Дробные рациональные уравнения

Разбейте на группы

$1)x-1=2-x,\ x=\frac{3}{2}$

$2)(x+1)(x+1)=(2-x)(x+1), x_1=\frac{3}{2}, x_2=-\frac{3}{4}$

$1)3x+5=4, x=-\frac{1}{3}$

$2)3x^2+5x=4\mathrm{x}, \mathrm{x}_1=0, x_2=-\frac{1}{3}$

$1)x-2=4, x=6$

$2)x^2=49, x_1=7, x_2=-7$

$1)(x+1)^2=0, \mathrm{x}=-1$

$2)2x^2-1=0, x_1=\frac{\sqrt{2}}{2}, x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

$1)13x-7=2x-5, x=\frac{2}{11}$

$2)11x=2, x=\frac{2}{11}$

$1)2x^2=2, \mathrm{x}_1=1, x_2=-1$

$2)4x^2-4=0, \mathrm{x}_1=1, x_2=-1$

Рассмотрим две пары уравнений:

$1)13x-7=2x-5, x=\frac{2}{11}$

$2)11x=2, x=\frac{2}{11}$

$1)2x^2=2, x_1=1, x_2=-1$

$2)4x^2-4=0, x_1=1, x_2=-1$

Что вы можете сказать об этих уравнениях?

Что у них общего?

Как называются такие уравнения?

Уравнения называются равносильными, если множества их корней совпадают.

Необходимо отметить, что уравнения не имеющие корней, также являются равносильными.

Переход от данного уравнения к равносильному не влияет на множество корней получающегося уравнения.

Какие основные преобразования выполняли при решении линейных уравнений?

Раскрытие скобок; перенос слагаемых из одной части уравнения в другую, изменяя знак на противоположный; прибавление к обеим частям уравнения выражения, содержащее неизвестную.

Менялись ли при этом их корни?

На основе одного из этих преобразований, а именно: перенос слагаемых из одной части уравнения в другую, меняя при этом знак на противоположный, в 7-м классе сформулировали свойство уравнений. Сформулируйте его, применив новое понятие.

Если какой-нибудь член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.

Какое еще свойство уравнения вы изучали?

Обе части уравнения можно умножать на одно и тоже число, отличное от нуля.

Применение этого свойства также заменяет исходное уравнение на равносильное ему.

Рассмотрим две другие пары уравнений:

$$1)\ x-1=2-x,\ \ x=\frac{3}{2}$$

$$2)\ (x+1)(x+1)=(2-x)(x+1),\ x_1=\frac{3}{2},\ x_2=-\frac{3}{4}$$

$$1)\ 3x+5=4,\ x=-\frac{1}{3}$$

$$2)\ 3x^2+5x=4x,\ x_1=0,\ x_2=-\frac{1}{3}$$

Сравните множество корней уравнений

Видим, что в обоих случаях корень уравнения (1) содержится в множестве корней уравнения (2).

То есть при переходе одного уравнения к другому множество корней хотя и расширилось, но потери корней не произошло. В этом случае уравнение (2) называют *следствием уравнения (1)*. Попытайтесь сформулировать определение уравнения, которое является следствием данного уравнения.

Уравнение (2) называют следствием уравнения (1), если каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2).

Рассмотрим две другие пары уравнений:

$$1)\ x-2=4,\ x=6$$

$$2)\ x^2=49,\ x_1=7,\ x_2=-7$$

$$1)\ (x+1)^2=0,\ \text{x}=\text{-1}$$

$$2)\ 2x^2-1=0,\ x_1=\frac{\sqrt{2}}{2},\ x_2=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Заметим, что множества корней этих уравнений не совпадают. Значит такие уравнения являются неравносильными.

Получили следующие группы

Равносильные уравнения

Неравносильные уравнения

Уравнение (2) является следствием уравнения (1)

$1)\, x-1=2-x$

$2)\, (x+1)(x+1)=(2-x)(x+1)$

$1)\, x-2=4$

$2)\, x^2=49$

$1)\, 13x-7=2x-5,$

$2)\, 11x=2$

$1)\, 3x+5=4$

$2)\, 3x^2+5x=4x$

$1)\, (x+1)^2=0$

$2)\, 2x^2-1=0$

$1)\, 2x^2=2$

$2)\, 4x^2-4=0$

Если обе части уравнения являются рациональным выражением, то такие уравнения называют рациональным уравнением.

Что же такое рациональное выражение?

Целые и дробные выражения называют рациональными выражениями.

(см. § 1. п.1. учебника)

Пример целых выражений:

$7a^2$b; $\frac{a+5}{8}$; b^{10} - $\frac{b(3b+c)}{7}$

Рациональное уравнение, в котором и левая и правая части являются целыми выражениями, называют **целым.**

Пример:

$$\frac{x-1}{2}+\frac{2x}{3}=\frac{5x}{6}$$

Пример дробных выражений:

$$\frac{b}{2a+1};\ \frac{x+y}{x^2-3xy+y^2}$$

Рациональное уравнение, в котором левая или правая часть является дробным выражением, называют **дробным.**

Пример:

$$\frac{x-5}{x-3}+\frac{1}{x}=\frac{x+5}{x(x-5)}$$

Если обе части уравнения являются рациональным выражением, то такие уравнения называют рациональным уравнением.

Рациональные уравнения

Целые рациональные уравнения

$$\frac{2x+3}{5}=5x;$$

$$x^2+6x+8=0;$$

$$\frac{x+5}{4}=\frac{x-9}{6}.$$

Дробно-рациональные уравнения

$$\frac{2x+3}{5+x}=4x;$$

$$\frac{x^2+6x+8}{x+2}=0;$$

$$\frac{x+5}{4x}=\frac{x-9}{6}.$$

Вспомним решение уравнений с дробными коэффициентами

- $$\frac{x-3}{2}+\frac{x+1}{4}=2$$

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель.

$$\frac{x-3}{2}+\frac{x+1}{4}=2| * 4$$

$$2(x-3)+x+1=8$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые.

$$2x-6+x+1=8$$

$$3x=13$$

Выразим x

$$x=13:3$$

$$x=4\frac{1}{3}$$

Вспомним решение уравнений с дробными коэффициентами

- $$\frac{x-3}{2}=\frac{x+1}{4}$$

Для решения уравнения воспользуемся основным свойством пропорции:

$$4(x-3)=2(x+1)$$

Раскроем скобки, приведем подобные слагаемые:

$$4x-12=2x+2$$

$$4x-2x=2+12$$

$$2x=14$$

Выразим х:

$$x=14:2$$

$$x=7$$

Ответ: 7

Выясним, можно ли использовать эти приемы при решении дробно-рациональных уравнений. Решим дробное рациональное уравнение:

$$\boxed{\frac{x^2}{x+5} = \frac{2x}{x+5}} \quad (1)$$

По аналогии с предыдущим примером умножим обе части уравнения на общий знаменатель дробей, то есть на выражение (x+5):

$$\frac{x^2(x+5)}{x+5} = \frac{2x(x+5)}{x+5}$$

Получим целое уравнение:

$$x^2 = 2x \ (2)$$

Понятно, что каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2). Но уравнение (2) может быть не равносильно исходному, так как мы умножили обе части не на число, а на выражение, содержащее переменную, которое может обращаться в нуль. Поэтому не каждый корень уравнения (2) обязательно окажется корнем уравнения (1).

Упростив уравнение (2), получим неполное квадратное уравнение:

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Проверим, являются ли эти корнями уравнения (1).

При $x=0$ общий знаменатель $(x+5)$ не обращается в нуль. Значит, число $x=0$ – корень уравнения (1).

При $x=2$ общий знаменатель $(x+5)$ также не обращается в нуль. Значит, число $x=2$ – корень уравнения (1).

Ответ: 0; 2.

Попробуйте самостоятельно сформулировать алгоритм решения для решения дробно-рациональных уравнений!

Алгоритм решения дробно-рациональных уравнений

1. Найти область допустимых значений (те значения переменной, при которых знаменатели дробей не равны нулю);

2. Найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;

3. Умножить обе части уравнения на этот общий знаменатель, чтобы получить целое уравнение;

4. Решить полученное целое уравнение;

5. Выполнить проверку принадлежности найденных корней ОДЗ;

6. В ответ записывать те корни, которые принадлежат области допустимых значений.

Рассмотрим дробно-рациональное уравнение:

$$\frac{x^2-7x}{x-4}=\frac{12}{4-x} \quad (1)$$

Обратите внимание: Так как на 0 делить нельзя, поэтому необходимо следить за тем, чтобы знаменатель дроби не оказался равным 0. То есть $x-4\neq 0$ или $x\neq 4$

ОДЗ: $x\neq 4$

$$\frac{x^2-7x}{x-4}=\frac{12}{4-x}$$

$$\frac{x^2-7x}{x-4}=-\frac{12}{x-4} \quad |\ *(x-4)$$

$$\frac{(x^2-7x)(x-4)}{x-4}=-\frac{12(x-4)}{x-4}$$

$$x^2-7x=-12$$

$$x^2-7x+12=0$$

По обратной теореме Виета находим корни:

$x=3$ и $x=4$

Проверка:

$x=3$ принадлежит ОДЗ

$x=4$ не принадлежит ОДЗ

Ответ: 3.

Существует способ решения дробно-рациональных уравнений, который не приводит к появлению «лишних» корней.

Вспомните условие равенства дроби нулю!

Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля.

Решите дробно-рациональное уравнение, учитывая условие равенства дроби нулю:

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} = 0$$

Решение: мы знаем, что дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля.
Запишем это условие для нашего уравнения:

$$\begin{cases} x^2 + 5x + 6 = 0 & (1) \\ x + 2 \neq 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 5x + 6 = 0 & (1) \\ x \neq -2 & (2) \end{cases}$$

1) Решаем уравнение (1). Найдем корни по обратной теореме Виета:

$$x_1 + x_2 = -5$$
$$x_1 * x_2 = 6$$
$$x_1 = -2, x_2 = -3.$$

2) Проверяем, удовлетворяют ли найденные корни условию (2):

Видим, что $x_1 = -2$ не удовлетворяет условию (2). Значит корнем уравнения является x$= -3$

Ответ: -3.

Домашняя работа

- Прочитать п.25 из учебника, разобрать примеры 1-3.
- Выучить алгоритм решения дробных рациональных уравнений.
- Решить уравнения

1. $\frac{x}{2}+\frac{7-x}{3}=-\frac{1}{6}+x$
2. $\frac{2x-1}{3x+7}=0$
3. $\frac{x-4}{2x+1}=\frac{x-9}{x}$
4. $x^2-\frac{1}{3}x-2=0$
5. $x-\frac{5}{x}=-3x+19$
6. $\frac{x^2-9x}{x+3}=\frac{36}{x+3}$
7. $\frac{5x-8}{x-1}=\frac{14x+12}{3x+5}$
8. $\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x+6}=\frac{5}{28}$
9. $\frac{14}{x^2-2x}-\frac{21}{x^2+2x}=\frac{5}{x}$