

Дробные рациональные уравнения

Разбейте на группы

$$1) x - 1 = 2 - x, x = \frac{3}{2}$$

$$2) (x+1)(x+1) = (2-x)(x+1), x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -\frac{3}{4}$$

$$1) 3x + 5 = 4, x = -\frac{1}{3}$$

$$2) 3x^2 + 5x = 4x, x_1 = 0, x_2 = -\frac{1}{3}$$

$$1) x - 2 = 4, x = 6$$

$$2) x^2 = 49, x_1 = 7, x_2 = -7$$

$$1) 13x - 7 = 2x - 5, x = \frac{2}{11}$$

$$2) 11x = 2, x = \frac{2}{11}$$

$$1) (x+1)^2 = 0, x = -1$$

$$2) 2x^2 - 1 = 0, x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$1) 2x^2 = 2, x_1 = 1, x_2 = -1$$

$$2) 4x^2 - 4 = 0, x_1 = 1, x_2 = -1$$

Рассмотрим две пары уравнений:

$$1) 13x - 7 = 2x - 5, x = \frac{2}{11}$$

$$2) 11x = 2, x = \frac{2}{11}$$

$$1) 2x^2 = 2, x_1 = 1, x_2 = -1$$

$$2) 4x^2 - 4 = 0, x_1 = 1, x_2 = -1$$

Что вы можете сказать об этих уравнениях?

Что у них общего?

Как называются такие уравнения?

Уравнения называются равносильными, если множества их корней совпадают.

Необходимо отметить, что уравнения не имеющие корней, также являются равносильными.

Переход от данного уравнения к равносильному не влияет на множество корней получающегося уравнения.

Какие основные преобразования выполняли при решении линейных уравнений?

Раскрытие скобок; перенос слагаемых из одной части уравнения в другую, изменяя знак на противоположный; прибавление к обеим частям уравнения выражения, содержащее неизвестную.

Менялись ли при этом их корни?

На основе одного из этих преобразований, а именно: перенос слагаемых из одной части уравнения в другую, меняя при этом знак на противоположный, в 7-м классе сформулировали свойство уравнений. Сформулируйте его, применив новое понятие.

Если какой-нибудь член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.

Какое еще свойство уравнения вы изучали?

Обе части уравнения можно умножать на одно и то же число, отличное от нуля.

Применение этого свойства также заменяет исходное уравнение на равносильное ему.

Рассмотрим две другие пары уравнений:

$$1) x - 1 = 2 - x, x = \frac{3}{2}$$

$$2) (x+1)(x+1) = (2-x)(x+1), x_1 = \frac{3}{2}, x_2 = -\frac{3}{4}$$

$$1) 3x + 5 = 4, x = -\frac{1}{3}$$

$$2) 3x^2 + 5x = 4x, x_1 = 0, x_2 = -\frac{1}{3}$$

Сравните множество корней уравнений

Видим, что в обоих случаях корень уравнения (1) содержится в множестве корней уравнения (2).

То есть при переходе одного уравнения к другому множество корней хотя и расширилось, но потери корней не произошло. В этом случае уравнение (2) называют *следствием уравнения (1)*. Попробуйте сформулировать определение уравнения, которое является следствием данного уравнения.

Уравнение (2) называют следствием уравнения (1), если каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2).

Рассмотрим две другие пары уравнений:

$$1) x - 2 = 4, x = 6$$

$$2) x^2 = 49, x_1 = 7, x_2 = -7$$

$$1) (x + 1)^2 = 0, x = -1$$

$$2) 2x^2 - 1 = 0, x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Заметим, что множества корней этих уравнений не совпадают. Значит такие уравнения являются неравносильными.

Получили следующие группы

Равносильные
уравнения

Неравносильные
уравнения

Уравнение (2) является
следствием уравнения (1)

$$\begin{aligned} 1) & x - 1 = 2 - x \\ 2) & (x + 1)(x + 1) = (2 - x)(x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) & x - 2 = 4 \\ 2) & x^2 = 49 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) & 13x - 7 = 2x - 5, \\ 2) & 11x = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) & 3x + 5 = 4 \\ 2) & 3x^2 + 5x = 4x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) & (x + 1)^2 = 0 \\ 2) & 2x^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1) & 2x^2 = 2 \\ 2) & 4x^2 - 4 = 0 \end{aligned}$$

Если обе части уравнения являются рациональным выражением, то такие уравнения называют рациональным уравнением.

Что же такое рациональное выражение?

Целые и дробные выражения называют рациональными выражениями.

(см. § 1. п.1. учебника)

Пример целых выражений:

$$7a^2b; \frac{a+5}{8}; b^{10} - \frac{b(3b+c)}{7}$$

Рациональное уравнение, в котором и левая и правая части являются целыми выражениями, называют **целым**.

Пример:

$$\frac{x-1}{2} + \frac{2x}{3} = \frac{5x}{6}$$

Пример дробных выражений:

$$\frac{b}{2a+1} ; \frac{x+y}{x^2 - 3xy + y^2}$$

Рациональное уравнение, в котором левая или правая часть является дробным выражением, называют **дробным**.

Пример:

$$\frac{x-5}{x-3} + \frac{1}{x} = \frac{x+5}{x(x-5)}$$

Если обе части уравнения являются рациональным выражением, то такие уравнения называют рациональным уравнением.

Рациональные уравнения

Целые рациональные уравнения

$$\frac{2x + 3}{5} = 5x;$$
$$x^2 + 6x + 8 = 0;$$
$$\frac{x + 5}{4} = \frac{x - 9}{6}.$$

Дробно-рациональные уравнения

$$\frac{2x + 3}{5 + x} = 4x;$$
$$\frac{x^2 + 6x + 8}{x + 2} = 0;$$
$$\frac{x + 5}{4x} = \frac{x - 9}{6}.$$

Вспомним решение уравнений с дробными коэффициентами

- $$\frac{x - 3}{2} + \frac{x + 1}{4} = 2$$

Умножим обе части уравнения на общий знаменатель.

$$\frac{x - 3}{2} + \frac{x + 1}{4} = 2 \quad | * 4$$
$$2(x - 3) + x + 1 = 8$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые.

$$2x - 6 + x + 1 = 8$$
$$3x = 13$$

Выразим x

$$x = 13 : 3$$
$$x = 4 \frac{1}{3}$$

Вспомним решение уравнений с дробными коэффициентами

- $$\frac{x - 3}{2} = \frac{x + 1}{4}$$

Для решения уравнения воспользуемся основным свойством пропорции:

$$4(x - 3) = 2(x + 1)$$

Раскроем скобки, приведем подобные слагаемые:

$$4x - 12 = 2x + 2$$

$$4x - 2x = 2 + 12$$

$$2x = 14$$

Выразим x :

$$x = 14 : 2$$

$$x = 7$$

Ответ: 7

Выясним, можно ли использовать эти приемы при решении дробно-рациональных уравнений. Решим дробное рациональное уравнение:

$$\frac{x^2}{x+5} = \frac{2x}{x+5} \quad (1)$$

По аналогии с предыдущим примером умножим обе части уравнения на общий знаменатель дробей, то есть на выражение $(x+5)$:

$$\frac{x^2(x+5)}{x+5} = \frac{2x(x+5)}{x+5}$$

Получим целое уравнение:

$$x^2 = 2x \quad (2)$$

Понятно, что каждый корень уравнения (1) является корнем уравнения (2). Но уравнение (2) может быть не равносильно исходному, так как мы умножили обе части не на число, а на выражение, содержащее переменную, которое может обращаться в нуль. Поэтому не каждый корень уравнения (2) обязательно окажется корнем уравнения (1).

Упростив уравнение (2), получим неполное квадратное уравнение:

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ или } x - 2 = 0$$

$$x = 2$$

Проверим, являются ли эти корнями уравнения (1).

При $x=0$ общий знаменатель $(x+5)$ не обращается в нуль. Значит, число $x=0$ – корень уравнения (1).

При $x=2$ общий знаменатель $(x+5)$ также не обращается в нуль. Значит, число $x=2$ – корень уравнения (1).

Ответ: 0; 2.

Попробуйте самостоятельно сформулировать алгоритм решения для решения дробно-рациональных уравнений!

Алгоритм решения дробно-рациональных уравнений

1. Найти область допустимых значений (те значения переменной, при которых знаменатели дробей не равны нулю);

2. Найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;

3. Умножить обе части уравнения на этот общий знаменатель, чтобы получить целое уравнение;

4. Решить полученное целое уравнение;

5. Выполнить проверку принадлежности найденных корней ОДЗ;

6. В ответ записывать те корни, которые принадлежат области допустимых значений.

Рассмотрим дробно-рациональное уравнение:

$$\frac{x^2 - 7x}{x - 4} = \frac{12}{4 - x} \quad (1)$$

Обратите внимание: Так как на 0 делить нельзя, поэтому необходимо следить за тем, чтобы знаменатель дроби не оказался равным 0. То есть $x - 4 \neq 0$ или $x \neq 4$

ОДЗ: $x \neq 4$

$$\frac{x^2 - 7x}{x - 4} = \frac{12}{4 - x}$$

$$\frac{x^2 - 7x}{x - 4} = -\frac{12}{x - 4} \quad | \cdot (x - 4)$$

$$\frac{(x^2 - 7x)(x - 4)}{x - 4} = -\frac{12(x - 4)}{x - 4}$$

$$x^2 - 7x = -12$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0$$

По обратной теореме Виета находим корни:

$$x = 3 \text{ и } x = 4$$

Проверка:

$x = 3$ принадлежит ОДЗ

$x = 4$ не принадлежит ОДЗ

Ответ: 3.

Существует способ решения дробно-рациональных уравнений, который не приводит к появлению «лишних» корней.

Вспомните условие равенства дроби нулю!

Дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля.

Решите дробно-рациональное уравнение, учитывая условие равенства дроби нулю:

$$\frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2} = 0$$

Решение: мы знаем, что дробь равна нулю, когда числитель равен нулю, а знаменатель отличен от нуля.

Запишем это условие для нашего уравнения:

$$\begin{cases} x^2 + 5x + 6 = 0 & (1) \\ x + 2 \neq 0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 5x + 6 = 0 & (1) \\ x \neq -2 & (2) \end{cases}$$

1) Решаем уравнение (1). Найдем корни по обратной теореме Виета:

$$x_1 + x_2 = -5$$

$$x_1 * x_2 = 6$$

$$x_1 = -2, x_2 = -3.$$

2) Проверяем, удовлетворяют ли найденные корни условию (2):

Видим, что $x_1 = -2$ не удовлетворяет условию (2). Значит корнем уравнения является $x = -3$

Ответ: -3.

Домашняя работа

- Прочитать п.25 из учебника, разобрать примеры 1-3.
- Выучить алгоритм решения дробных рациональных уравнений.
- Решить уравнения

$$1. \frac{x}{2} + \frac{7-x}{3} = -\frac{1}{6} + x$$

$$2. \frac{2x-1}{3x+7} = 0$$

$$3. \frac{x-4}{2x+1} = \frac{x-9}{x}$$

$$4. x^2 - \frac{1}{3}x - 2 = 0$$

$$5. x - \frac{5}{x} = -3x + 19$$

$$6. \frac{x^2 - 9x}{x+3} = \frac{36}{x+3}$$

$$7. \frac{5x-8}{x-1} = \frac{14x+12}{3x+5}$$

$$8. \frac{1}{x-4} - \frac{1}{x+6} = \frac{5}{28}$$

$$9. \frac{14}{x^2 - 2x} - \frac{21}{x^2 + 2x} = \frac{5}{x}$$