Научно-исследовательская работа
по математике на тему:

«Дополнения к значениям тригонометрических функций»

**Автор: Гарсаян Гоар Юрьевна,
МОУ «СОШ №21», 10 класс, г. Подольск, МО**

**Научный руководитель: Буянова Анна Матвеевна,
учитель математики МОУ «СОШ №21», г. Подольск, МО**

Цели и задачи работы:

Нахождение способов вычисления значений тригонометрических функций нестандартных углов;

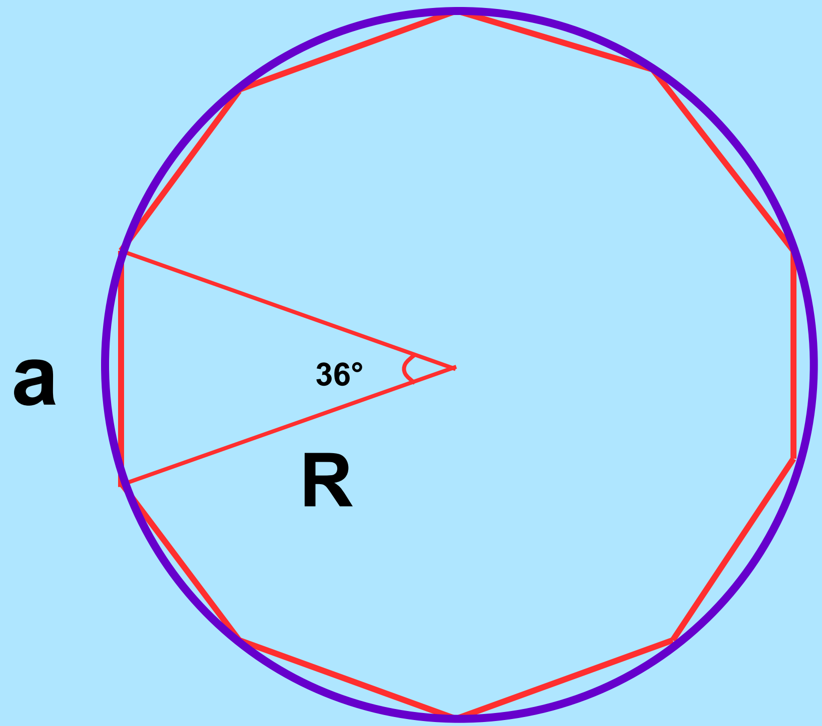
Изучение литературы о тригонометрии

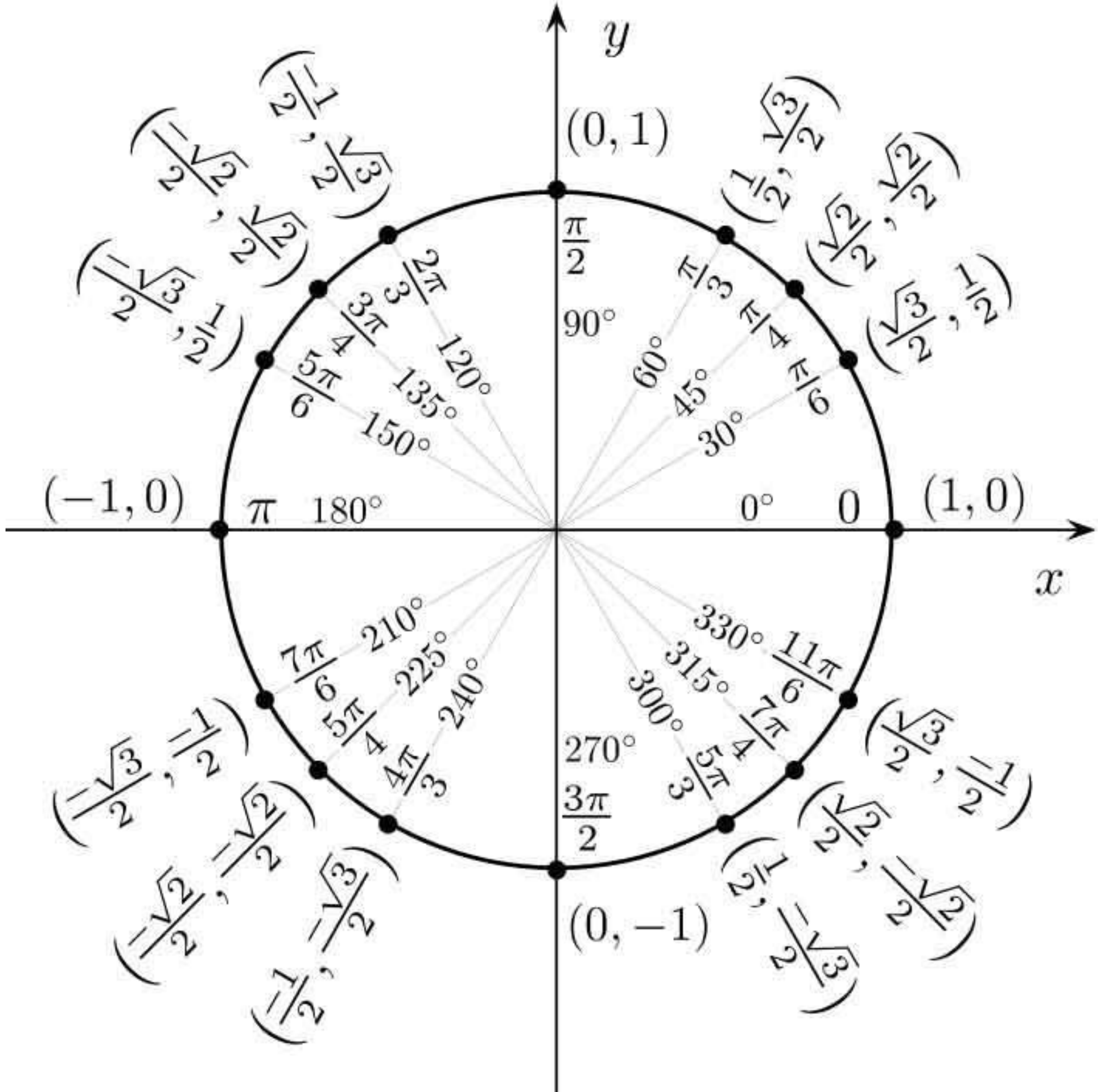
Рассмотрение различных путей построения правильных многоугольников

Задача, предлагаемая на олимпиаде в МГТУ им. Н.Э. Баумана в 9 классе

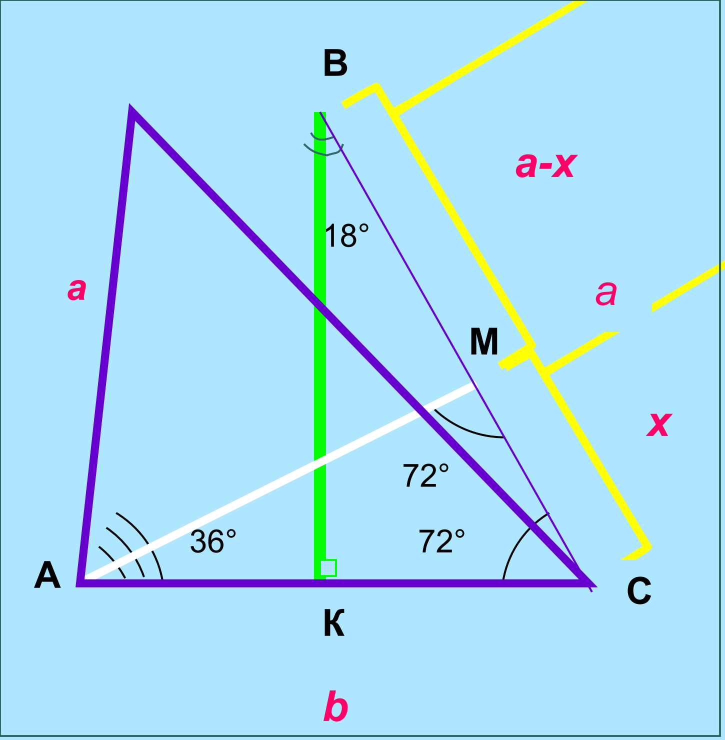
Правильный десятиугольник со стороной 2 см вписан в окружность. Не пользуясь калькулятором и таблицами, найдите точное значение

выражения $(\sqrt{5}-1)R$***, где R-радиус описанной вокруг десятиугольника окружности.***





y
x
$(0,1)$
$(1,0)$
$(-1,0)$
$(0,-1)$
$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$
$\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{-1}{2}\right)$
0 0°
$\frac{\pi}{6}$ 30°
$\frac{\pi}{4}$ 45°
$\frac{\pi}{3}$ 60°
$\frac{\pi}{2}$ 90°
$\frac{2\pi}{3}$ 120°
$\frac{3\pi}{4}$ 135°
$\frac{5\pi}{6}$ 150°
π 180°
$\frac{7\pi}{6}$ 210°
$\frac{5\pi}{4}$ 225°
$\frac{4\pi}{3}$ 240°
$\frac{3\pi}{2}$ 270°
$\frac{5\pi}{3}$ 300°
$\frac{7\pi}{4}$ 315°
$\frac{11\pi}{6}$ 330°



$\Delta ABC \sim \Delta AMC$

Пусть BC=a, AC=b, MC=x, BM=a-x

$\frac{AC}{BC}=\frac{MC}{AC}$ или $\frac{b}{a}=\frac{x}{b}(1),$

$\frac{AB}{AC}=\frac{MB}{MC}$ или $\frac{a}{b}=\frac{a-x}{x}(2)$

Из ΔKBC $\sin 18^\circ=\frac{KC}{BC}=\frac{b}{2a}$

Из (1) $x=\frac{b^2}{a}$ **Подставим это в (2). Получаем:**

$$\frac{a}{b}=\frac{a-\frac{b^2}{a}}{\frac{b^2}{a}}=\frac{a^2-b^2}{b}=\frac{a^2}{b^2}-1$$

Пусть $z=\frac{b}{a}\rangle 0$ **. Тогда** **z=z^2-1;**

z^2-z-1=0

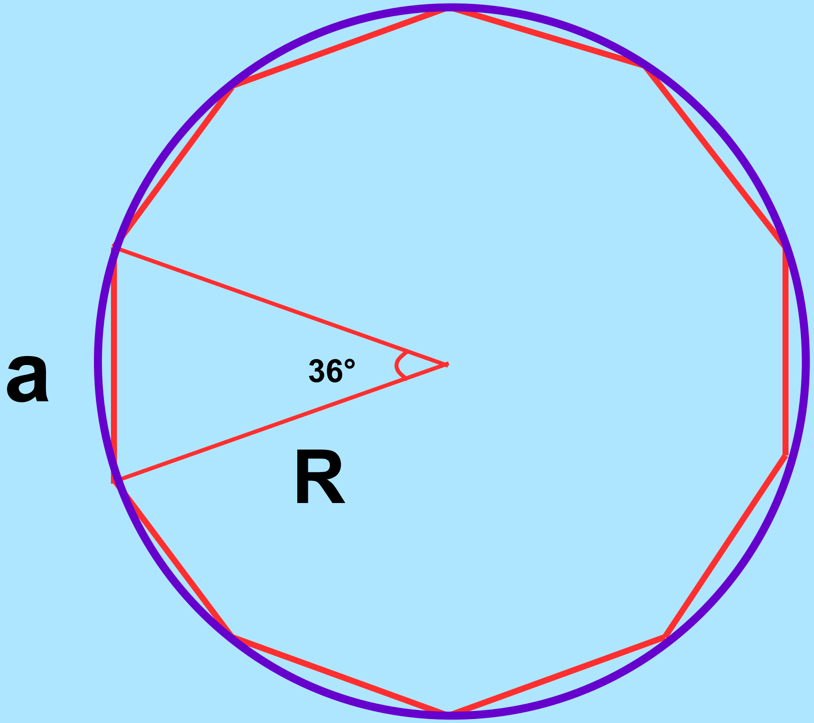
$$z_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{\sin 18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}}$$

Задача, предлагаемая на олимпиаде в МГТУ им. Н.Э. Баумана в 9 классе

Правильный десятиугольник со стороной 2 см вписан в окружность. Не пользуясь калькулятором и таблицами, найдите точное значение

выражения $(\sqrt{5}-1)R$***, где R-радиус описанной вокруг десятиугольника окружности.***



Решение олимпиадной задачи:

$$a_{10} = 2R\sin\frac{180^\circ}{10}$$

$$a_{10} = 2R\sin 18^\circ = 2R\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{(\sqrt{5}-1)R}{2}$$

$$2 = \frac{(\sqrt{5}-1)R}{2}$$

Ответ: $(\sqrt{5}-1)R = 4$

Нахождение значений тригонометрических функций нестандартных углов

$$\cos 18^{\circ} = \sqrt{1-\sin^2 18^{\circ}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

$$tg18^{\circ} = \frac{\sin 18^{\circ}}{\cos 18^{\circ}} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \bullet \frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

$$ctg18^{\circ} = \frac{\cos 18^{\circ}}{\sin 18^{\circ}} = \frac{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{\sqrt{5}-1}{4}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \bullet \frac{4}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$$

$$\sin 36^{\circ} = 2\sin 18^{\circ}\cos 18^{\circ} = 2\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}\cdot\frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{5}-1}{4\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$$

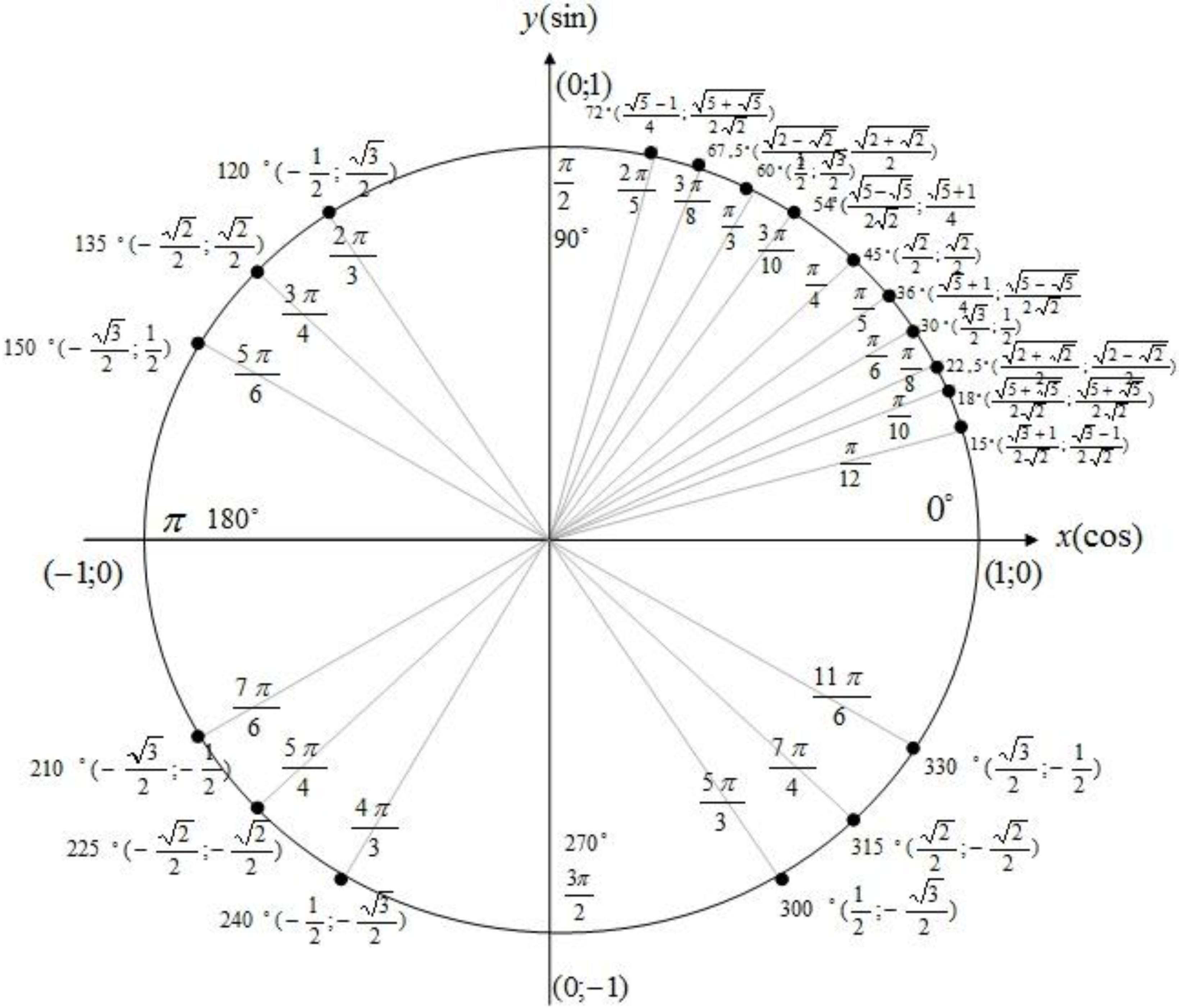
$$\cos 36^{\circ} = 1-\sin^2 36^{\circ} = 1-\frac{5-\sqrt{5}}{16} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$$

$$tg36^{\circ} = \frac{\sin 36^{\circ}}{\cos 36^{\circ}} = \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{4}{\sqrt{5}+1} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

$$ctg36^{\circ} = \frac{\cos 36^{\circ}}{\sin 36^{\circ}} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{5-\sqrt{5}}} = \sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

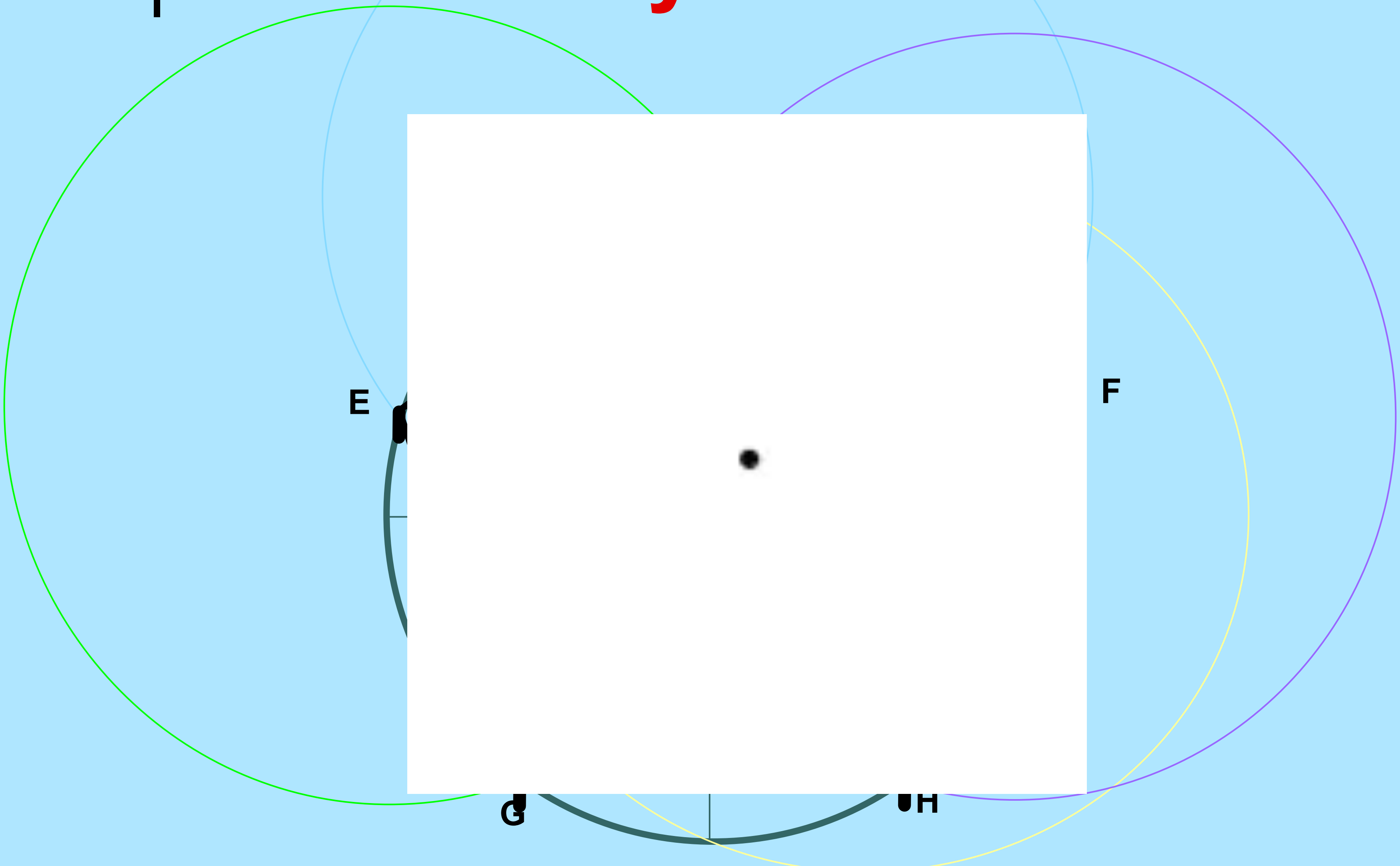
α	0	15° π/12	18° π/10	22.5° π/8	30° π/6	36° π/5	45° π/4	54° 3π/10	60° π/3	72° 2π/5	90° π/2
$\sin\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	0
$tg\alpha$	0	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$	$\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	1	$\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	-
$ctg\alpha$	-	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{5+2\sqrt{5}}$	$\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}$	1	$\sqrt{5-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$	0

α	0° (0 рад)	30° (π/6)	45° (π/4)	60° (π/3)	90° (π/2)
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-
$ctg\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

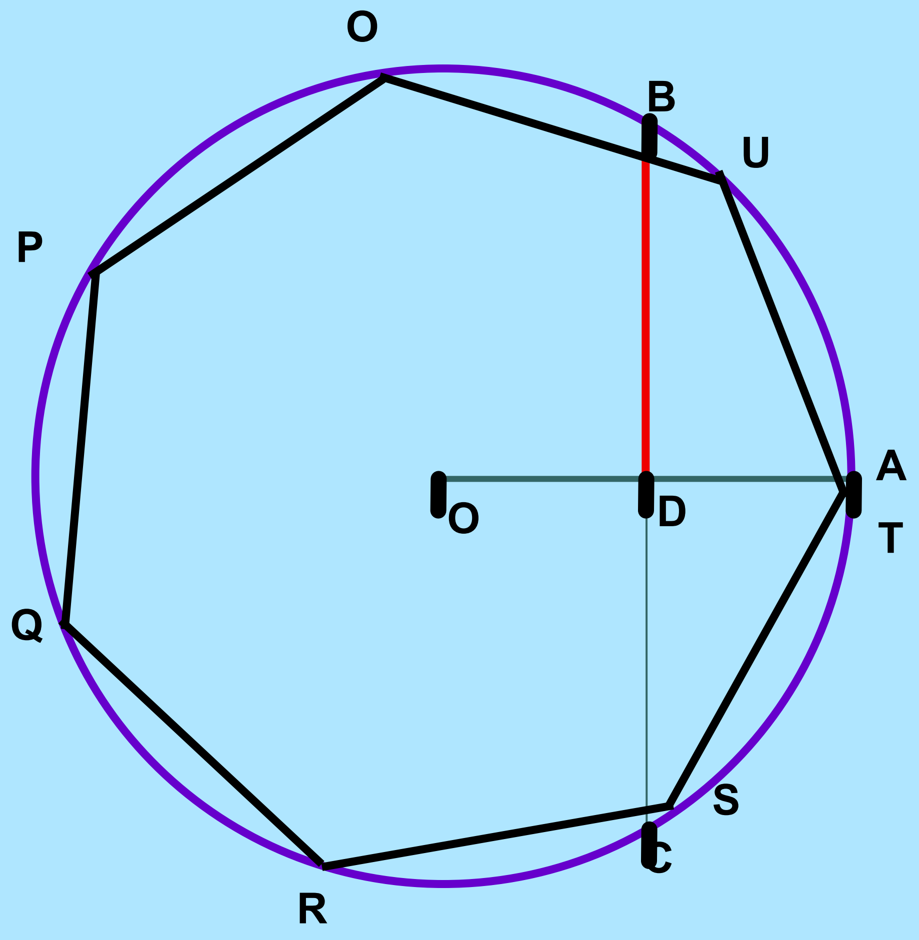


$y(\sin)$
$(0;1)$
$72^\circ\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4};\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\right)$
$67{,}5^\circ\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2};\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)$
$60^\circ\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$54^\circ\left(\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}};\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)$
$45^\circ\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$36^\circ\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4};\frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}}\right)$
$30^\circ\left(\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$
$22{,}5^\circ\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2};\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)$
$18^\circ\left(\frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}};\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)$
$15^\circ\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}};\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)$
$\frac{\pi}{2}$ 90°
$\frac{2\pi}{5}$ $\frac{3\pi}{8}$ $\frac{\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{10}$ $\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{5}$ $\frac{\pi}{6}$ $\frac{\pi}{8}$ $\frac{\pi}{10}$ $\frac{\pi}{12}$
0°
$x(\cos)$
$(1;0)$
$120^\circ\left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$135^\circ\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$150^\circ\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};\frac{1}{2}\right)$
$\frac{2\pi}{3}$ $\frac{3\pi}{4}$ $\frac{5\pi}{6}$
π 180°
$(-1;0)$
$\frac{7\pi}{6}$ $\frac{5\pi}{4}$ $\frac{4\pi}{3}$
$210^\circ\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$
$225^\circ\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$240^\circ\left(-\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
270° $\frac{3\pi}{2}$
$(0;-1)$
$\frac{5\pi}{3}$ $\frac{7\pi}{4}$ $\frac{11\pi}{6}$
$300^\circ\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$315^\circ\left(\frac{\sqrt{2}}{2};-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$330^\circ\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2}\right)$

Построение правильного пятиугольника



Построение правильного семиугольника



Другие способы построения правильных многоугольников

$2^n + 1$ ($17=2^4+ 1$, $257=2^8+$l)

1) множителей вида $2^n+ 1$
2) множителя 2 в какой угодно степени.

(170=2·5·17)

$$\approx \frac{360}{7} \approx 51^{\circ}$$

Вывод

В своей работе я:

1. ***Исследовала способы нахождения значений тригонометрических функций нестандартных углов***
2. ***Дополнила таблицу и координатный круг значений тригонометрических функций***
3. ***Рассмотрела способы построения правильных многоугольников и применила их на практике***