Движение в геометрии

Автор: Карнаков Петр
11 «Б» класс

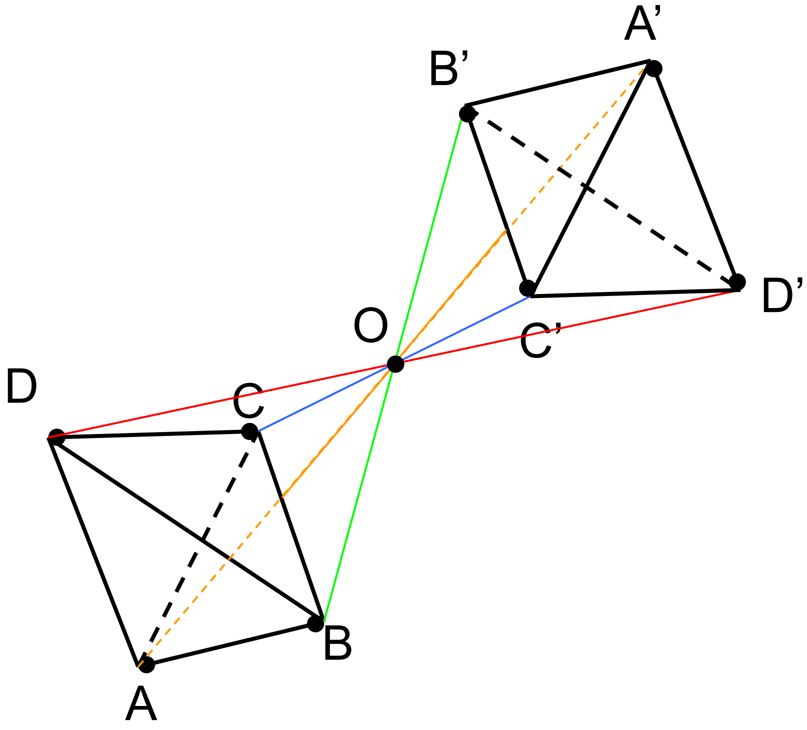
Понятие движения

Движение – это отображение пространства на себя, сохраняющее расстояния между точками

Виды движения

- Центральная симметрия
- Осевая симметрия
- Зеркальная симметрия
- Параллельный перенос

Центральная симметрия



$$Дано: \quad O(x_O; y_O; z_O), \quad A(x_A; y_A; z_A)$$

$$Найти: \quad A'(x_{A'}; y_{A'}; z_{A'})$$

$$Решение:$$

$$A \to A', \quad O - середина\ AA',$$

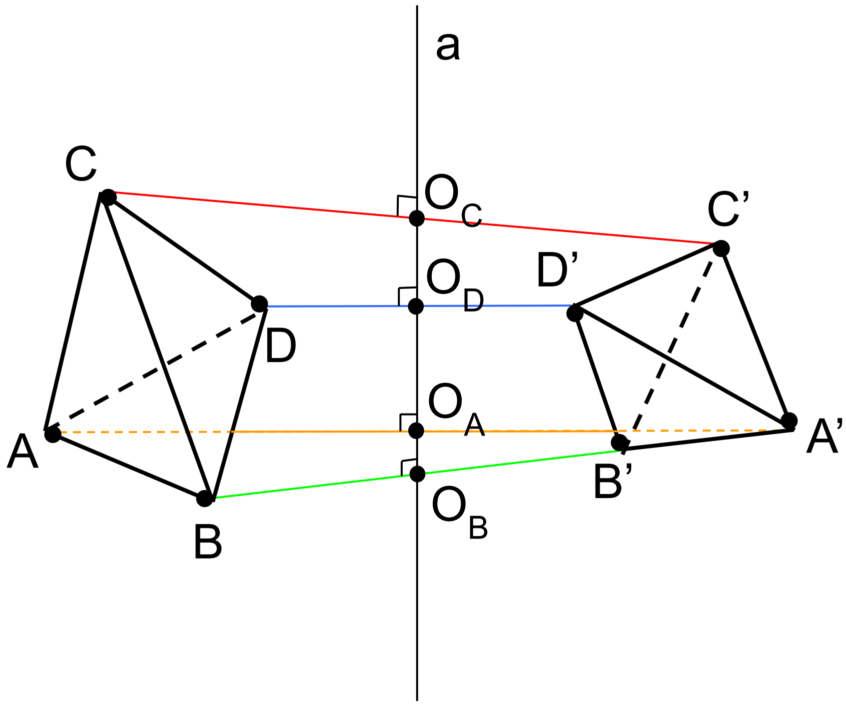
$$\frac{x_A + x_{A'}}{2} = x_O \quad \Rightarrow \quad x_{A'} = 2x_0 - x_A$$

$$\frac{y_A + y_{A'}}{2} = y_O \quad \Rightarrow \quad y_{A'} = 2y_0 - y_A$$

$$\frac{z_A + z_{A'}}{2} = z_O \quad \Rightarrow \quad z_{A'} = 2z_0 - z_A$$

$$A'(2x_0 - x_A; 2y_0 - y_A; 2z_0 - z_A)$$

Осевая симметрия



$$\text{Дано:}\quad a: M_0(x_0, y_0, z_0),\ \vec{q}\{x_1, y_1, z_1\}$$

$$A(x_A, y_A, z_A)$$

$$\text{Найти:}\quad A'(x_{A'}, y_{A'}, z_{A'})$$

Решение:

$$\frac{x - x_0}{x_1} = \frac{y - y_0}{y_1} = \frac{z - z_0}{z_1} \quad - \quad \text{уравнение прямой } a$$

$$H(x_H, y_H, z_G),\quad \overrightarrow{AH} \perp a,\quad H \in a$$

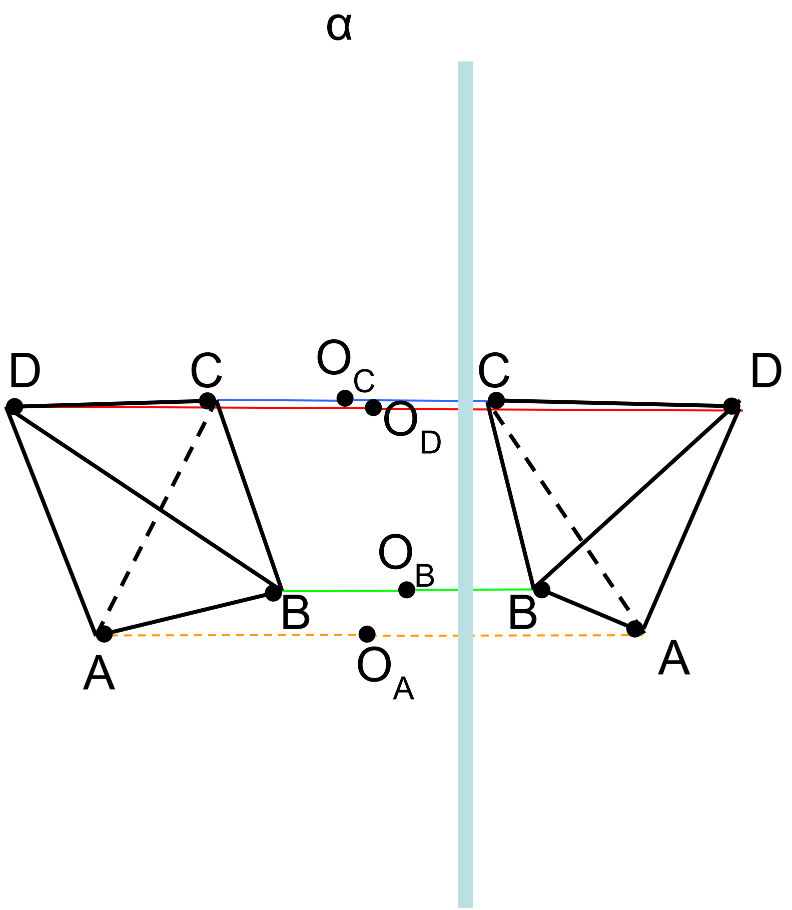
$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \vec{q} = 0 \\ H \in a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_H - x_A)x_1 + (x_H - x_A)y_1 + (x_H - x_A)z_1 = 0 \\ \dfrac{x_H - x_0}{x_1} = \dfrac{y_H - y_0}{y_1} = \dfrac{z_H - z_0}{z_1} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_H = \dfrac{x_A x_1^2 + x_0 y_1^2 + x_0 z_1^2 - x_1(y_1(y_0 - y_A) + z_1(z_0 - z_A))}{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \\ y_H = \dfrac{y_1(x_H - x_0)}{x_1} + y_0 \\ z_H = \dfrac{z_1(x_H - x_0)}{x_1} + z_0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AH}\{x_H - x_A;\ y_H - y_A;\ z_H - z_A\}$$

$$A \xrightarrow{2\overrightarrow{AH}} A';\ A'(2x_H - x_A;\ 2y_H - y_A;\ 2z_H - z_A)$$

Зеркальная симметрия



$$Дано:\ \alpha : ax+by+cz+d=0$$

$$A(x_A, y_A, z_A)$$

$$Найти:\ A'(x_{A'}, y_{A'}, z_{A'})$$

Решение:

$ax+by+cz+d=0$ – *уравнение плоскости, где* $\vec{q}(a,b,c) \perp \alpha$

$\overrightarrow{AH}\{x_H, y_H, z_H\} \parallel \vec{q}(a,b,c),\ H \in \alpha$

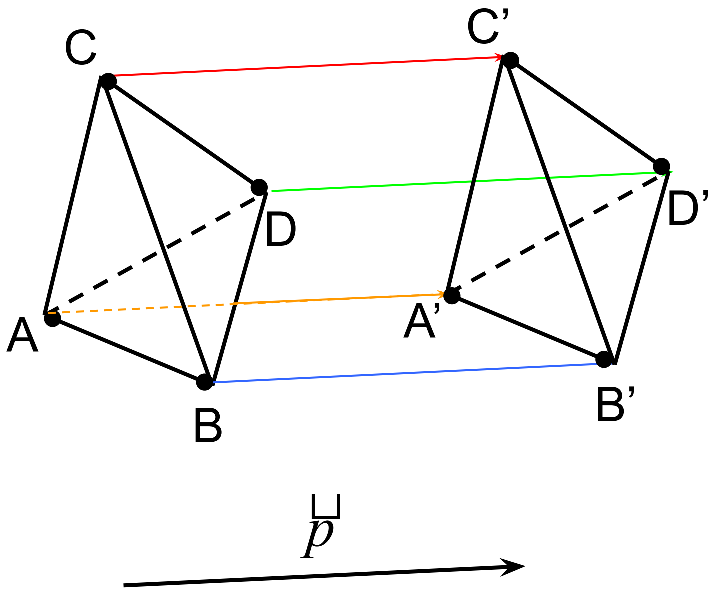
$$\begin{cases} \dfrac{x_H - x_A}{a} = \dfrac{y_H - y_A}{b} = \dfrac{z_H - z_A}{c} \\ ax_H + by_H + cz_H + d = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_H = \dfrac{a(y_A b + z_A c + d) + b^2 x_A + c^2 x_A}{a^2+b^2+c^2} \\ y_H = \dfrac{b(x_H - x_A)}{a} + y_A \\ z_H = \dfrac{b(z_H - z_A)}{a} + z_A \end{cases}$$

$\overrightarrow{AH}\{x_H - x_A;\ y_H - y_A;\ z_H - z_A\}$

$A \xrightarrow{2\overrightarrow{AH}} A',\ A'(2x_H - x_A;\ 2y_H - y_A;\ 2z_H - z_A)$

Параллельный перенос



$$Дано: \ \vec{p}\{x_P, y_P, z_P,\}$$

$$A(x_A, y_A, z_A)$$

$$Найти: A'(x_{A'}, y_{A'}, z_{A'})$$

$$Решение:$$

$$A \xrightarrow{\vec{p}} A'$$

$$A'(x_A + x_p; y_A + y_p; z_A + z_p)$$