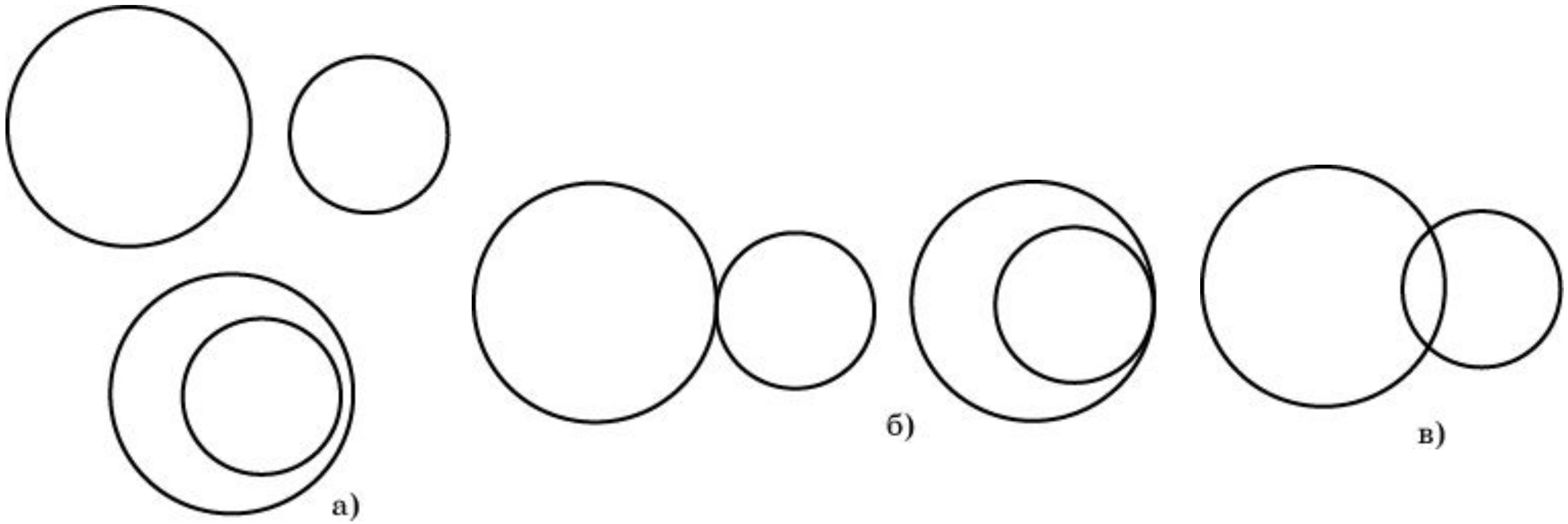
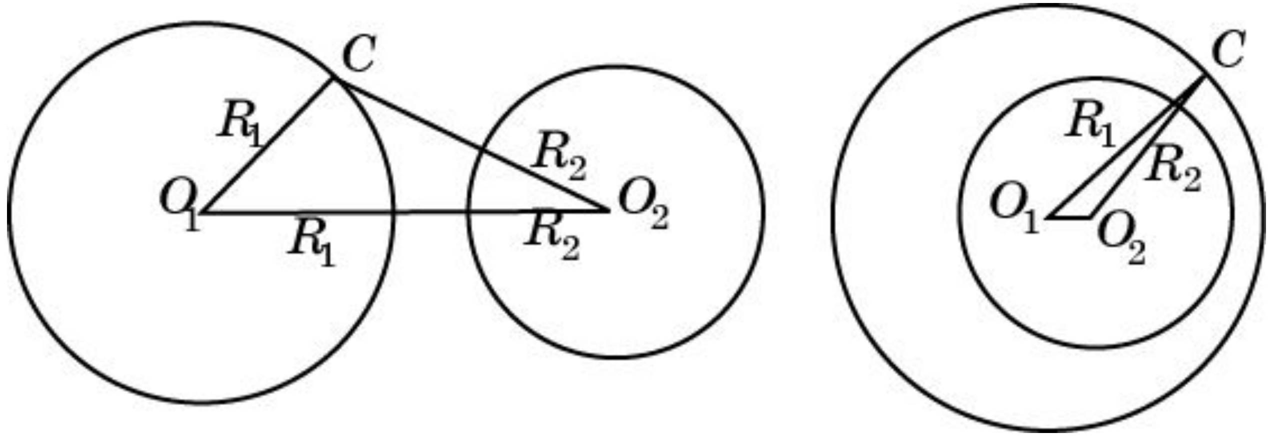
Две окружности

Две окружности могут: а) не иметь общих точек;
б) иметь только одну общую точку. В этом случае окружности касаются к окружности. Общая точка называется точкой касания;
в) иметь две общие точки. В этом случае говорят, что окружности пересекаются.



Теорема 1

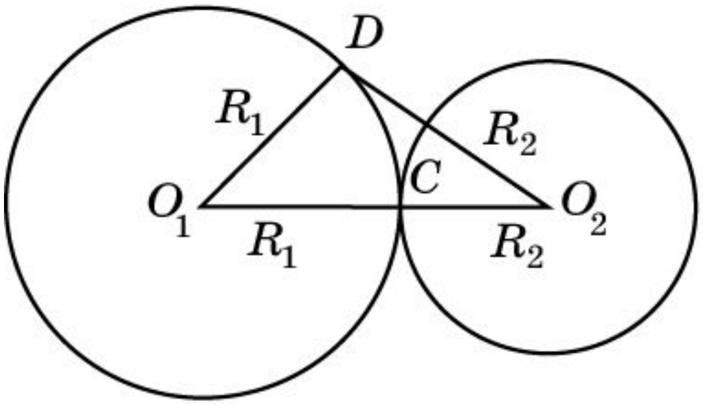
Если расстояние между центрами двух окружностей больше суммы их радиусов или меньше их разности, то эти окружности не имеют общих точек.

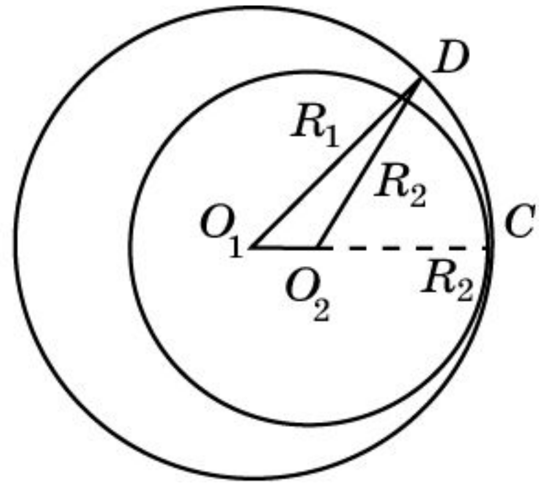


Доказательство. Пусть даны две окружности с центрами в точках O_1, O_2 и радиусами соответственно R_1, R_2, $R_1 + R_2 < O_1O_2$. Рассмотрим точку C на первой окружности, $O_1C = R_1$. Тогда O_2C $O_1O_2 - O_1C > R_1 + R_2 - R_1 = R_2$ и, следовательно, точка C не принадлежит второй окружности. Значит, эти окружности не имеют общих точек. Аналогичным образом доказывается, что если $O_1O_2 < R_1 - R_2$ $(R_1 > R_2)$, то окружности также не имеют общих точек.

Теорема 2

Если расстояние между центрами двух окружностей равно сумме или разности их радиусов, то эти окружности касаются.

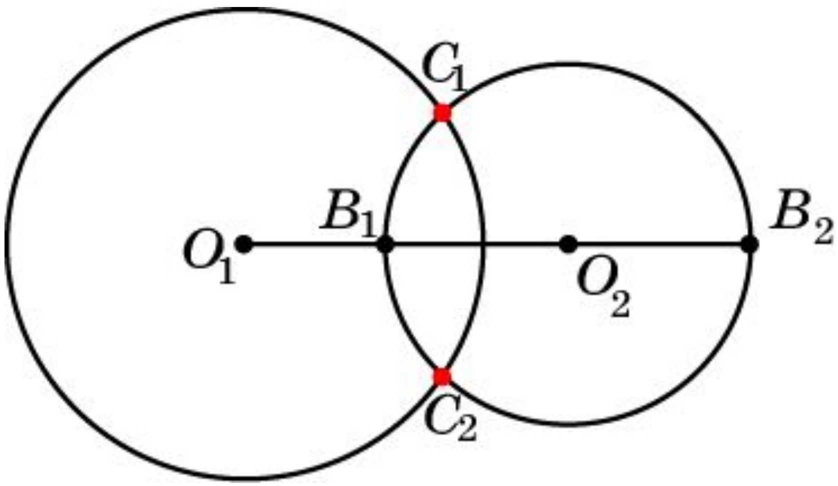




Доказательство. Пусть даны две окружности с центрами в точках O_1, O_2 и радиусами соответственно R_1, R_2, $R_1+R_2 = O_1O_2$. Рассмотрим точку C на отрезке O_1O_2, для которой $O_1C = R_1$, $O_2C = R_2$. Она будет общей точкой для данных окружностей. Если D – точка на первой окружности, отличная от C, то из неравенства треугольника следует, что $O_2D > O_1O_2 - O_1D = R_1 + R_2 - R_1 = R_2$, следовательно, точка D не принадлежит второй окружности. Значит, данные окружности имеют только одну общую точку, т.е. касаются. Аналогичным образом доказывается, что если $O_1O_2 = R_1 - R_2$ $(R_1 > R_2)$, то окружности также касаются.

Теорема 3

Если расстояние между центрами двух окружностей меньше суммы радиусов и больше их разностей, то эти окружности пересекаются.



Вопрос 1

Сколько общих точек могут иметь две окружности?

Ответ: Ни одной, одну или две.

Вопрос 2

Какие две окружности называются касающимися?

Ответ: Две окружности называются касающимися, если они имеют только одну общую точку.

Вопрос 3

Какие две окружности называются пересекающимися?

Ответ: Две окружности называются пересекающимися, если они имеют две общие точки.

Вопрос 4

Какие окружности называются концентрическими?

Ответ: Окружности называются концентрическими, если они имеют общий центр.

Вопрос 5

В каком случае две окружности не имеют общих точек?

Ответ: Если расстояние между центрами двух окружностей больше суммы их радиусов или меньше их разности.

Вопрос 6

В каком случае две окружности касаются: а) внешним образом; б) внутренним образом?

Ответ: а) Если расстояние между их центрами равно сумме радиусов;

б) если расстояние между их центрами равно разности радиусов.

Вопрос 7

В каком случае две окружности пересекаются?

Ответ: Если расстояние между центрами двух окружностей меньше суммы радиусов и больше их разностей.

Упражнение 1

Дана окружность радиуса 3 см и точка A на расстоянии, равном 5 см, от центра окружности. Найдите радиус окружности, касающейся данной и имеющей центр в точке A.

Ответ: 2 см.

Упражнение 2

Расстояние между центрами двух окружностей равно 5 см. Как расположены эти окружности по отношению друг к другу, если их радиусы равны: а) 2 см и 3 см; б) 2 см и 2 см?

Ответ: а) Касаются;
б) не имеют общих точек.

Упражнение 3

Расстояние между центрами двух окружностей равно 2 см. Как расположены эти окружности по отношению друг к другу, если их радиусы равны: а) 3 см и 5 см; б) 2 см и 5 см?

Ответ: а) Касаются;
б) не имеют общих точек.

Упражнение 4

Чему равно расстояние между центрами двух окружностей, радиусы которых равны 4 см и 6 см, если окружности: а) касаются внешне; б) касаются внутренне?

Ответ: а) 10 см; б) 4 см.

Упражнение 5

Радиусы двух концентрических окружностей относятся как 3:7. Найдите диаметры этих окружностей, если ширина кольца, образованного ими, равна 24 см.

Ответ: 36 см и 84 см.

Упражнение 6

Две окружности касаются внешним образом. Радиусы окружностей относятся как 2:3. Найдите диаметры окружностей, если расстояние между их центрами равно 10 см.

Ответ: 8 см и 12 см.

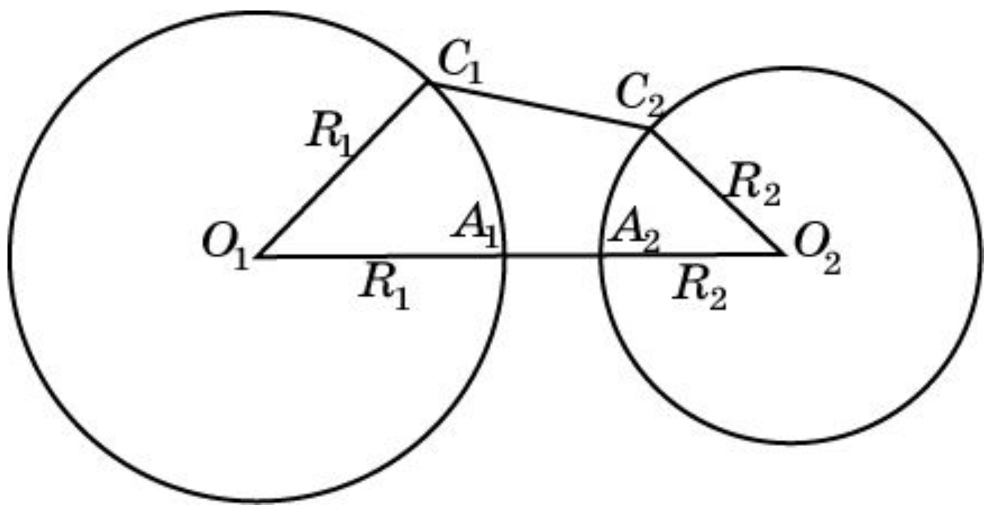
Упражнение 7

Две окружности касаются внутренним образом. Найдите радиусы этих окружностей, если они относятся как 5:2, а расстояние между центрами равно 15 см.

Ответ: 25 см и 10 см.

Упражнение 8

Расстояние между центрами двух окружностей равно d и больше суммы их радиусов R_1 и R_2. Найдите наименьшее расстояние между точками, расположенными на данных окружностях.



Ответ: $d - R_1 - R_2$.

Упражнение 9

Расстояние между центрами двух окружностей равно d и больше суммы их радиусов R_1 и R_2. Найдите наибольшее расстояние между точками, расположенными на данных окружностях.

Ответ: $d + R_1 + R_2$.

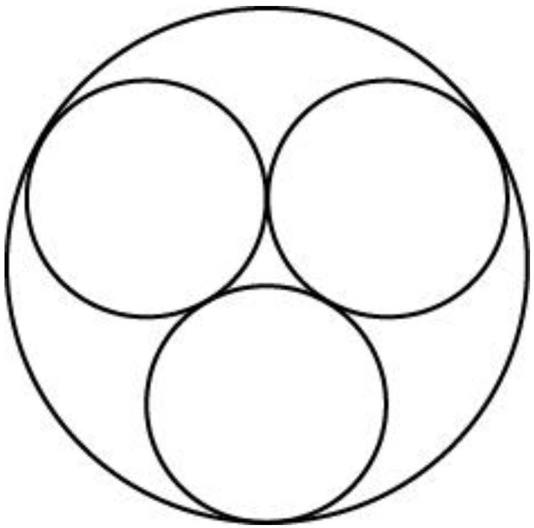
Упражнение 10

Расстояние между центрами двух окружностей равно d и меньше разности $R_1 - R_2$ их радиусов. Найдите наименьшее и наибольшее расстояния между точками, расположенными на данных окружностях.

Ответ: $R_1 - R_2 - d$; $R_1 + R_2 + d$.

Упражнение 11

Могут ли попарно касаться друг друга: а) три окружности; б) четыре окружности; в) пять окружностей?



Ответ: а) Да; б) да; в) нет.

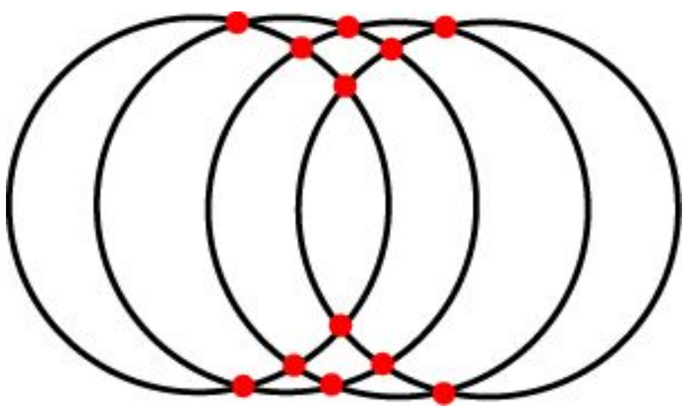
Упражнение 12

Могут ли попарно касаться друг друга четыре окружности одинакового радиуса?

Ответ: Нет.

Упражнение 13

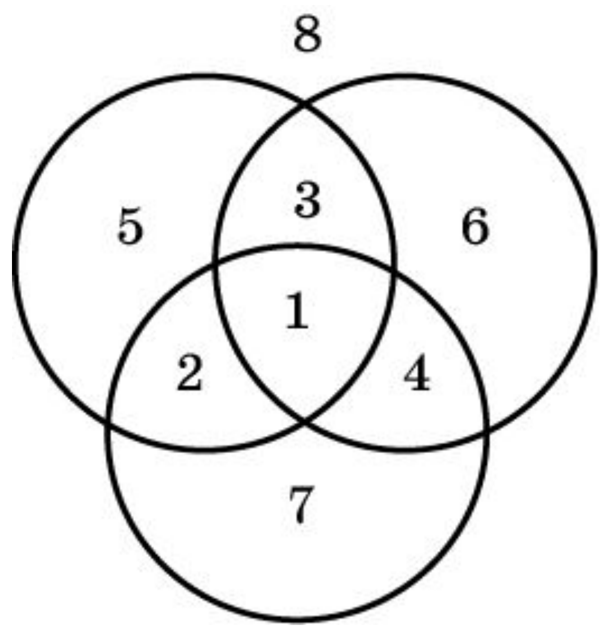
Какое наибольшее число точек попарных пересечений могут иметь а) две окружности; б) три окружности; в) четыре окружности?



Ответ: а) 2; б) 6; в) 12.

Упражнение 14

На какое наибольшее число частей могут делить плоскость: а) одна окружность; б) две окружности; в) три окружности?



Ответ: а) 2;
б) 4;
в) 8.

Упражнение 15

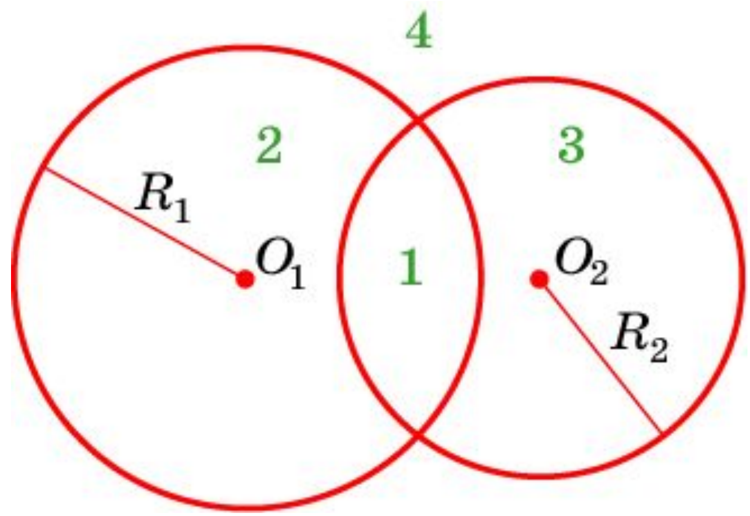
Две окружности с центрами в точках O_1, O_2 и радиусами R_1, R_2 разбили плоскость на четыре области. Какой области принадлежит точка A, для которой выполняются неравенства:

а) $AO_1 < R_1$ и $AO_2 < R_2$;

б) $AO_1 < R_1$ и $AO_2 > R_2$;

в) $AO_1 > R_1$ и $AO_2 < R_2$;

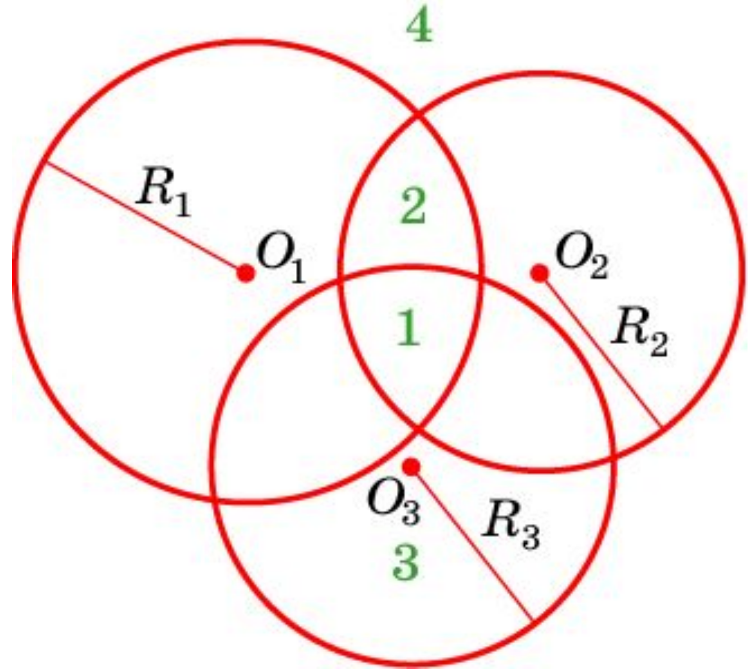
г) $AO_1 > R_1$ и $AO_2 > R_2$;



Ответ: а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.

Упражнение 16

Три окружности разбили плоскость на восемь областей. Напишите неравенства, которым удовлетворяет точка A, принадлежащая области: а) 1; б) 2; в) 3; г) 4.



Ответ:

а) $AO_1 < R_1$, $AO_2 < R_2$, $AO_3 < R_3$;

б) $AO_1 < R_1$, $AO_2 < R_2$, $AO_3 > R_3$;

в) $AO_1 > R_1$, $AO_2 > R_2$, $AO_3 < R_3$;

г) $AO_1 > R_1$, $AO_2 > R_2$, $AO_3 > R_3$.