

Лекция 3.

Тема: ДНФ. СДНФ.

Цель: Определить ДНФ, СДНФ, сформировать навык приведения высказывания к ДНФ, СДНФ.

3. Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ)

Определение 1

Конъюнкция логических переменных или их отрицаний называется *элементарной конъюнкцией*.

Пример

$$\overline{AC}, AB, A \vee \overline{C}, \overline{BC}, \overline{ABC}, \overline{B} \cdot \overline{C}, A$$

Определение 2

Высказывание называется *дизъюнктивной нормальной формой (ДНФ)*, если оно представляет собою дизъюнкцию элементарных конъюнкций.

Общий вид ДНФ: $K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K_m$

Примеры

$$AB \vee C$$

$$A \cdot (B \vee C)$$

$$\overline{A}$$

$$A \vee \overline{B}$$

$$\overline{A \vee C}$$

$$\overline{A} \cdot C$$

$$\overline{A}\overline{B}C \vee B\overline{C} \vee \overline{A}$$

Теорема

Любое высказывание приводимо к ДНФ.

Схема приведения высказывания к ДНФ

- 1) Избавиться от импликации и эквивалентности, используя законы 16), 17)
- 2) Донести отрицания до переменных, используя законы Моргана.
- 3) Раскрыть скобки, используя дистрибутивные законы.
- 4) Упростить полученное высказывание.

Пример

Привести высказывание к ДНФ

$$\begin{aligned} F &= AC \rightarrow \bar{B} \leftrightarrow A \rightarrow C\bar{B} = \\ &= \overline{AC} \vee \bar{B} \leftrightarrow \bar{A} \vee C\bar{B} = \\ &= (\overline{AC} \vee \bar{B}) \cdot (\bar{A} \vee C\bar{B}) \vee \overline{\overline{AC} \vee \bar{B}} \cdot \overline{\bar{A} \vee C\bar{B}} = \\ &= (\bar{A} \vee \bar{C} \vee \bar{B}) \cdot (\bar{A} \vee C\bar{B}) \vee ACB \cdot \overline{AC\bar{B}} = \\ &= (\bar{A} \vee C\bar{B}(\bar{C} \vee \bar{B})) \vee ACB \cdot A(\bar{C} \vee B) = \\ &= (\bar{A} \vee C\bar{B}\bar{C} \vee C\bar{B}\bar{B}) \vee ABC\bar{C} \vee ABCB = \\ &= \bar{A} \vee C\bar{B} \vee ABC = \\ &= \bar{A} \vee C\bar{B} \vee BC = \\ &= \bar{A} \vee C(\bar{B} \vee B) = \\ &= \bar{A} \vee C \end{aligned}$$

5. Построение высказываний по таблице истинности. Совершенные дизъюнктивные нормальные формы (СДНФ)

Определение 1

Пусть $X = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ – некоторое множество логических переменных. Элементарная конъюнкция, в которую входят все логические переменные, называется *полной элементарной конъюнкцией* относительно множества X .

Пример

$$X = \{A, B, C\}$$

$$A, \overline{A}\overline{C}, \overline{A}BC, B\overline{A}\overline{C}, B\overline{A}C, \overline{A}BC$$

СДНФ

Определение 2

- Дизъюнктивная нормальная форма называется *совершенной* (СДНФ), если все составляющие ее элементарные конъюнкции являются полными.

Примеры

$$X = \{A, B, C\}$$

$$AB \vee \overline{B}CA \vee \overline{B} \overline{A} \overline{C}$$

$$\overline{A} \overline{B} C \vee \overline{A} B C \vee \overline{A} \overline{B}$$

$$\overline{A} B C \vee A \overline{B} C \vee \overline{A} \overline{B} C$$

$$\overline{A} B C \vee A B C \vee A B C$$

Приведение высказывания к СДНФ

Теорема

Высказывание, не являющееся тождественно ложным, приводимо к СДНФ.

Правило приведения высказывания к СДНФ

- СДНФ содержит столько полных элементарных конъюнкций, сколько единиц в последнем столбце таблицы истинности.
- Вид каждой полной элементарной определяется соответствующим набором значений переменных, а именно, если переменная принимает значение 0, то над ней в полной элементарной конъюнкции ставится отрицание, иначе – отрицание не ставится.

Пример

- Построить по таблице истинности СДНФ

A	B	C	F
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$F = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \vee \bar{A}B\bar{C} \vee A\bar{B}\bar{C} \vee ABC$$

Задача

- «Вернувшись домой, Мегрэ позвонил на набережную Орфевр.
- - Говорит Мегрэ. Есть новости?
- - Да, шеф. Поступили сообщения от инспекторов.
- Торранс установил, что если Франсуа был пьян, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет.
- Жуссье считает, что или Этьен убийца, или Франсуа не был пьян и убийство произошло после полуночи.
- Инспектор Люка просил передать Вам, что если убийство произошло после полуночи, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет.
- Затем звонила ...
- - Все. Спасибо. Этого достаточно. – Комиссар положил трубку. Он знал, что трезвый Франсуа никогда не лжет. Теперь он знал все.»
- Что знал Мегрэ?

Решение задачи

- Пусть
- P = «Франсуа был пьян»
- L = «Франсуа лжет»
- I = «Этьен убийца»
- U = «Убийство произошло после полуночи»
- Тогда получим высказывание

$$\begin{aligned}(P \rightarrow I \vee L)(I \vee \bar{P}U)(U \rightarrow I \vee L) &= 1 \\ (\bar{P} \vee I \vee L)(I \vee \bar{P}U)(\bar{U} \vee I \vee L) &= \\ = I \vee (\bar{P} \vee L)\bar{P}U(\bar{U} \vee L) &= \\ = I \vee \bar{P}UL &\end{aligned}$$

• Так как $\bar{P}UL = 0$, то Этьен - убийца

- **Вопросы:**
- Является ли СДНФ-ДНФ?
- Можно ли построить СДНФ для высказывания, в таблице истинности которого отсутствуют 1?