

Дробно – рациональные уравнения

Базовый курс

Константинова Т.Г., Мангоянова Н.М. –
учителя МОУ лицея №6 г. Ессентуки

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$$

Алгоритм решения дробно-рационального уравнения:

1. найти общий знаменатель дробей, входящих в уравнение;
2. умножить обе части уравнения на общий знаменатель;
3. решить получившееся целое уравнение;
4. исключить из его корней те, которые обращают в нуль общий знаменатель.

Решить уравнение: $\frac{1}{x} = \frac{5}{x-2} - \frac{4}{x-3}$

$$\begin{cases} (x-2)(x-3) = 5x(x-3) - 4x(x-2) \\ x \neq 0 \\ x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = -6 \\ x \neq 0 \\ x \neq 2 \\ x \neq 3 \end{cases} \quad x = -3$$

Ответ: -3

Решить уравнение: $\frac{2y-2}{y+3} - \frac{18}{y^2-9} = \frac{y-6}{y-3}$

$$\begin{cases} (2y-2)(y-3) - 18 = (y-6)(y+3) \\ y \neq \pm 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 - 5y + 6 = 0 \\ y \neq \pm 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2 \\ y = 3 \\ y \neq \pm 3 \end{cases}$$

$$y = 2$$

Ответ: 2

Решить уравнение: $\frac{y+5}{y^2-5y} - \frac{y-5}{2y^2+10y} = \frac{y+25}{2y^2-50}$

$$\frac{y+5}{y(y-5)} - \frac{y-5}{2y(y+5)} = \frac{y+25}{2(y+5)(y-5)}$$

$$\begin{cases} 2(y+5)^2 - (y-5)^2 = y(y+25) \\ y \neq 0 \\ y \neq \pm 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5y = -25 \\ y \neq 0 \\ y \neq \pm 5 \end{cases}$$

Ответ: нет корней

Дробно – рациональные уравнения

Углубленный курс

**Уравнения,
содержащие переменную под
знаком модуля**

При решении дробно-рациональных уравнений с модулем используются традиционные методы решения:

1. раскрытие модуля по определению:

$$|f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$$

2. метод разбиения на промежутки;

3. возведение обеих частей уравнения в квадрат.

1 способ: раскрытие модуля по определению.

$$\frac{x+1}{|x-3|} = 2x-3$$

$$\left[\begin{cases} x > 3 \\ \frac{x+1}{x-3} = 2x-3 \end{cases} \right.$$
$$\left[\begin{cases} x < 3 \\ \frac{x+1}{3-x} = 2x-3 \end{cases} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 4 \\ \emptyset \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{cases} x > 3 \\ \frac{2x^2 - 10x + 8}{x-3} = 0 \end{cases} \right.$$
$$\left[\begin{cases} x < 3 \\ \frac{2x^2 - 8x + 10}{3-x} = 0 \end{cases} \right.$$

$$x = 4$$

$$\left[\begin{cases} x > 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = 1 \end{array} \right. \\ x < 3 \\ \text{нет}_\text{ действ. корней} \end{cases} \right.$$

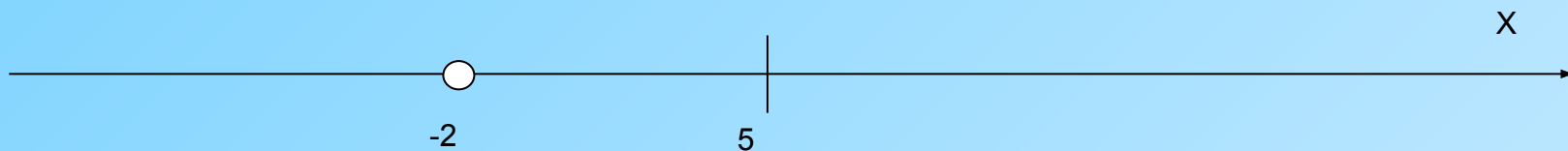
Ответ: 4

2 способ: метод разбиения на промежутки.

$$\frac{|x - 5|}{3x - 2} = \frac{x + 1}{|x + 2|}$$

Нанесем на числовую прямую значение x , при котором $x - 5 = 0$ и значение x , при котором $x + 2 = 0$.

Числовая прямая при этом разобьется на промежутки: $(-\infty; -2)$, $(-2; 5]$, $[5; +\infty)$.



Решим заданное уравнение на каждом из этих промежутков.

$$\begin{cases} x < -2 \\ \frac{5-x}{3x-2} = \frac{x+1}{-x-2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 < x \leq 5 \\ \frac{5-x}{3x-2} = \frac{x+1}{x+2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 5 \\ \frac{x-5}{3x-2} = \frac{x+1}{x+2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -2 \\ \frac{x^2 + 2x + 4}{(3x-2)(x+2)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 < x \leq 5 \\ \frac{x^2 - x - 6}{(3x-2)(x+2)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 5 \\ \frac{x^2 + 2x + 4}{(3x-2)(x+2)} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -2 \\ \text{нет_действ.корней} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2 < x \leq 5 \\ \begin{cases} x = -1,5 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 5 \\ \text{нет_действ.корней} \end{cases}$$

∅

$$\begin{aligned} x_1 &= -1,5; x \\ &= 2 \end{aligned}$$

∅

Объединяя решения трех систем получим:

Ответ: -1,5; 2

3 способ: возведение обеих частей уравнения в квадрат.

$$\left| \frac{2x - 1}{2 - 7x} \right| = \frac{1}{5}$$

Так как обе части уравнения – выражения одинаковых знаков, то это уравнение равносильно следующему уравнению:

$$\left(\frac{2x - 1}{2 - 7x} \right)^2 = \frac{1}{25}$$

$$\frac{4x^2 - 4x + 1}{4 - 28x + 49x^2} = \frac{1}{25}$$

$$\frac{51x^2 - 72x + 21}{25(2 - 7x)^2} = 0$$

$$x_1 = 1,5; x_2 = \frac{21}{51} = \frac{7}{17}$$

Ответ: $\frac{7}{17}; 1$

Решить уравнение:

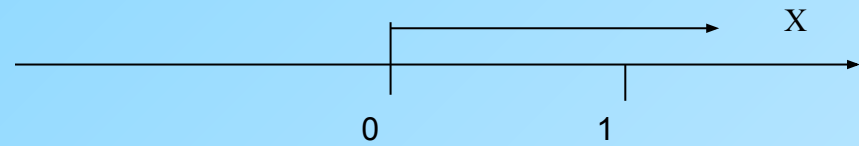
$$\frac{|3 - 2x - |x||}{4x - 1} = 5$$

$$x \geq 0$$

$$\frac{|3 - 2x - x|}{4x - 1} = 5$$

$$\frac{|3 - 3x|}{4x - 1} = 5$$

$$\begin{cases} |3 - 3x| = 5(4x - 1) \\ x \neq 0,25 \end{cases}$$



1) $0 \leq x \leq 1$

$$3 - 3x = 20x - 5$$

$$23x = 2$$

$$x = \frac{2}{23}$$

2) $x > 1$

$$3x - 3 = 20x - 5$$

$$-17x = -2$$

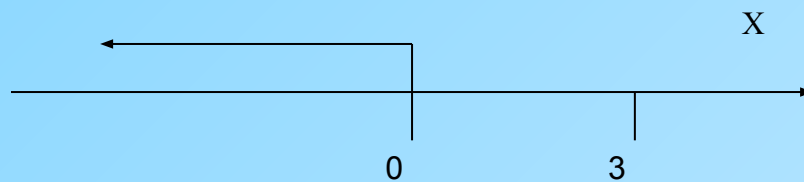
$$x = \frac{2}{17} \notin (1; +\infty)$$

или $x < 0$

$$\frac{|3 - 2x + x|}{4x - 1} = 5$$

$$\frac{|3 - x|}{4x - 1} = 5$$

$$\begin{cases} 3 - x = 5(4x - 1) \\ x \neq 0,25 \end{cases}$$



$$1) 3 - x = 20x - 5$$

$$21x = 8$$

$$x = \frac{8}{21} \notin (-\infty; 0)$$

Ответ: $\frac{2}{23}$

Уравнения с параметрами

Решить уравнение:

$$3 - a = \frac{4 + a}{x - 1}$$

$$\begin{cases} (3 - a)(x - 1) = 4 + a \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Проверим при каких значениях a
 $x=1$

$$\begin{cases} 3x - ax - 3 + a = 4 + a \\ x \neq 1 \end{cases}$$

$$\frac{7}{3 - a} = 1 \quad 7 = 3 - a$$
$$a = -4$$

$$\begin{cases} x(3 - a) = 7 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

- если $a \neq 3$, то $x = \frac{7}{3 - a}$
- если $a = 3$, то

нет решений

Ответ: если $a \neq 3$, $a \neq -4$, то $x = \frac{7}{3 - a}$

если $a = 3, a = -4$, то нет
решений

Решить уравнение:

$$\frac{x}{2a+x} + \frac{2a+x}{2a-x} = \frac{8a^2}{x^2-4a^2}$$

$$x(2a-x) + (2a+x)^2 = 8a^2$$

$$2ax - x^2 + 4a^2 + 4ax + x^2 - 8a^2 = 0$$

$$6ax - 4a^2 = 0$$

$$2a(3x - 2a) = 0$$

► если $a \neq 0$, то $x = \frac{2a}{3}$
► если $a = 0$, то x – любое
число,

$$x \neq 0$$

$$\text{ОДЗ : } x \neq \pm 2a$$

Проверим при каких значениях a $x \neq \pm 2a$

$$\frac{2a}{3} = 2a \qquad \frac{2a}{3} = -2a$$

$$2a = 6a \qquad 2a = -6a$$

$$\text{при } a = 0 \qquad \text{при } a = 0$$

Ответ: если $a \neq 0$, то $x = \frac{2a}{3}$
если $a = 0$, то x – любое
число

$$x \neq 0$$

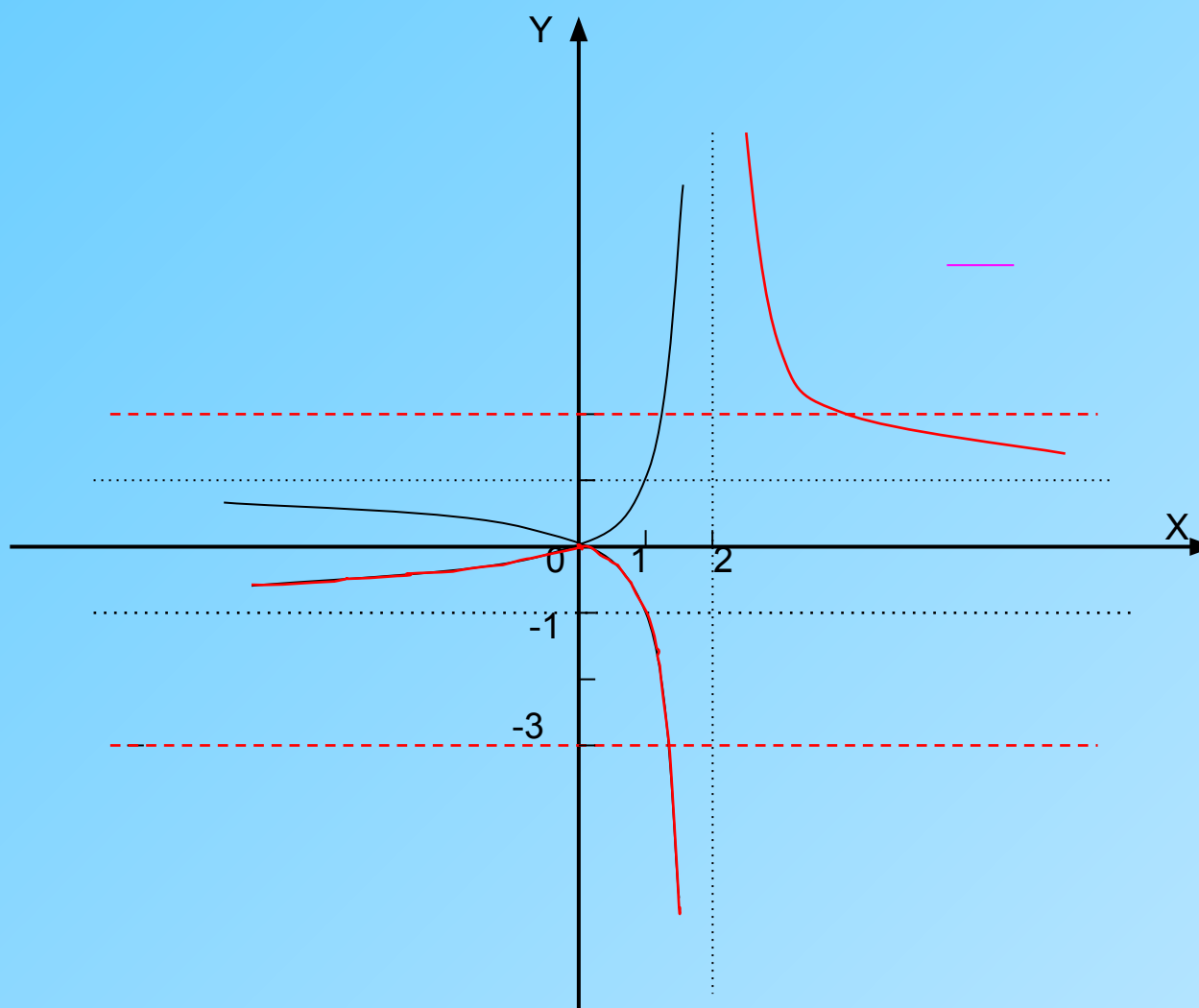
При каких значениях параметра a уравнение имеет единственный корень?

$$\frac{|x|}{x-2} = a$$

$$y = \frac{|x|}{x-2} \quad y = a$$

$$D(y) : x \neq 2$$

$$y = \begin{cases} 1 + \frac{2}{x-2}, x \geq 0 \\ -1 - \frac{2}{x-2}, x < 0 \end{cases}$$



Ответ: при $a \leq -1$, $a = 0$, $a > 1$ уравнение имеет единственный корень.