Кафедра математики и моделирования
Старшие преподаватели Е.Д. Емцева и Е.Г. Гусев
Курс «Высшая математика»

Лекция 3.

Тема: ДНФ. СДНФ.

Цель: Определить ДНФ, СДНФ, сформировать навык приведения высказывания к ДНФ, СДНФ.

3. Дизъюнктивные нормальные формы (ДНФ)

Определение 1

Конъюнкция логических переменных или их отрицаний называется *элементарной конъюнкцией*.

Пример

$$\overline{AC},\ AB,\ A \vee \overline{C},\ \overline{B}C,\ \overline{A}B\overline{C},\ \overline{\overline{B} \cdot C},\ \mathrm{A}$$

Определение 2

Высказывание называется *дизъюнктивной нормальной формой* (**ДНФ**), если оно представляет собою дизъюнкцию элементарных конъюнкций.

Общий вид ДНФ: $K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_m$

Примеры

$$AB \vee C$$

$$A \cdot (B \vee C)$$

$$\overline{A}$$

$$A \vee \overline{B}$$

$$\overline{A \vee C}$$

$$\overline{A} \cdot C$$

$$A\overline{B}C \vee B\overline{C} \vee \overline{A}$$

Теорема

Любое высказывание приводимо к ДНФ.

Схема приведения высказывания к ДНФ

1) Избавиться от импликации и эквивалентности, используя законы 16), 17)
2) Донести отрицания до переменных, используя законы Моргана.
3) Раскрыть скобки, используя дистрибутивные законы.
4) Упростить полученное высказывание.

Пример

Привести высказывание к ДНФ

$$F = AC \to \overline{B} \leftrightarrow A \to C\overline{B} =$$

$$= \overline{AC} \vee \overline{B} \leftrightarrow \overline{A} \vee C\overline{B} =$$

$$= \left(\overline{AC} \vee \overline{B}\right) \cdot \left(\overline{A} \vee C\overline{B}\right) \vee \overline{\overline{AC} \vee \overline{B}} \cdot \overline{\overline{A} \vee C\overline{B}} =$$

$$= \left(\overline{A} \vee \overline{C} \vee \overline{B}\right) \cdot \left(\overline{A} \vee C\overline{B}\right) \vee ACB \cdot A\overline{C\overline{B}} =$$

$$= \left(\overline{A} \vee C\overline{B}(\overline{C} \vee \overline{B})\right) \vee ACB \cdot A(\overline{C} \vee B) =$$

$$= \left(\overline{A} \vee C\overline{B}\overline{C} \vee C\overline{B}\overline{B}\right) \vee ABC\overline{C} \vee ABCB =$$

$$= \overline{A} \vee C\overline{B} \vee ABC =$$

$$= \overline{A} \vee C\overline{B} \vee BC =$$

$$= \overline{A} \vee C(\overline{B} \vee B) =$$

$$= \overline{A} \vee C$$

5.Построение высказываний по таблице истинности. Совершенные дизъюнктивные нормальные формы (СДНФ)

Определение 1

Пусть $X = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ – некоторое множество логических переменных. Элементарная конъюнкция, в которую входят все логические переменные, называется *полной элементарной конъюнкцией* относительно множества X .

Пример

$$X = \{A, B, C\}$$

$$A,\ A\overline{C},\ ABC,\ B\overline{AC},\ B\overline{A}C,\ \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$

СДНФ

Определение 2

- Дизъюнктивная нормальная форма называется *совершенной* (СДНФ), если все составляющие ее элементарные конъюнкции являются полными.

Примеры

$$X = \{A, B, C\}$$

$$AB \vee B\overline{C}A \vee \overline{B}$$

$$AB\overline{C}$$

$$A\overline{B}C \vee \overline{A}BC \vee \overline{A}\,\overline{B}$$

$$\overline{A}BC \vee AB\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$

$$\overline{A}BC \vee AB\overline{C} \vee \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$

Приведение высказывания к СДНФ

Теорема

Высказывание, не являющееся тождественно ложным, приводимо к СДНФ.

Правило приведения высказывания к СДНФ

- СДНФ содержит столько полных элементарных конъюнкций, сколько единиц в последнем столбце таблице истинности.
- Вид каждой полной элементарной определяется соответствующим набором значений переменных, а именно, если переменная принимает значение 0, то над ней в полной элементарной конъюнкцией ставится отрицание, иначе – отрицание не ставится.

Пример

- Построить по таблице истинности СДНФ

A	*B*	*C*	*F*
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

$$F = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} \vee \overline{A}B\overline{C} \vee AB\overline{C} \vee ABC$$

Задача

- «Вернувшись домой, Мегрэ позвонил на набережную Орфевр.
- - Говорит Мегрэ. Есть новости?
- - Да, шеф. Поступили сообщения от инспекторов.
- Торранс установил, что если Франсуа был пьян, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет.
- Жуссье считает, что или Этьен убийца, или Франсуа не был пьян и убийство произошло после полуночи.
- Инспектор Люка просил передать Вам, что если убийство произошло после полуночи, то либо Этьен убийца, либо Франсуа лжет.
- Затем звонила …
- - Все. Спасибо. Этого достаточно. – Комиссар положил трубку. Он знал, что трезвый Франсуа никогда не лжет. Теперь он знал все.»
- Что знал Мегрэ?

Решение задачи

- Пусть
- P=« Франсуа был пьян»
- L=«Франсуа лжет»
- I=«Этьен убийца»
- U=«Убийство произошло после полуночи»
- Тогда получим высказывание

$$(P \to I \vee L)(I \vee \overline{P}U)(U \to I \vee L) = 1$$

$$(\overline{P} \vee I \vee L)(I \vee \overline{P}U)(\overline{U} \vee I \vee L) =$$

$$= I \vee (\overline{P} \vee L)\overline{P}U(\overline{U} \vee L) =$$

$$= I \vee \overline{P}UL$$

•Так как $\overline{P}UL = 0$, то Этьен - убийца

- **Вопросы:**
- Является ли СДНФ-ДНФ?
- Можно ли построить СДНФ для высказывания, в таблице истинности которого отсутствуют 1?