Математика

Дополнительные признаки равенства треугольников

Серова Наталья Александровна,
Мурзина Наталья Викторовна,
учителя математики, информатики и ИКТ
г.Омск МОУ «Средняя общеобразовательная школа № 16»

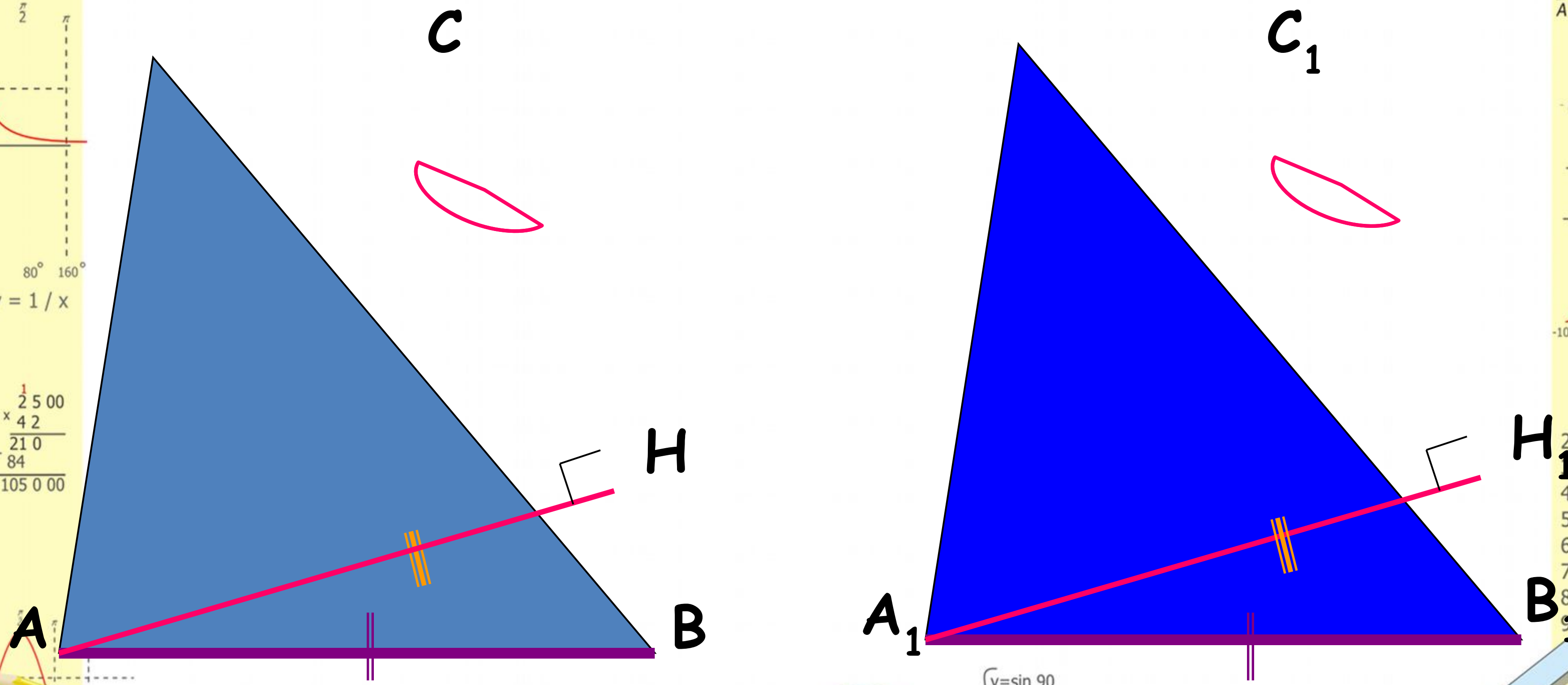
Теорема 1

Если угол, сторона, противолежащая этому углу, и высота, опущенная на другую сторону, одного треугольника соответственно равны углу, стороне и высоте другого треугольника, то такие треугольники равны.

Для доказательства используются признаки равенства прямоугольных треугольников.

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, высота AH равна высоте A_1H_1.

Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$



Доказательство:

Прямоугольные $\triangle ABH$ и $\triangle A_1B_1H_1$ равны по катету и гипотенузе. Значит, $\angle B = \angle B_1$. Учитывая, что $\angle C = \angle C_1$, имеем равенство $\angle A = \angle A_1$. Таким образом, в $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$

$AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

Следовательно, эти треугольники равны по второму признаку равенства треугольников.

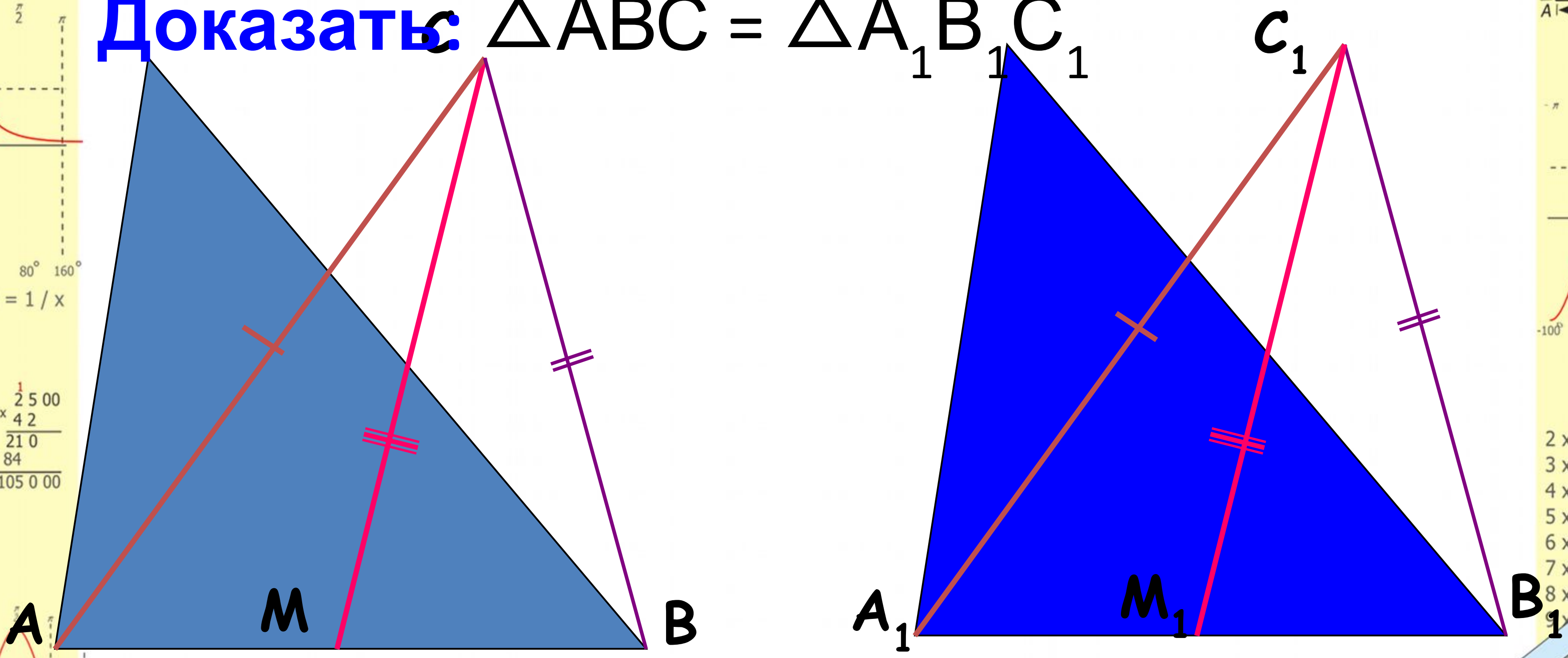
Теорема 2

Если две стороны и медиана, заключенная между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и медиане другого треугольника, то такие треугольники равны.

Теорема 8

Дано: $\triangle$ ABC и $\triangle$ $A_1B_1C_1$, AC = A_1C_1, BC = B_1C_1, медиана CM равна медиане C_1M_1.

Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$



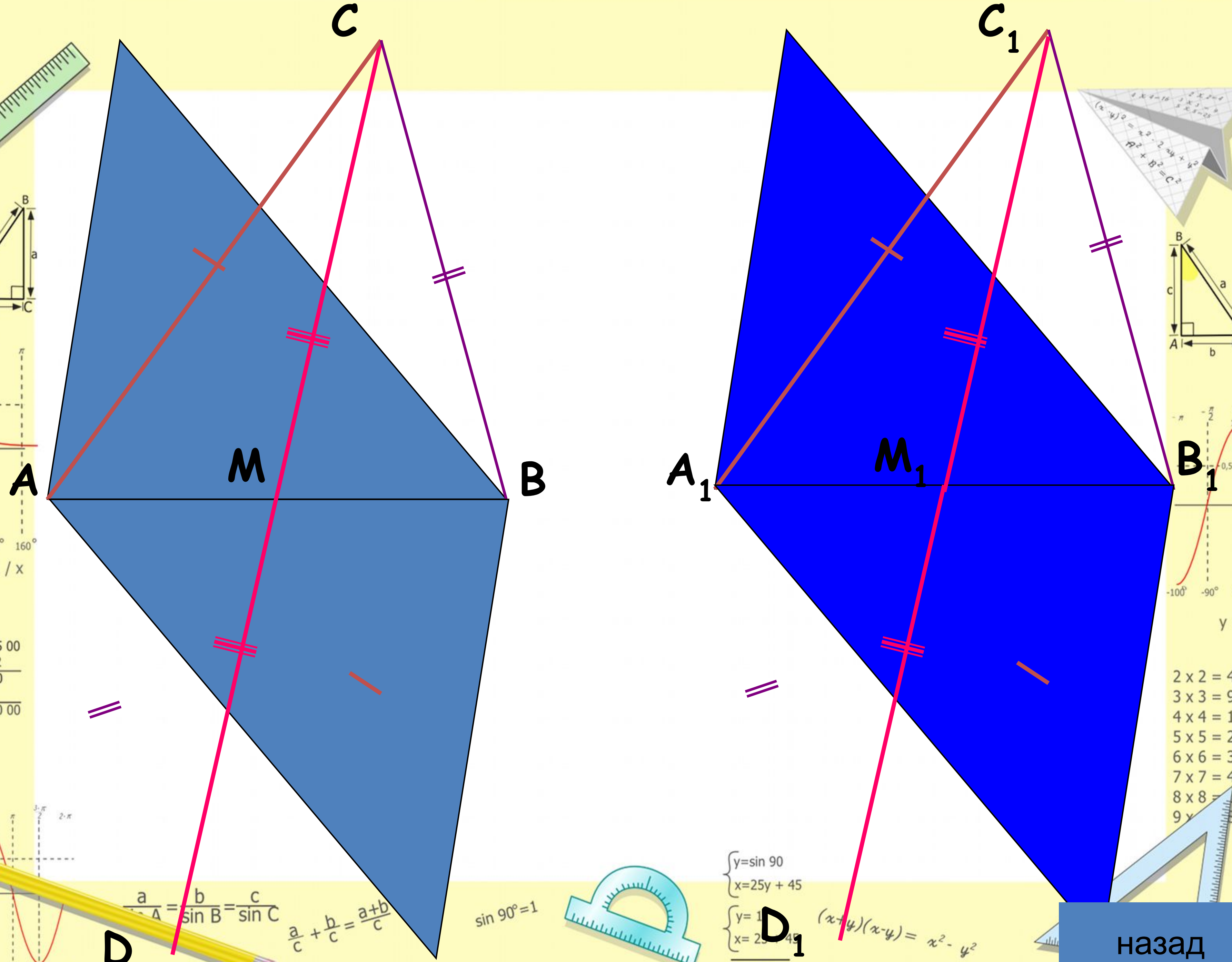
Доказательство

чертеж

Продолжим медианы и отложим отрезки $MD = CM$ и $M_1D_1 = C_1M_1$. Четырехугольники $ACBD$ и $A_1C_1B_1D_1$ — параллелограммы. $\triangle ACD = \triangle A_1C_1D_1$ по трем сторонам. Следовательно, $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$.

Аналогично, $\triangle BCD = \triangle B_1C_1D_1$ по трем сторонам. Следовательно, $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$.

Значит, $\angle C = \angle C_1$ и треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны по двум сторонам и углу между ними (по первому признаку равенства треугольников).



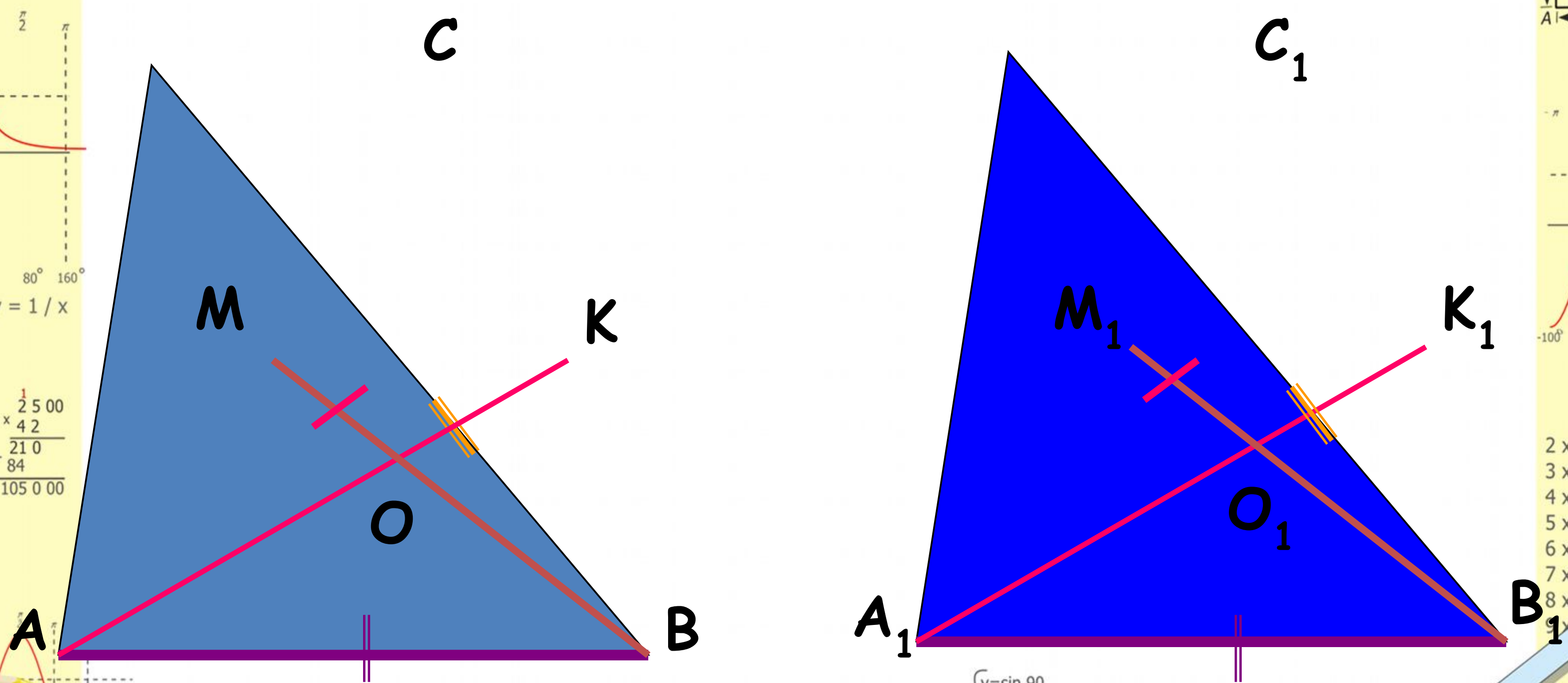
назад

Теорема 3

Если сторона и две медианы, проведенные к двум другим сторонам, одного треугольника соответственно равны стороне и двум медианам другого треугольника, то такие треугольники равны.

Дано: $\triangle$ ABC и $\triangle$ $A_1B_1C_1$, AB = A_1B_1, медианы AM = A_1M_1, BK = B_1K_1.

Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$



Доказательство:

Точки O и O_1 пересечения медиан данных треугольников делят медианы в отношении 2 : 1, считая от вершины. Значит, △ ABO =△ $A_1B_1O_1$ по трем сторонам. Следовательно, ∠ BAO = ∠ $B_1A_1O_1$, значит, △ ABM = △ $A_1B_1M_1$ равны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому ∠ ABC = ∠$A_1B_1C_1$.

Аналогично доказывается, что ∠ BAC = ∠$B_1A_1C_1$.

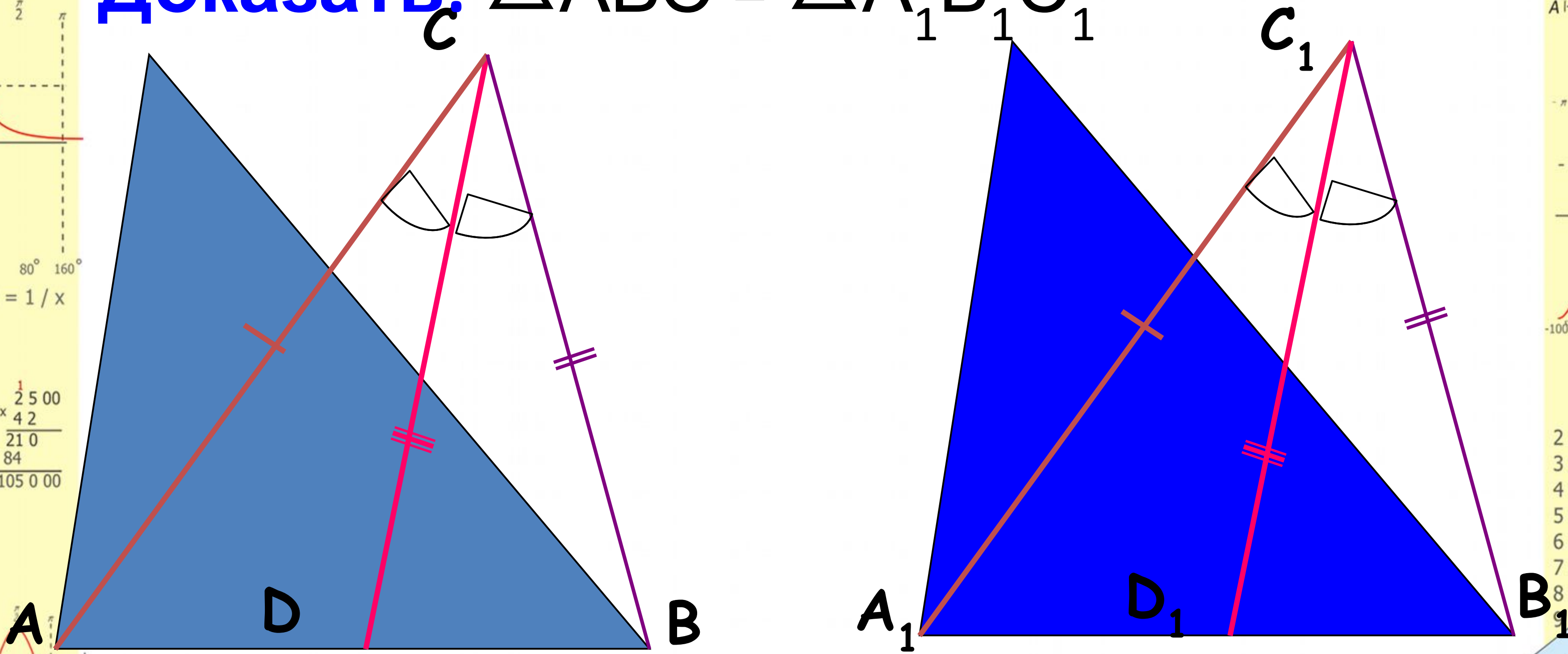
Таким образом, треугольники △ ABC и △ $A_1B_1C_1$ равны по стороне и двум прилежащим к ней углам. Следовательно, △ABC = △$A_1B_1C_1$ равны по второму признаку равенства треугольников.

Теорема 4

Если две стороны и биссектриса, заключенная между ними, одного треугольника соответственно равны двум сторонам и биссектрисе, заключенной между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны.

- **Дано:** $\triangle$ ABC и $\triangle$ $A_1B_1C_1$, AC = A_1C_1, BC = B_1C_1, биссектриса CD равна биссектрисе C_1D1.

Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$



Доказательство

чертеж

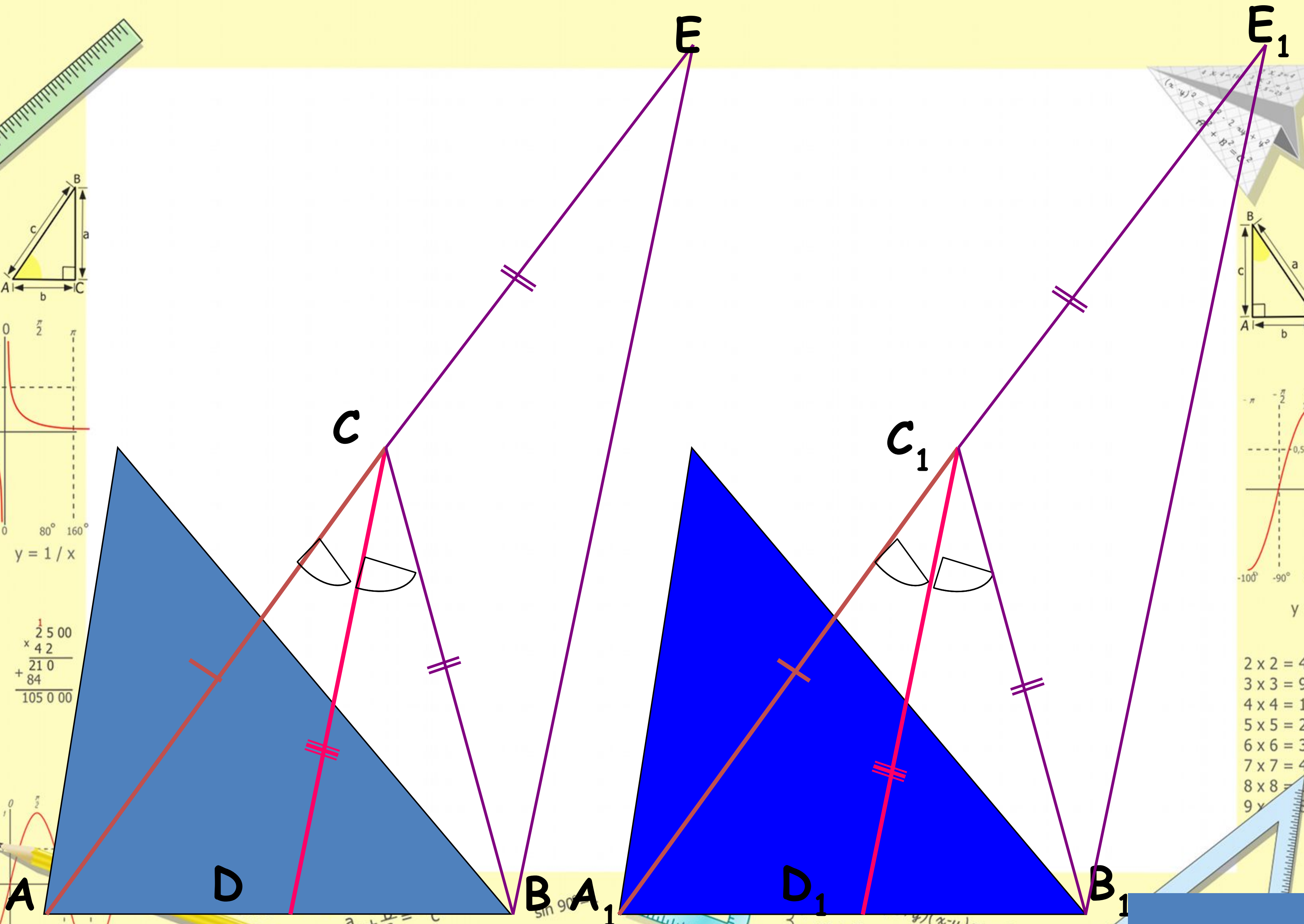
Продолжим стороны AC и A_1C_1 и отложим на их продолжениях отрезки $CE = BC$ и $C_1E_1 = B_1C_1$.

Тогда $BE = CD\dfrac{AE}{AC}$, $B_1E_1 = C_1D_1\dfrac{A_1E_1}{A_1C_1}$

$\triangle BCE = \triangle B_1C_1E_1$ по трем сторонам. Значит, $\angle E = \angle E_1$ и $BE = B_1E_1$.

$\triangle ABE = \triangle A_1B_1E_1$ по двум сторонам и углу между ними. Значит, $AB = A_1B_1$.

Таким образом, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по трем сторонам (3 признак равенства треугольников).



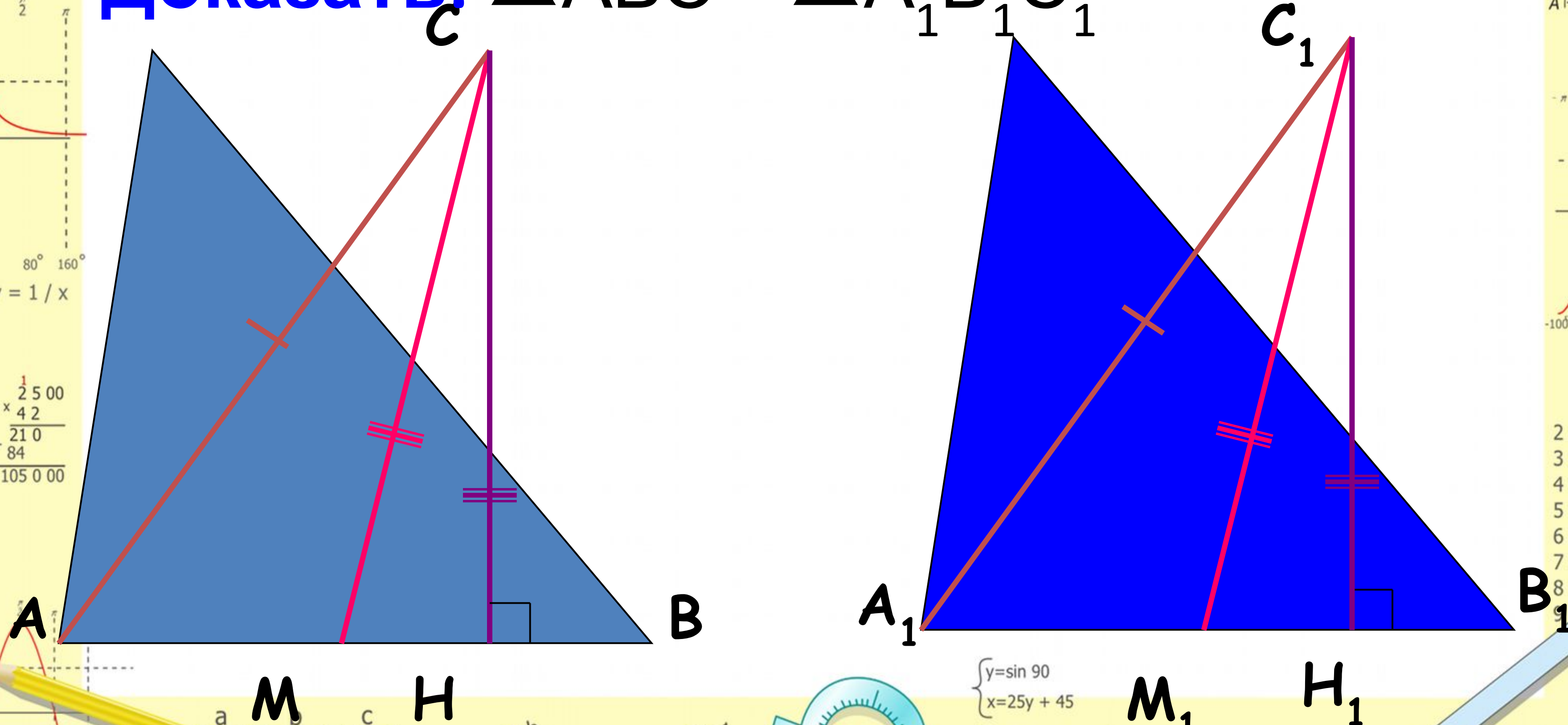
назад

Теорема 5

Два треугольника равны, если сторона, медиана и высота, проведенные к другой стороне, одного треугольника соответственно равны стороне, медиане и высоте другого треугольника.

Дано: $\triangle$ ABC и $\triangle$ $A_1B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $AC = A_1C_1$, медианы CM и C_1M_1 равны, высоты CH и C_1H_1 равны .

Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$



Доказательство:

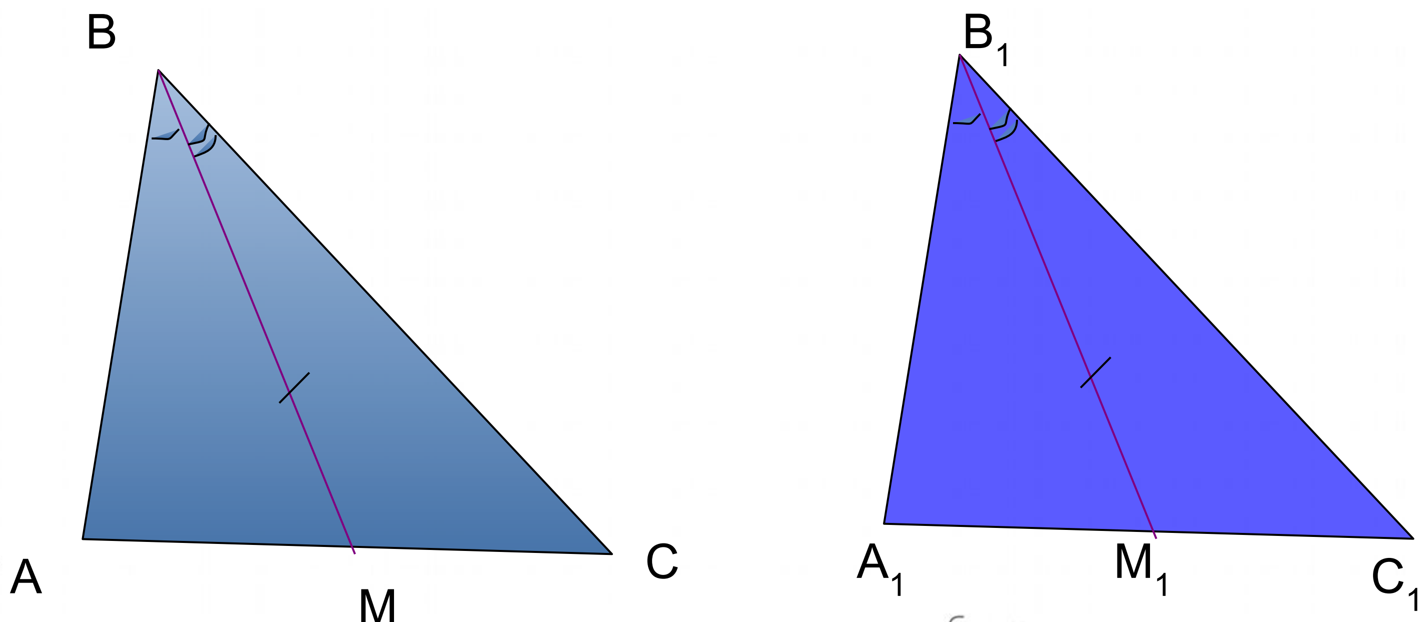
Прямоугольные $\triangle ACH = \triangle A_1C_1H_1$ по гипотенузе и катету. Следовательно, $\angle A = \angle A_1$ и $AH = A_1H_1$. Прямоугольные треугольники $\triangle CMH = \triangle C_1M_1H_1$ по гипотенузе и катету. Следовательно, $MH = M_1H_1$, откуда $AM = A_1M_1$, значит, $AB = A_1B_1$. Таким образом, $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по двум сторонам и углу между ними (по первому признаку равенства треугольников).

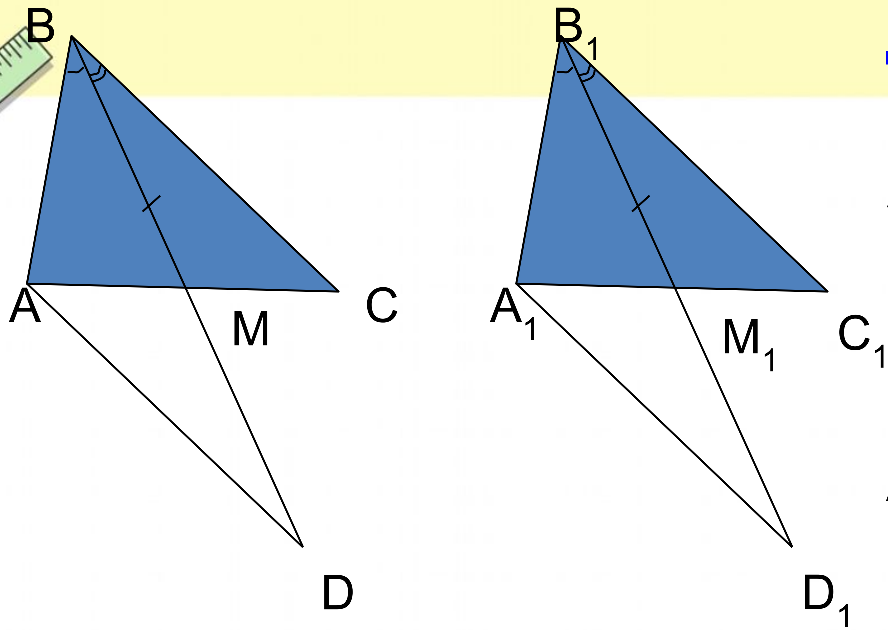
Теорема 6

Два треугольника равны, если медиана и два угла на которые делит угол медиана, одного треугольника соответственно равны медиане и двум углам, на которые делит медиана угол другого треугольника.

Дано: $\triangle$ ABC и $\triangle$ $A_1B_1C_1$, $BM=B_1M_1$, $\angle ABM = \angle A_1B_1M_1$, $\angle CBM = \angle C_1B_1M_1$.

Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$





Доказательство:

В данных треугольниках удвоим медианы BM=MD и $B_1M_1=M_1D_1$.

1. $\Delta AMD = \Delta CMB$, $\Delta A_1M_1D_1 = \Delta C_1M_1B_1$ (по 1 признаку)

Из равенства этих треугольников следуют равенства: $AD=BC$, $A_1D_1=B_1C_1$ и $\angle ADM = \angle CBM$, $\angle A_1D_1M_1 = \angle C_1B_1M_1$

2. $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$ (по 2 признаку)

Из равенства этих треугольников следуют равенства: $AB=A_1B_1$, а значит, $BC=AD=B_1C_1=A_1D_1$

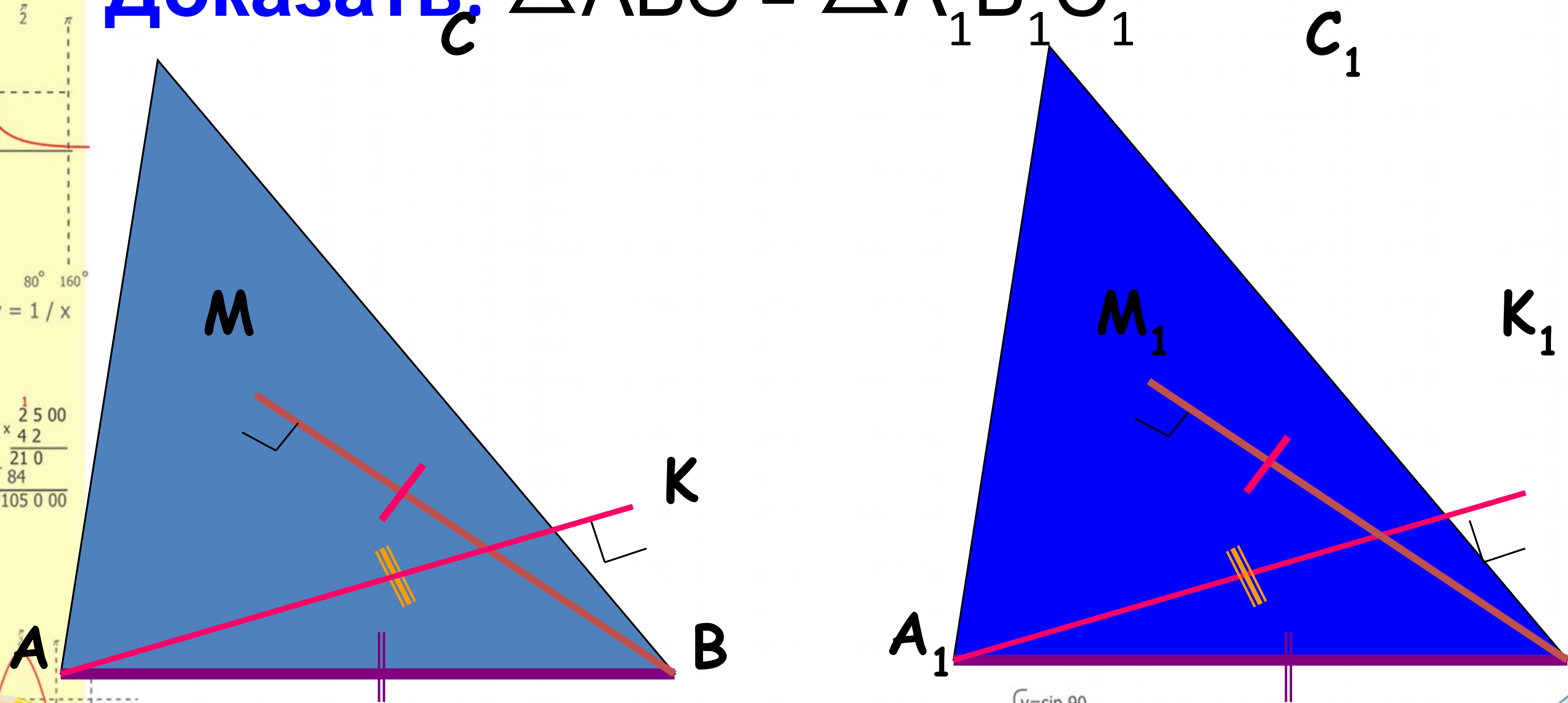
3. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (по первому признаку равенства треугольников)

Теорема 7

Два треугольника равны, если сторона, и две высоты, опущенные на две другие стороны, одного треугольника соответственно равны стороне и двум высотам, опущенным на две другие стороны другого треугольника.

Дано: $\triangle$ ABC и $\triangle$ $A_1B_1C_1$, AB = A_1B_1, высота AM равна высоте A_1M_1, высота BK равна высоте B_1K_1.

Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$



Доказательство:

Из равенства прямоугольных треугольников $\triangle AMB = \triangle A_1M_1B_1$, $\triangle BKA = \triangle B_1K_1A_1$ (по катету и гипотенузе) следует равенство углов: $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$, $\angle ABC = \angle A_1B_1C_1$.

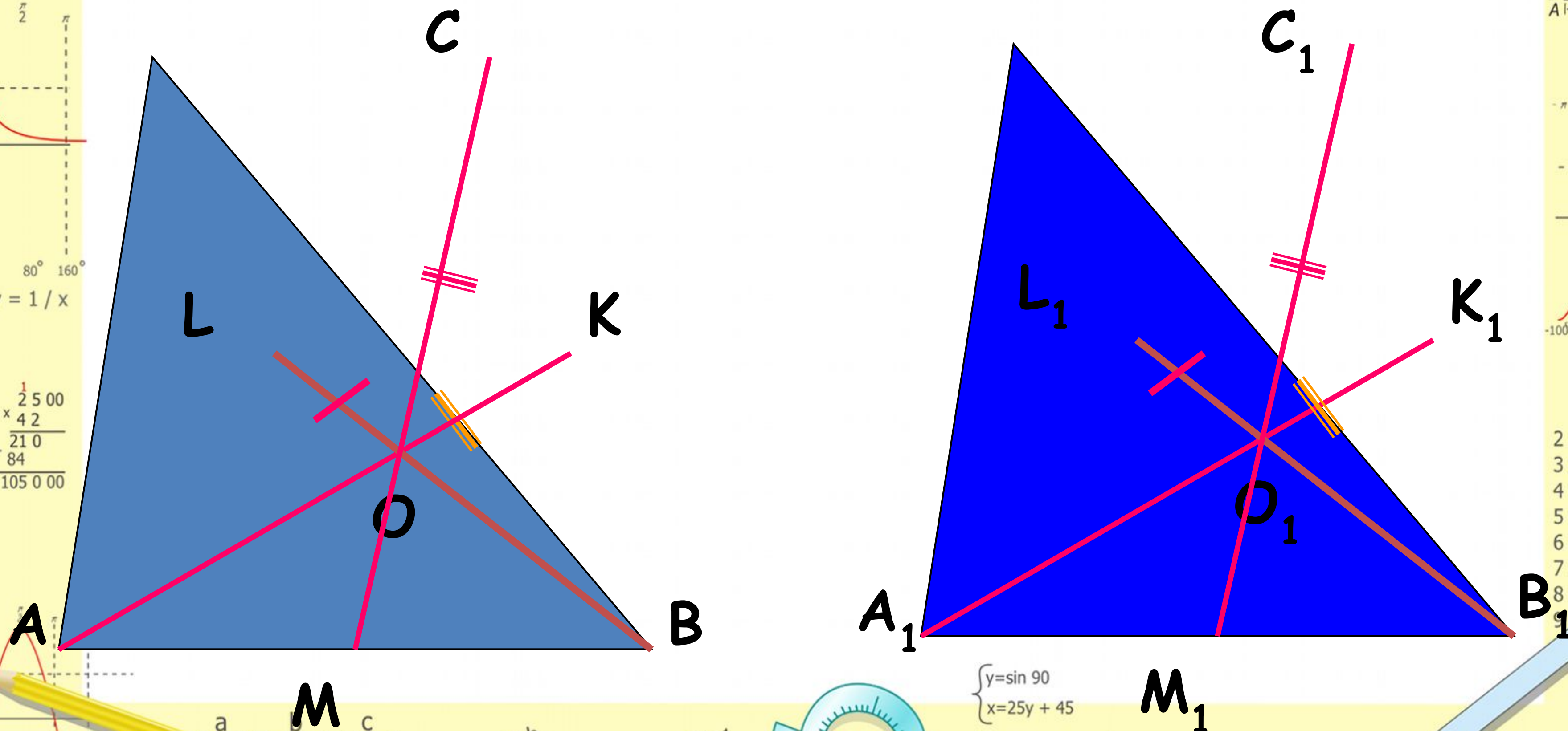
Поэтому $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ по стороне ($AB = A_1B_1$) и двум прилежащим к ней углам (по второму признаку равенства треугольников).

Теорема 8

Два треугольника равны, если три медианы одного треугольника соответственно равны трем медианам другого.

Дано: $\triangle$ ABC и $\triangle$ $A_1B_1C_1$, медианы AK = A_1K_1, BL= B_1L_1, CM = C_1M_1.

Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$



Доказательство:

Пусть O и O1 — точки пересечения медиан данных треугольников. Заметим, что медианы OM и O_1M_1 треугольников $\triangle$ ABO и $\triangle$ $A_1B_1O_1$ равны, так как они составляют одну третью часть соответствующих медиан данных треугольников. Аналогично равны AO И A_1O_1, BO и B_1O_1, так как они составляют две третьих соответствующих медиан данных треугольников.

По признаку равенства треугольников, доказанному нами под номером 2, $\triangle$ ABO = $\triangle$ $A_1B_1O_1$, значит, AB = A_1B_1.

Аналогично доказывается, что BC = B_1C_1 и AC = A_1C_1.

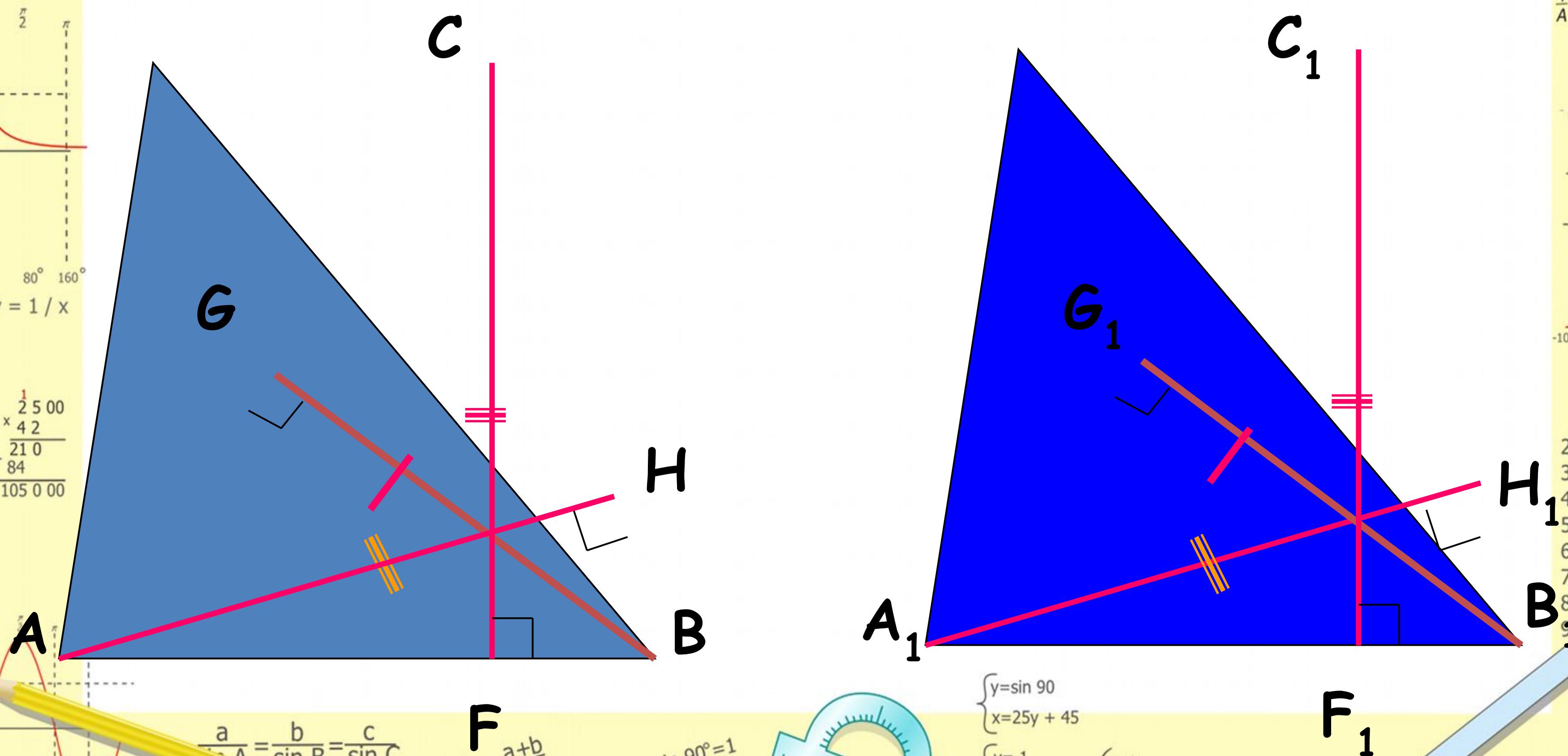
Таким образом, $\triangle$ ABC и $\triangle$ $A_1B_1C_1$ равны по трем сторонам (по третьему признаку равенства треугольников) .

Теорема 9

Два треугольника равны, если три высоты одного треугольника соответственно равны трем высотам другого треугольника.

Дано: $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$, $AB = A_1B_1$, высоты $AH = A_1H_1$, $BG = B_1G_1$, $CF = C_1F_1$.

Доказать: $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$



Доказательство:

Обозначим стороны треугольников соответственно a, b, c и a_1, b_1, c_1, а соответствующие высоты h_a, h_b, h_c и h_{1a}, h_{1b}, h_{1c}.

Имеют место равенства $ah_a = bh_b = ch_c$ и $a_1h_{1a} = b_1h_{1b} = c_1h_{1c}$. Разделив почленно первые равенства на вторые, получим равенства $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$

из которых следует, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны. А так как соответствующие высоты этих треугольников равны, то они не только подобны, но и равны.