Дробно – рациональные уравнения

Базовый курс

Константинова Т.Г., Мангоянова Н.М. – учителя МОУ лицея №6 г. Ессентуки

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$$

Алгоритм решения дробно-рационального уравнения:

1. найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
2. умножить обе части уравнения на общий знаменатель;
3. решить получившееся целое уравнение;
4. исключить из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель.

Решить уравнение: $$\frac{1}{x}=\frac{5}{x-2}-\frac{4}{x-3}$$

$$\begin{cases}(x-2)(x-3)=5x(x-3)-4x(x-2)\\x\neq 0\\x\neq 2\\x\neq 3\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x=-6\\x\neq 0\\x\neq 2\\x\neq 3\end{cases}$$

x = -3

Ответ: -3

Решить уравнение: $\dfrac{2y-2}{y+3}-\dfrac{18}{y^2-9}=\dfrac{y-6}{y-3}$

$$\begin{cases}(2y-2)(y-3)-18=(y-6)(y+3)\\ y\neq\pm3\end{cases}$$

$$\begin{cases}y^2-5y+6=0\\ y\neq\pm3\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=2\\ y=3\end{array}\right.\\ y\neq\pm3\end{cases}$$

y = 2

Ответ: 2

Решить уравнение: $\frac{y+5}{y^2-5y}-\frac{y-5}{2y^2+10y}=\frac{y+25}{2y^2-50}$

$$\frac{y+5}{y(y-5)}-\frac{y-5}{2y(y+5)}=\frac{y+25}{2(y+5)(y-5)}$$

$$\begin{cases} 2(y+5)^2-(y-5)^2=y(y+25) \\ y\neq 0 \\ y\neq \pm 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y=-25 \\ y\neq 0 \\ y\neq \pm 5 \end{cases}$$

Ответ: нет корней

Дробно – рациональные уравнения

Углубленный курс

Уравнения,
содержащие переменную под знаком модуля

При решении дробно-рациональных уравнений с модулем используются традиционные методы решения:

1. раскрытие модуля по определению:

$$\left|f(x)\right| = \begin{cases} f(x), f(x) \geq 0 \\ -f(x), f(x) < 0 \end{cases}$$

2. метод разбиения на промежутки;
3. возведение обеих частей уравнения в квадрат.

1 способ: раскрытие модуля по определению.

$$\frac{x+1}{|x-3|}=2x-3$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>3\\ \dfrac{x+1}{x-3}=2x-3\end{cases}\\ \begin{cases}x<3\\ \dfrac{x+1}{3-x}=2x-3\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>3\\ \dfrac{2x^2-10x+8}{x-3}=0\end{cases}\\ \begin{cases}x<3\\ \dfrac{2x^2-8x+10}{3-x}=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>3\\ \left[\begin{array}{l}x=4\\ x=1\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x<3\\ нет\_действ.корней\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x=4\\ \varnothing\end{array}\right.$$

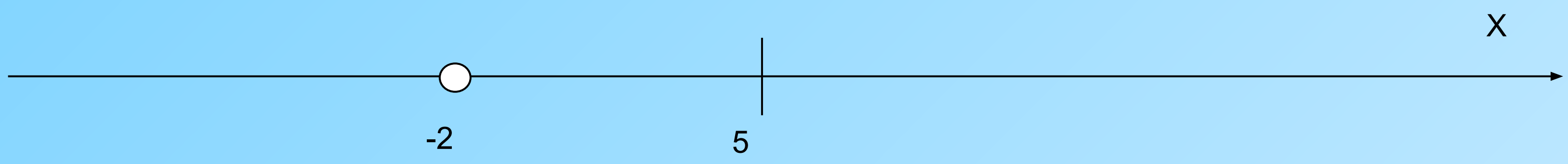
x = 4

Ответ: 4

2 способ: метод разбиения на промежутки.

$$\frac{|x-5|}{3x-2}=\frac{x+1}{|x+2|}$$

Нанесем на числовую прямую значение x, при котором x-5=0 и значение x, при котором x+2=0. Числовая прямая при этом разобьется на промежутки: (-∞; -2), (-2; 5], [5; + ∞).



Решим заданное уравнение на каждом из этих промежутков.

$$\begin{cases} x < -2 \\ \dfrac{5-x}{3x-2} = \dfrac{x+1}{-x-2} \end{cases} \qquad \begin{cases} -2 < x \le 5 \\ \dfrac{5-x}{3x-2} = \dfrac{x+1}{x+2} \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 5 \\ \dfrac{x-5}{3x-2} = \dfrac{x+1}{x+2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -2 \\ \dfrac{x^2+2x+4}{(3x-2)(x+2)} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2 < x \le 5 \\ \dfrac{x^2-x-6}{(3x-2)(x+2)} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 5 \\ \dfrac{x^2+2x+4}{(3x-2)(x+2)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -2 \\ нет\_дейст.корней \end{cases} \qquad \begin{cases} -2 < x \le 5 \\ \left[\begin{array}{l} x = -1{,}5 \\ x = 2 \end{array} \right. \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 5 \\ нет\_дейст.корней \end{cases}$$

$\varnothing$ $\qquad$ $x_1 = -1{,}5$; $x_2 = 2$ $\qquad$ $\varnothing$

Объединяя решения трех систем получим:

Ответ: -1,5; 2

3 способ: возведение обеих частей уравнения в квадрат.

$$\left|\frac{2x-1}{2-7x}\right| = \frac{1}{5}$$

Так как обе части уравнения – выражения одинаковых знаков, то это уравнение равносильно следующему уравнению:

$$\left(\frac{2x-1}{2-7x}\right)^2 = \frac{1}{25}$$

$$\frac{4x^2-4x+1}{4-28x+49x^2} = \frac{1}{25}$$

$$\frac{51x^2-72x+21}{25(2-7x)^2} = 0$$

x 1 = 1,5; x 2 = $\frac{21}{51} = \frac{7}{17}$

Ответ: $\frac{7}{17}$; 1

Решить уравнение:

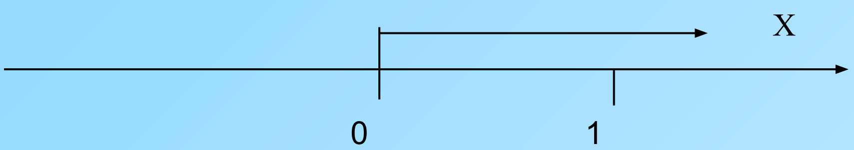
$$\frac{\left|3-2x-|x|\right|}{4x-1}=5$$

$$x \geq 0$$

$$\frac{|3-2x-x|}{4x-1}=5$$

$$\frac{|3-3x|}{4x-1}=5$$

$$\begin{cases} |3-3x| = 5(4x-1) \\ x \neq 0{,}25 \end{cases}$$



1) $0 \leq x \leq 1$

$3-3x = 20x-5$

$23x = 2$

$x = \dfrac{2}{23}$

2) $x > 1$

$3x-3 = 20x-5$

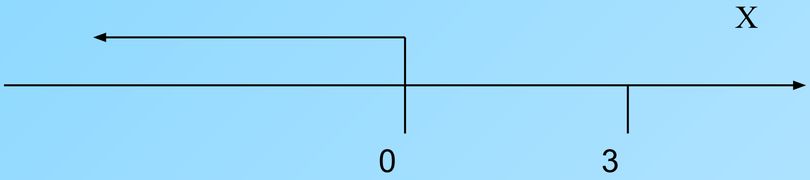
$-17x = -2$

$x = \dfrac{2}{17} \notin (1;+\infty)$

или $x < 0$

$$\frac{|3-2x+x|}{4x-1}=5 \qquad \frac{|3-x|}{4x-1}=5$$

$$\begin{cases} 3-x=5(4x-1) \\ x \neq 0{,}25 \end{cases}$$



$$1)\ \ 3-x=20x-5$$

$$21x=8$$

$$x=\frac{8}{21}\notin(-\infty;0)$$

Ответ: $\dfrac{2}{23}$

Уравнения
с параметрами

Решить уравнение: $3 - a = \frac{4+a}{x-1}$

$$\begin{cases} (3-a)(x-1) = 4+a \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - ax - 3 + a = 4 + a \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(3-a) = 7 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

- ес ли $a \neq 3, \text{то}\ x = \frac{7}{3-a}$
- если *a = 3, то нет решений*

Проверим при каких значениях *а* х=1

$$\frac{7}{3-a} = 1$$

7 = 3 – а

а = -4

Ответ:

если $a \neq 3,\ a \neq -4, \text{то}\ x = \frac{7}{3-a}$

если *а = 3,а = 4, то нет решений*

Решить уравнение: $$\frac{x}{2a+x}+\frac{2a+x}{2a-x}=\frac{8a^2}{x^2-4a^2}$$

$x(2a-x)+(2a+x)^2=8a^2$

$2ax-x^2+4a^2+4ax+x^2-8a^2=0$

$6ax-4a^2=0$

$2a(3x-2a)=0$

$$ОДЗ: x \neq \pm 2a$$

Проверим при каких значениях *а* $x \neq \pm 2a$

$\frac{2a}{3}=2a$ $\frac{2a}{3}=-2a$

2a = 6a 2a = -6a

при a = 0 при a = 0

- если $a \neq 0,\ то\ x=\frac{2a}{3}$
- если *а = 0, то х – любое число,* $x \neq 0$

Ответ: если $a \neq 0,\ то\ x=\frac{2a}{3}$

если *а = 0, то х – любое число* $x \neq 0$

При каких значениях параметра a уравнение имеет единственный корень?

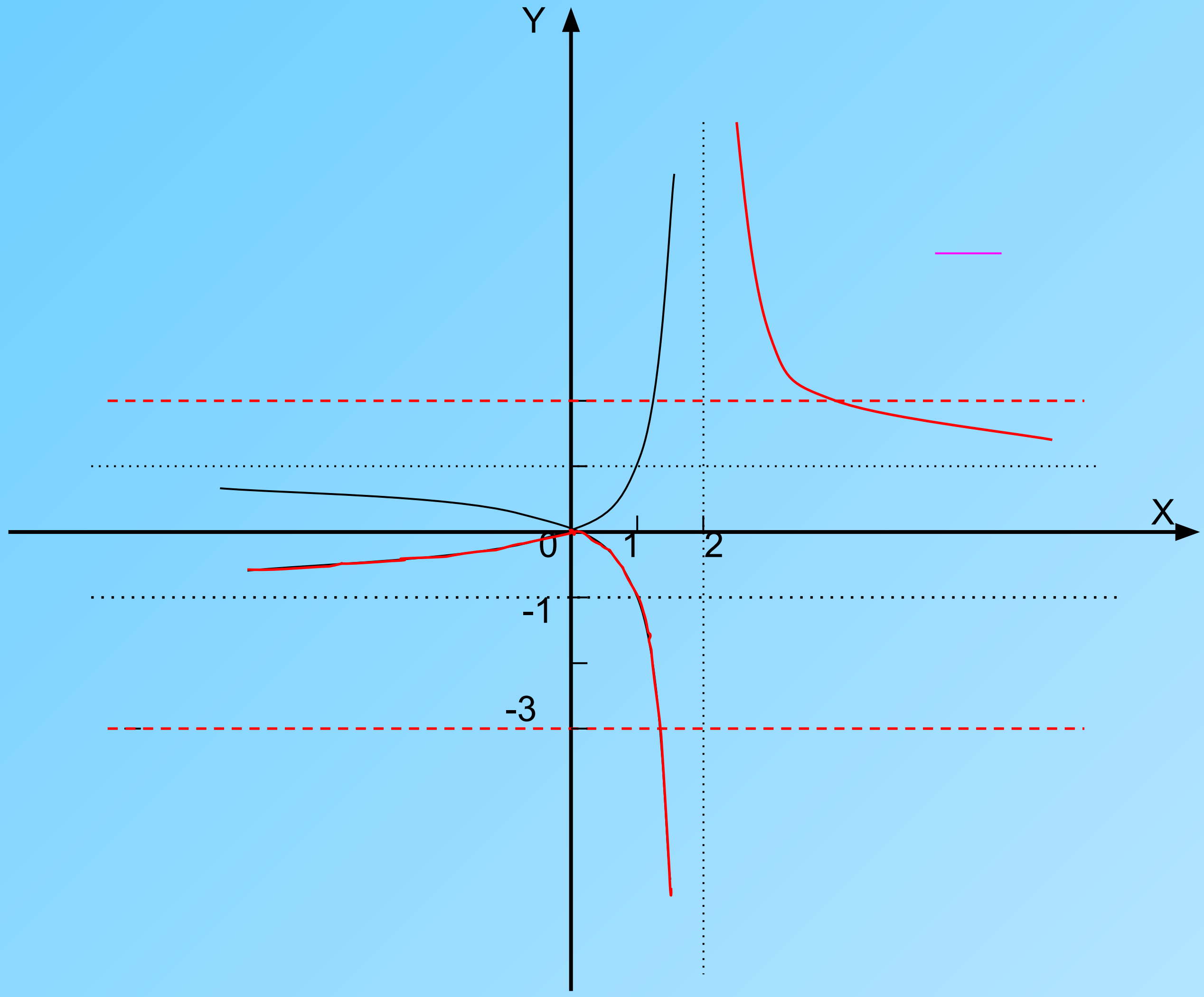
$$\frac{|x|}{x-2}=a$$

$$y=\frac{|x|}{x-2}$$

y = a

$$D(y): x \neq 2$$

$$y=\begin{cases} 1+\dfrac{2}{x-2}, x \geq 0 \\ -1-\dfrac{2}{x-2}, x < 0 \end{cases}$$



Ответ: при a $\leq$ -1, a = 0, a > 1 уравнение имеет единственный корень.