|R$) множества A по отношению $R \subseteq A^2$ есть совокупность окрестностей единичного радиуса

Пример

a	b	c	d	e
{b,c,d}	{c,d,e}	{a,b,d,e}	{b,c,a}	{c}

- Верхняя строка – элементы множества A
- Нижняя – совокупность окрестностей единичного радиуса элементов a_i

$$A/R = \{ O(a_i) \mid a_i \in A \}$$

Свойства бинарных отношений. 1

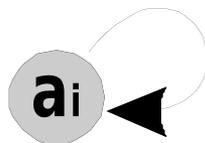
1. Рефлексивность

- $R \subseteq A^2$ – рефлексивно, если

$$\forall a_i \in A \Rightarrow (a_i, a_i) \in R \subseteq A^2$$

- матрица смежности:

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots \\ \dots & 1 & \dots \\ \dots & \dots & 1 \end{vmatrix}$$



- в графе – петли:

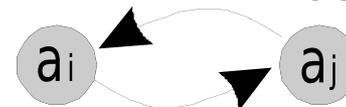
2. Симметричность

- $R \subseteq A^2$ – симметрично, если $\forall a_i, a_j \in A : (a_i, a_j) \in R \Rightarrow (a_j, a_i) \in R \subseteq A^2$

- матрица смежности:

$$\begin{vmatrix} \dots & 1 & 0 \\ 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots \end{vmatrix}$$

- в графе – симметрично направленные дуги:



Свойства бинарных отношений. 2

3. Транзитивность

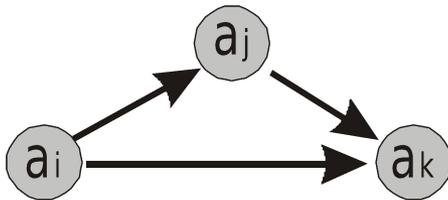


- $R \subseteq A^2$ – транзитивно, если

$\forall a_i, a_j, a_k \in A :$

$$(a_i, a_j) \in R, (a_j, a_k) \in R \Rightarrow (a_i, a_k) \in R \subseteq A^2$$

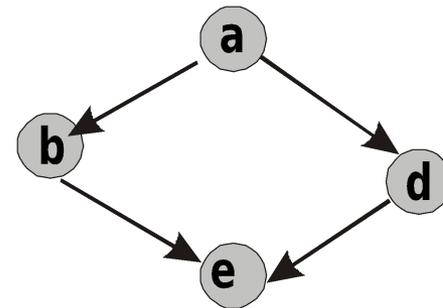
- в графе – транзитивно замыкающая дуга:



Дополнительные свойства:

- антирефлексивность
- нерефлексивность
- антисимметричность
- несимметричность
- нетранзитивность

Пример

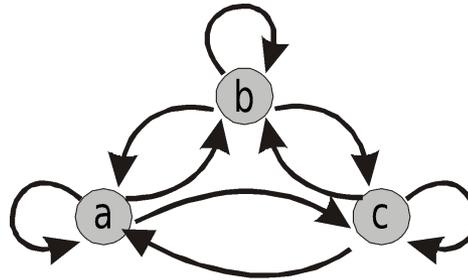




Бинарное отношение эквивалентности

■ Обозначение: R_{\sim}

■ Граф

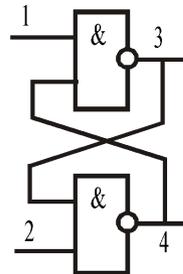
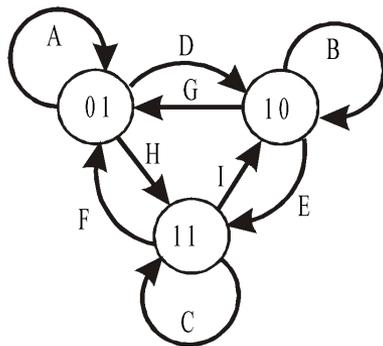


■ Рефлексивность: $x \sim x$

■ Симметричность: $x \sim y \Leftrightarrow y \sim x$

■ Транзитивность: $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$

■ **Пример**



Бинарное
отношение
эквивалентности

и
 R_{\sim}

Рефлексивность

+

Симметричность

ь

+

Транзитивность

ь

Разбиение множества

▪ **Def:** разбиение Γ множества A – семейство непустых попарно непересекающихся подмножеств, объединение которых совпадает с A

▪ Свойства $\Gamma \subset \mathcal{B}(A)$

▪ $\forall K_i \in \Gamma: K_i \neq \emptyset$

▪ $\forall K_i, K_j \in \Gamma: K_i \cap K_j = \emptyset$

▪

$$\bigsqcup_{K_j \in \Gamma} K_j = A$$

▪ Пример

Для трехэлементного множества

$A = \{a, b, c\}$ разбиениями являются

▪ $\Gamma_1 = \{ \{a, b, c\} \}$

▪ $\Gamma_2 = \{ \{a\}, \{b\}, \{c\} \}$

▪ $\Gamma_3 = \{ \{a\}, \{b, c\} \}$

▪ $\Gamma_4 = \{ \{b\}, \{a, c\} \}$

▪ $\Gamma_5 = \{ \{c\}, \{a, b\} \}$

Процедура построения разбиения множества

- Пусть на множестве A задано отношение эквивалентности R_{\sim}

- Выберем элемент $a_1 \in A$ и образуем подмножество (класс) $K_1 \subset A$, состоящий из элемента a_1 и всех элементов, эквивалентных ему:

$$\forall a_1 \in A \exists K_1 \subset A: K_1 = [a_1] = \{x \in A : x \sim a_1\}$$

- Выберем элемент $a_2 \in A$, $a_2 \neq a_1$, и образуем подмножество (класс) $K_2 \subset A$, состоящий из элемента a_2 и всех элементов, эквивалентных ему:

$$\forall a_2 \in A, a_2 \notin K_1 \subset A \exists K_2 \subset A: K_2 = [a_2] = \{x \in A, x \notin K_1 : x \sim a_2\}$$

- Таким образом, получаем систему классов, объединение которых совпадает с множеством A



Классы эквивалентности

- Построенная система классов обладает следующими свойствами:
 - образует разбиение
 - любые два элемента из одного класса эквивалентны
 - любые два элемента из разных классов не эквивалентны

Def: класс эквивалентности $[a]$ элемента a

$$[a] = \{ x \mid x \sim a, x \in A \}$$

- Свойства классов эквивалентности:
 - $a \in [a]$
 - $b \in [a] \Rightarrow [b] = [a]$
 - $[a] \cap [b] = \emptyset,$
 $[a] \cap [b] \neq \emptyset \Rightarrow [a] = [b]$

- $\bigsqcup_{a \in A} [a] = A$

Матрица бинарного отношения эквивалентности



Матрицу бинарного отношения эквивалентности можно представить в блочно-диагональном виде, где каждая подматрица, состоящая из единиц, соответствует классу эквивалентности

	a	b	c	x	y	z
a	1	1	1						
b	1	1	1						
c	1	1	1						
.				1	1				
.				1	1				
.							1	1	1
x							1	1	1
y							1	1	1
z									1

Выводы. 1

- При исследовании возникает задача выбора существенных свойств, деталей, признаков моделируемого объекта. Отношение эквивалентности, с одной стороны, отождествляет второстепенные, несущественные признаки и свойства, и, с другой – выделяет в качестве представителей классов эквивалентности основные свойства.
- Понятия "отношение эквивалентности", "фактор-множество", "классы эквивалентности" используются при построении математической модели некоторой реально функционирующей сложной системы.
- Модель есть некоторое фактор-множество элементов моделируемого объекта относительно некоторого отношения эквивалентности, заданного на исходной системе.

Выводы. 2

- Если моделируемый объект представлен в виде композиции элементов некоторого базисного множества, то вопрос о соотношении модели и ее прообраза разрешается на основе информации об элементах, на которых вводится отношение эквивалентности - либо это сами элементы базисного множества, либо некоторые подмножества элементов, либо подмножества множества подмножеств элементов.



Тест-вопросы

1. Какое из отношений является бинарным:

а) $R \subset M^3$; б) $R \subset M^2$; в) $R = M^2$.

2. Если матрица, описывающая бинарное отношение, содержит на главной диагонали нули и единицы, то отношение:

а) рефлексивно; б) антирефлексивно; в) не рефлексивно.

3. Если все вершины графа, описывающего отношение, имеют петли, то отношение:

а) рефлексивно; б) антирефлексивно; в) не рефлексивно.

4. Если в графе, описывающем отношение, имеется хотя бы одна пара вершин, соединенных одной дугой, является ли данное отношение симметричным?

а) да; б) нет.

5. Классы эквивалентности:

а) попарно пересекаются;
б) попарно не пересекаются.

6. Верно ли, что любые два элемента из одного класса эквивалентности эквивалентны?

а) да; б) нет.