

Научно-исследовательская работа  
по математике на тему:



«Дополнения к значениям тригонометрических функций»

**Автор: Гарсян Гоар Юрьевна,  
МОУ «СОШ №21», 10 класс, г. Подольск, МО**

**Научный руководитель: Буянова Анна Матвеевна,  
учитель математики МОУ «СОШ №21», г. Подольск, МО**



# Цели и задачи работы:

*Нахождение способов вычисления значений тригонометрических функций нестандартных углов;*

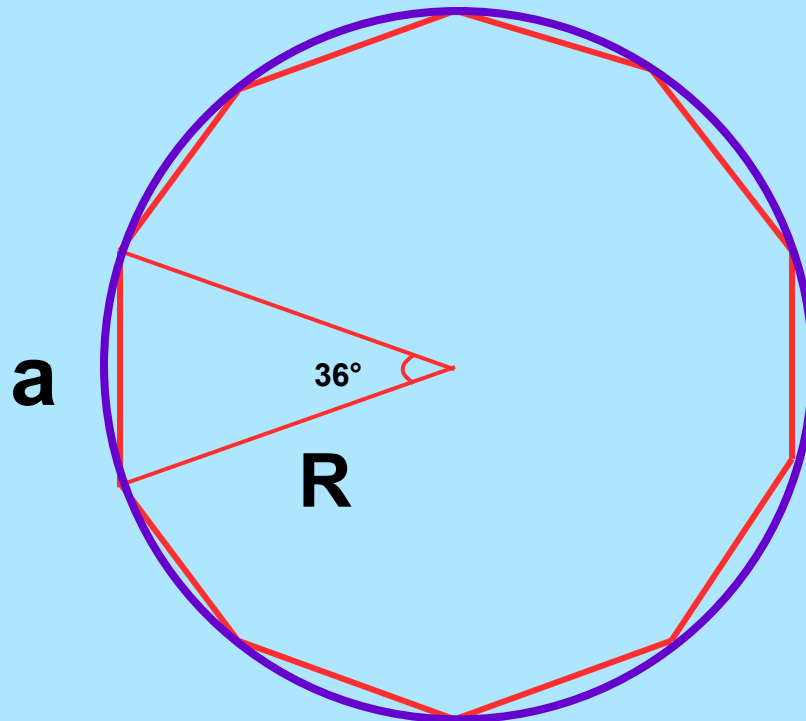
*Изучение литературы о тригонометрии*

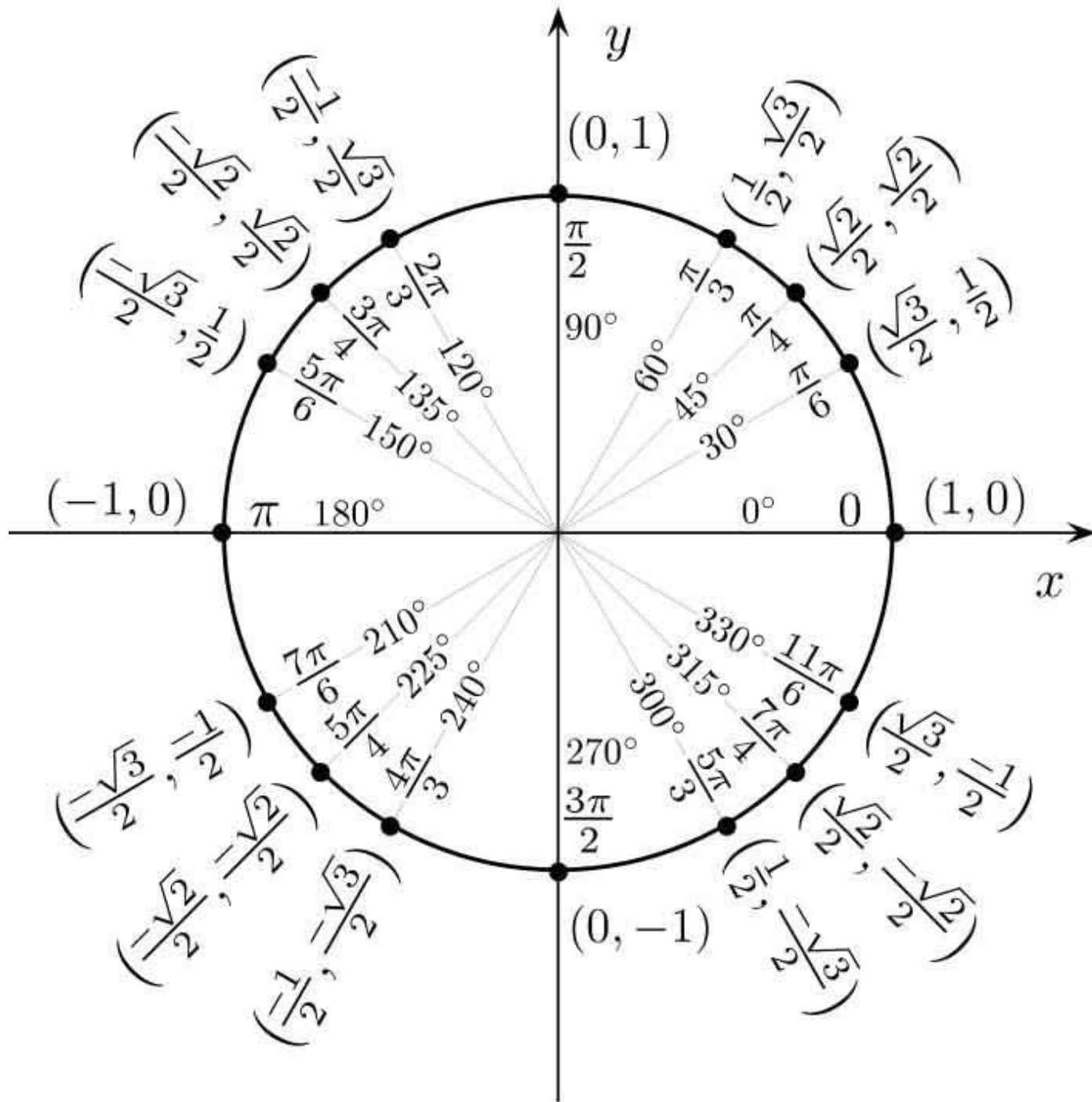
*Рассмотрение различных путей построения правильных многоугольников*

## Задача, предлагаемая на олимпиаде в МГТУ им. Н.Э. Баумана в 9 классе

*Правильный десятиугольник со стороной 2 см вписан в окружность. Не пользуясь калькулятором и таблицами, найдите точное значение*

*выражения  $(\sqrt{5} - 1)R$ , где  $R$ -радиус описанной вокруг десятиугольника окружности.*





$$\triangle ABC \sim \triangle AMC$$

Пусть  $BC=a$ ,  $AC=b$ ,  $MC=x$ ,  $BM=a-x$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{MC}{AC} \quad \text{или} \quad \frac{b}{a} = \frac{x}{b} \quad (1),$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{MB}{MC} \quad \text{или} \quad \frac{a}{b} = \frac{a-x}{x} \quad (2)$$

Из  $\triangle KBC$   $\sin 18^\circ = \frac{KC}{BC} = \frac{b}{2a}$

Из (1)  $x = \frac{b^2}{a}$  Подставим это в (2).

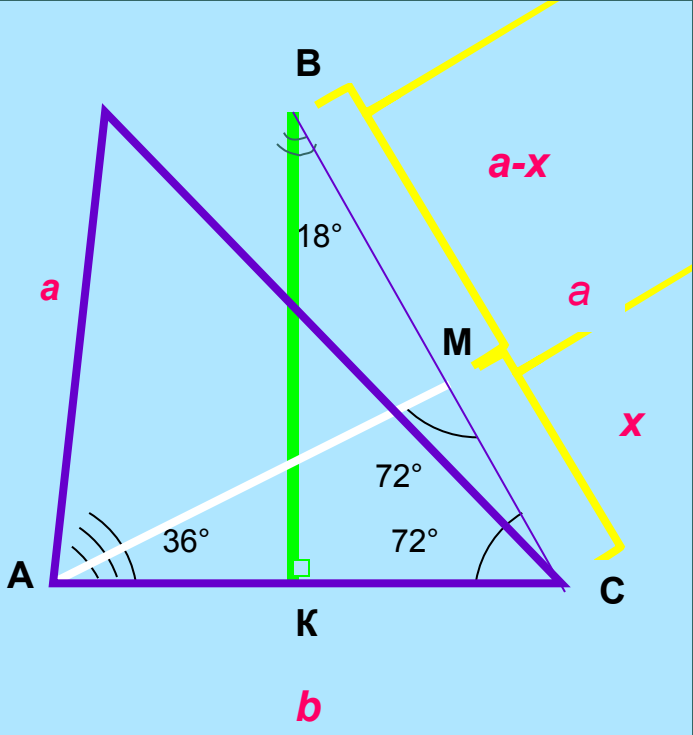
Получаем:

Пусть  $z = \frac{b}{a} > 0$ . Тогда  $z = z^2 - 1$ ;  
 $z^2 - z - 1 = 0$

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a - \frac{b^2}{a}}{\frac{b^2}{a}} = \frac{a^2 - b^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} - 1$$



## Задача, предлагаемая на олимпиаде в МГТУ им. Н.Э. Баумана в 9 классе

Правильный десятиугольник со стороной 2 см вписан в окружность. Не пользуясь калькулятором и таблицами, найдите точное значение

выражения  $(\sqrt{5} - 1)R$ , где  $R$ -радиус описанной вокруг десятиугольника окружности.

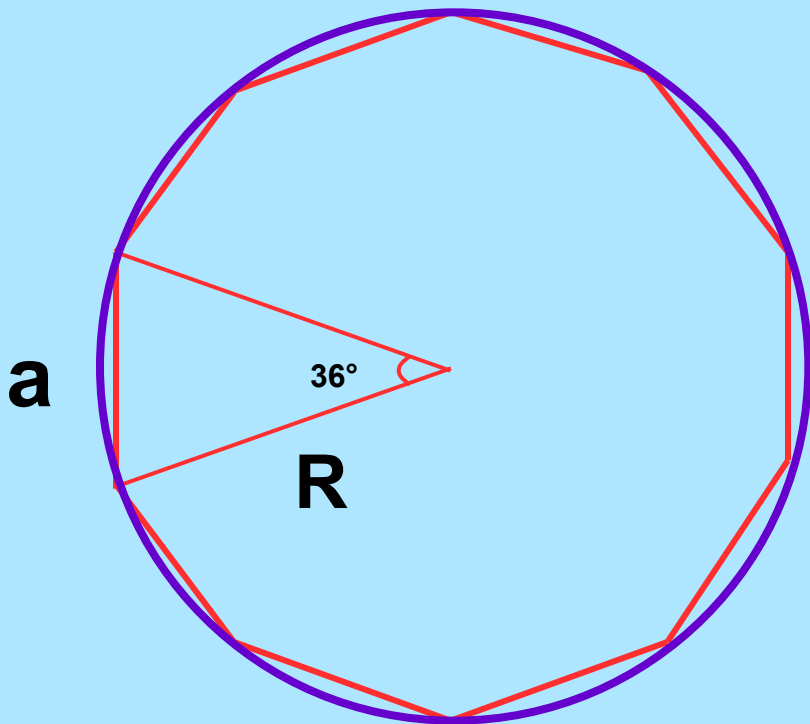
Решение олимпиадной задачи:

$$a_{10} = 2R \sin \frac{180^\circ}{10}$$

$$a_{10} = 2R \sin 18^\circ = 2R \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} = \frac{(\sqrt{5}-1)R}{2}$$

$$2 = \frac{(\sqrt{5}-1)R}{2}$$

Ответ:  $(\sqrt{5}-1)R = 4$



# Нахождение значений тригонометрических функций нестандартных углов

$$\cos 18^\circ = \sqrt{1 - \sin^2 18^\circ} = \frac{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}}{4}$$

$$\operatorname{tg} 18^\circ = \frac{\sin 18^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{5}-1}{4}}{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$$

$$\operatorname{ctg} 18^\circ = \frac{\cos 18^\circ}{\sin 18^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}}{\frac{\sqrt{5}-1}{4}} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{\sqrt{5}-1}$$

$$\sin 36^\circ = 2 \sin 18^\circ \cos 18^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{5}-1}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{2\sqrt{5}-1}{4\sqrt{10+2\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$$

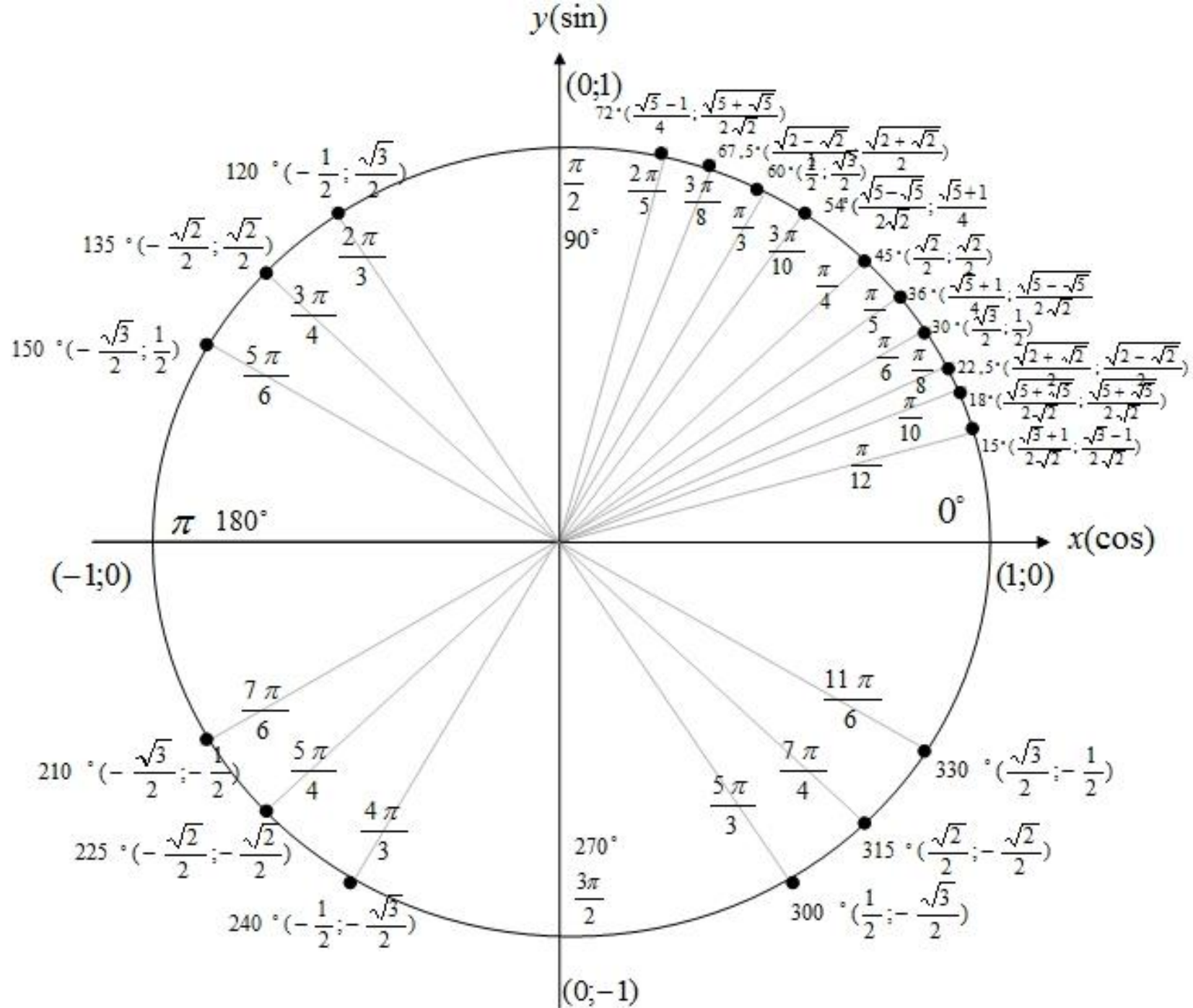
$$\cos 36^\circ = 1 - \sin^2 36^\circ = 1 - \frac{5 - \sqrt{5}}{16} = \frac{\sqrt{5} + 1}{4}$$

$$\operatorname{tg} 36^\circ = \frac{\sin 36^\circ}{\cos 36^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{5}+1}{4}} = \sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

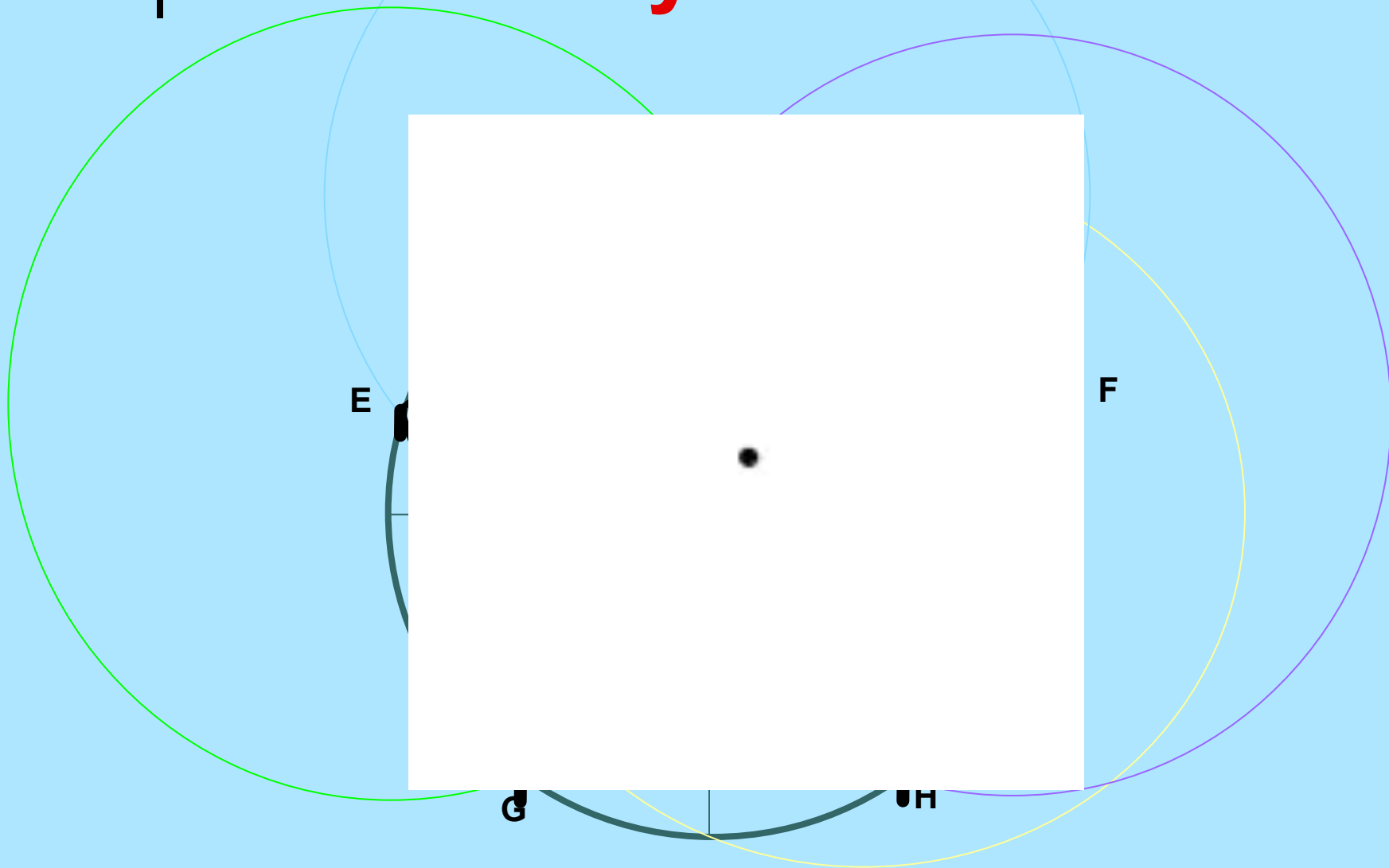
$$\operatorname{ctg} 36^\circ = \frac{\cos 36^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{5}+1}{4}}{\frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{4}} = \sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}$$

$\alpha$	0	15° $\frac{\pi}{12}$	18° $\frac{\pi}{10}$	22.5° $\frac{\pi}{8}$	30° $\frac{\pi}{6}$	36° $\frac{\pi}{5}$	45° $\frac{\pi}{4}$	54° $\frac{3\pi}{10}$	60° $\frac{\pi}{3}$	72° $\frac{2\pi}{5}$	90° $\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{4}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}}$	$\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{5}-2\sqrt{5}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}+\frac{2}{\sqrt{5}}}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{5}+2\sqrt{5}}$	-
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	$\sqrt{5}$	$\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{1+\frac{2}{\sqrt{5}}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}-2\sqrt{5}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{1-\frac{2}{\sqrt{5}}}$	0

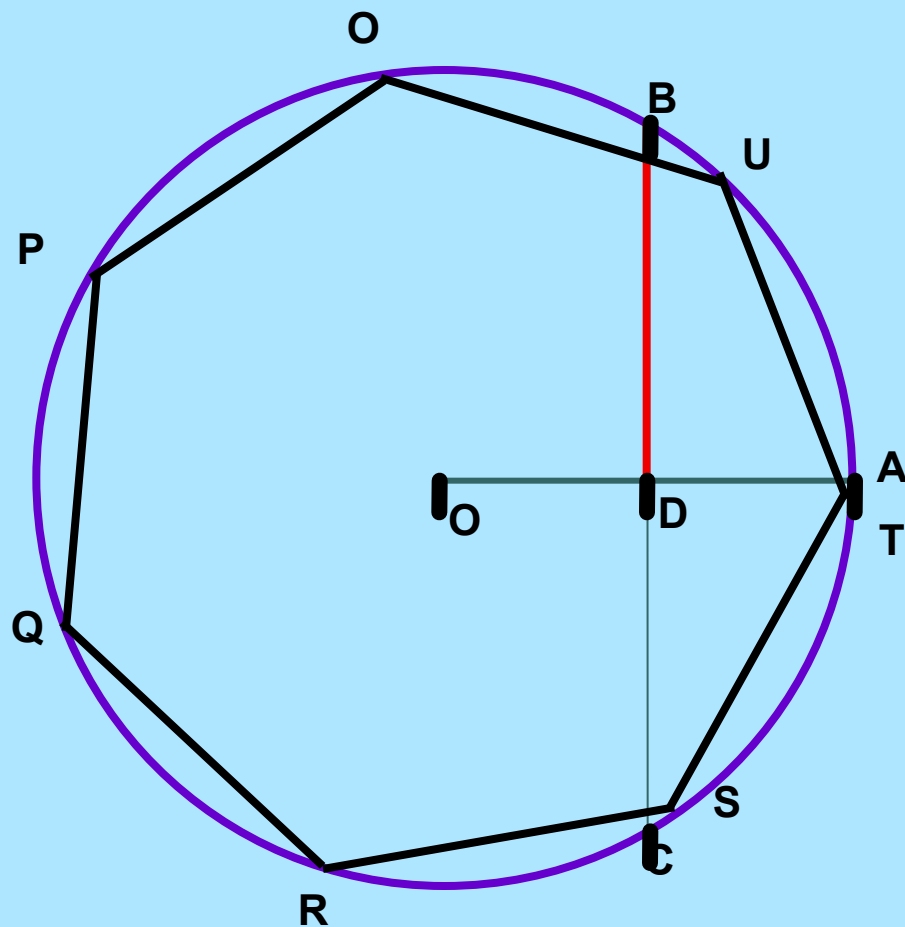


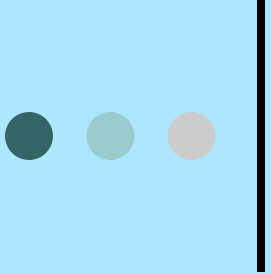


# Построение правильного пятиугольника



# Построение правильного семиугольника





# Другие способы построения правильных многоугольников

$$2^n + 1 \quad (17=2^4+1, 257=2^8+1)$$

- 1) множителей вида  $2^n + 1$
- 2) множителя 2 в какой угодно степени.

$$(170=2 \cdot 5 \cdot 17)$$

$$\approx \frac{360}{7} \approx 51 \square$$



# Вывод

**В своей работе я:**

*1. Исследовала способы нахождения значений тригонометрических функций нестандартных углов*

*2. Дополнила таблицу и координатный круг значений тригонометрических функций*

*3. Рассмотрела способы построения правильных многоугольников и применила их на практике*