

Урок геометрии в  
11 классе  
учителя Текутовой И.Н.

## Движения в пространстве

- Центральная симметрия
- Осевая симметрия
- Зеркальная симметрия
- Параллельный перенос

у

Форма урока:  
Урок – семинар, решение проблемного вопроса

## Цели урока:

- Актуализировать личностное осмысление учащимися учебного материала «Движения в пространстве»
- Содействовать сознательному пониманию прикладного значения темы, развитию умения видеть в окружающей действительности изучаемые виды движений
- Развивать познавательный интерес к построению образов объектов при различных видах движений
- Способствовать грамотному усвоению темы, отработке практических НАВЫКОВ

**Симметрия является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство.**

***Г. Вейль.***

The image shows a vast archaeological site under a clear blue sky. In the foreground, there are several large, rectangular stone blocks lying on the ground. In the middle ground, there are several groups of standing columns, some with their capitals intact. The columns are made of light-colored stone and are arranged in various configurations, some forming small structures. The background shows more ruins and a distant horizon line. The overall scene is one of ancient grandeur and historical significance.

Движение пространства - это отображение пространства на себя, сохраняющее расстояние между точками.

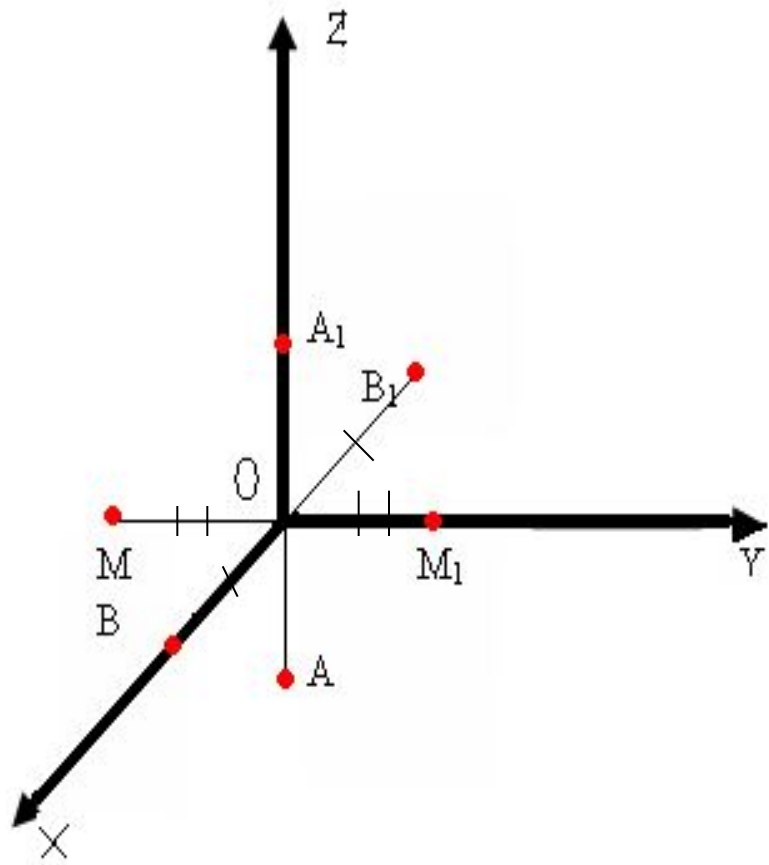
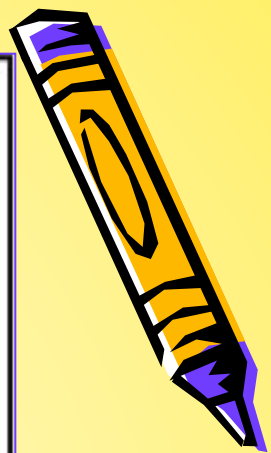
# Центральная симметрия

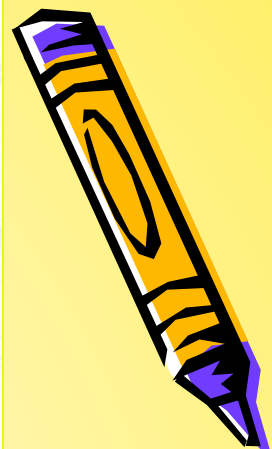


## Центральная симметрия -

отображение пространства на себе,  
при котором любая точка  $M$   
переходит в симметричную ей  
точку  $M_1$  относительно данного  
центра  $O$ .







Докажем, что *центральная симметрия является движением*. Обозначим буквой  $O$  центр симметрии и введем прямоугольную систему координат  $Oxyz$  с началом в точке  $O$ . Установим связь между координатами двух точек  $M(x; y; z)$  и  $M_1(x_1; y_1; z_1)$ , симметричных относительно точки  $O$ . Если точка  $M$  не совпадает с центром  $O$ , то  $O$  — середина отрезка  $MM_1$ . По формулам для координат середины отрезка получаем

$$\frac{x+x_1}{2}=0, \quad \frac{y+y_1}{2}=0, \quad \frac{z+z_1}{2}=0,$$

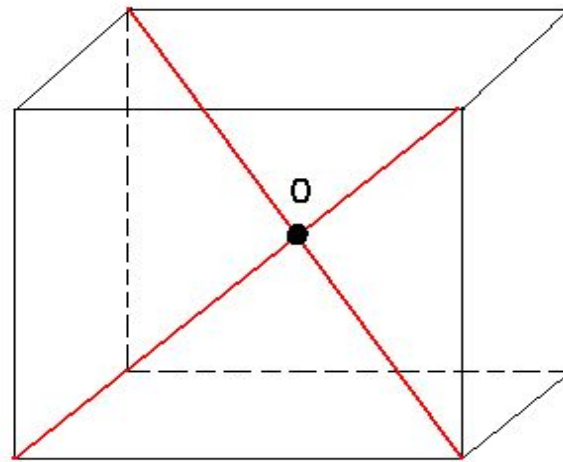
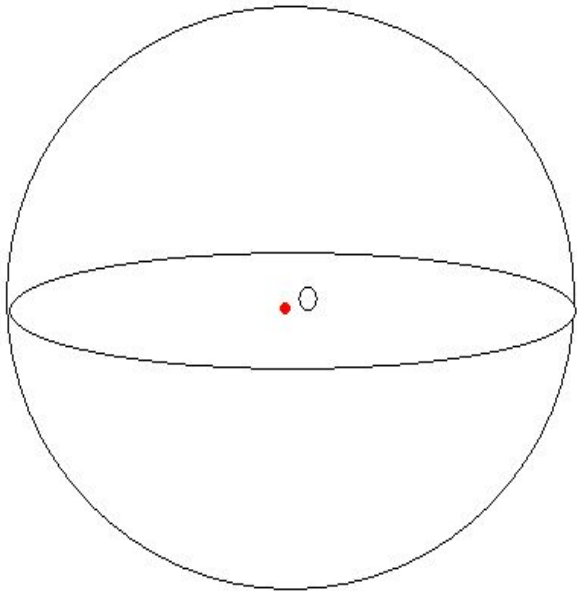
откуда  $x_1 = -x$ ,  $y_1 = -y$ ,  $z_1 = -z$ . Эти формулы верны и в том случае, когда точки  $M$  и  $O$  совпадают (объясните почему).

Рассмотрим теперь любые две точки  $A(x_1; y_1; z_1)$  и  $B(x_2; y_2; z_2)$  и докажем, что расстояние между симметричными им точками  $A_1$  и  $B_1$  равно  $AB$ . Точки  $A_1$  и  $B_1$  имеют координаты  $A_1(-x_1; -y_1; -z_1)$  и  $B_1(-x_2; -y_2; -z_2)$ . По формуле расстояния между двумя точками находим:  $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ,  $A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2}$ . Из этих соотношений ясно, что  $AB = A_1B_1$ , что и требовалось доказать.

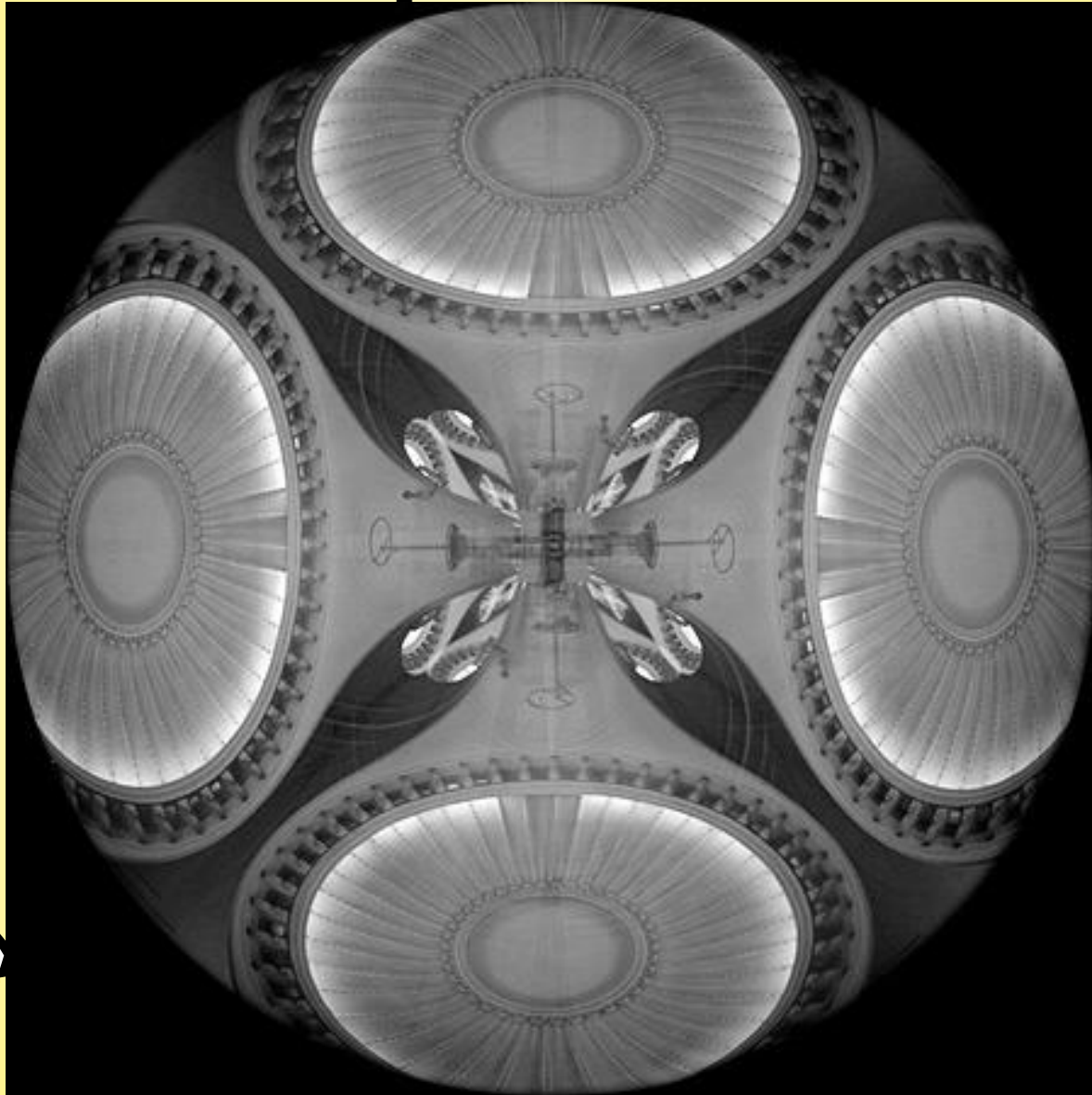




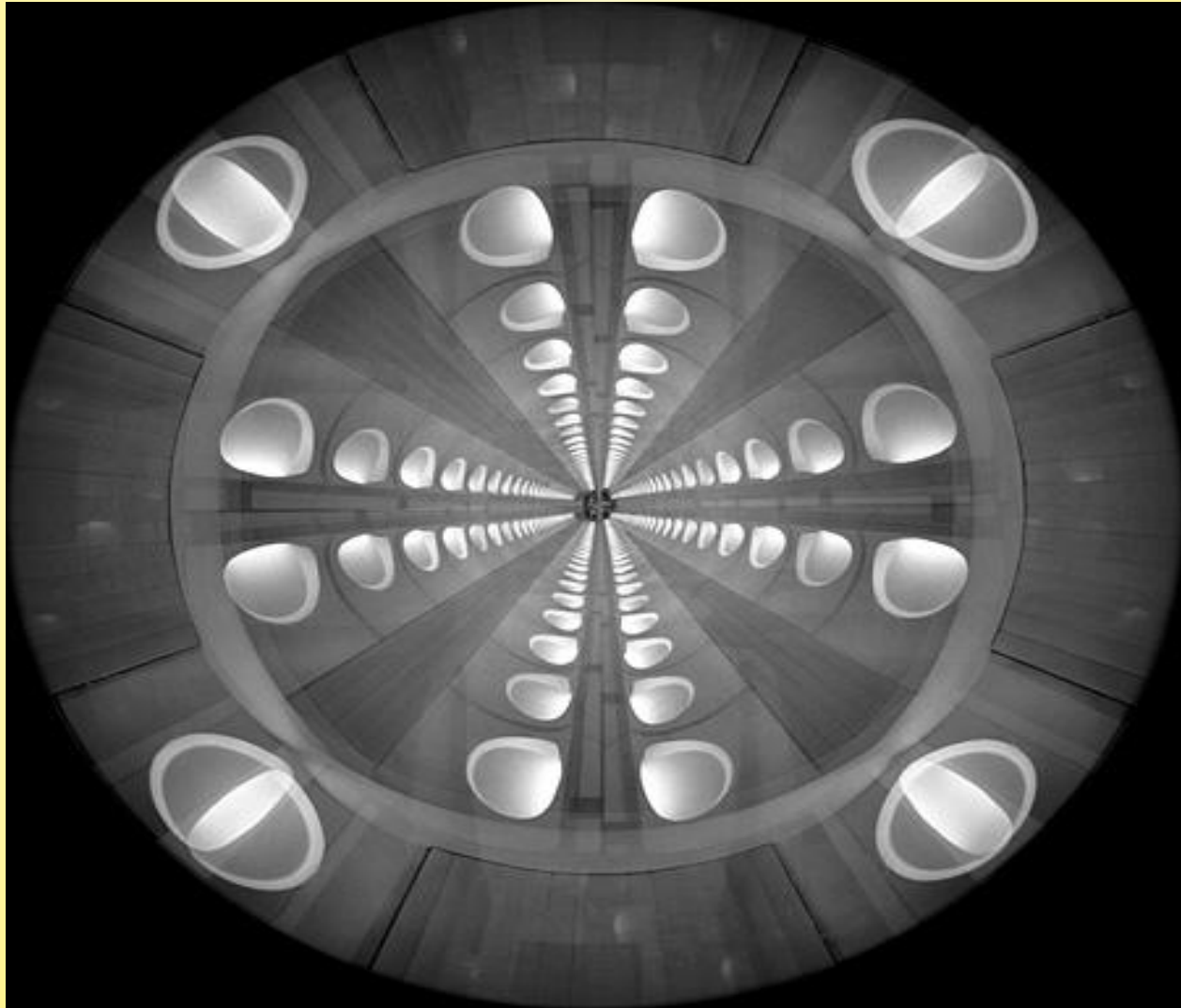
# Фигуры, обладающие Центральной симметрией



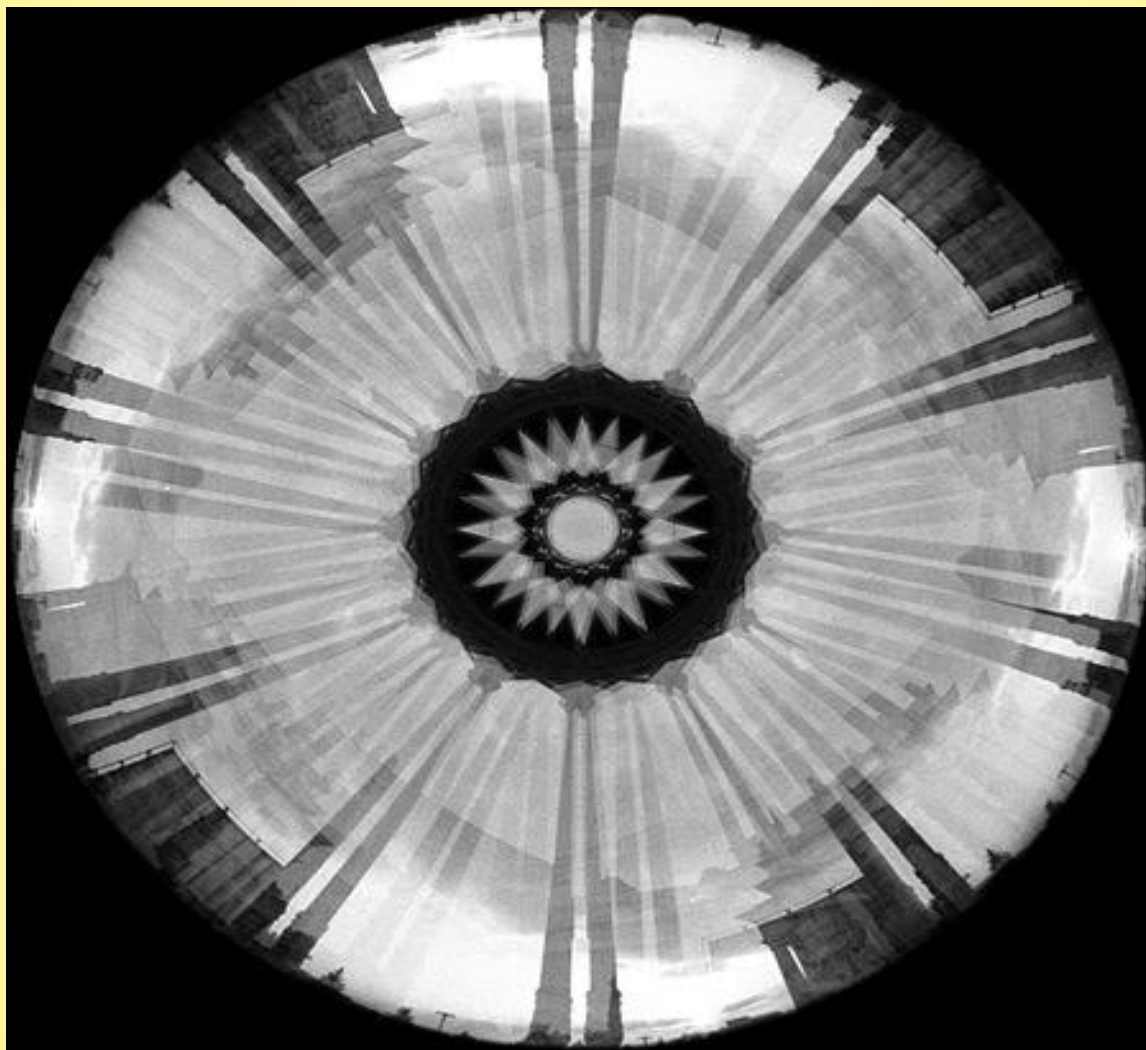
# Ст. метро Сокол



# Ст. метро Римская

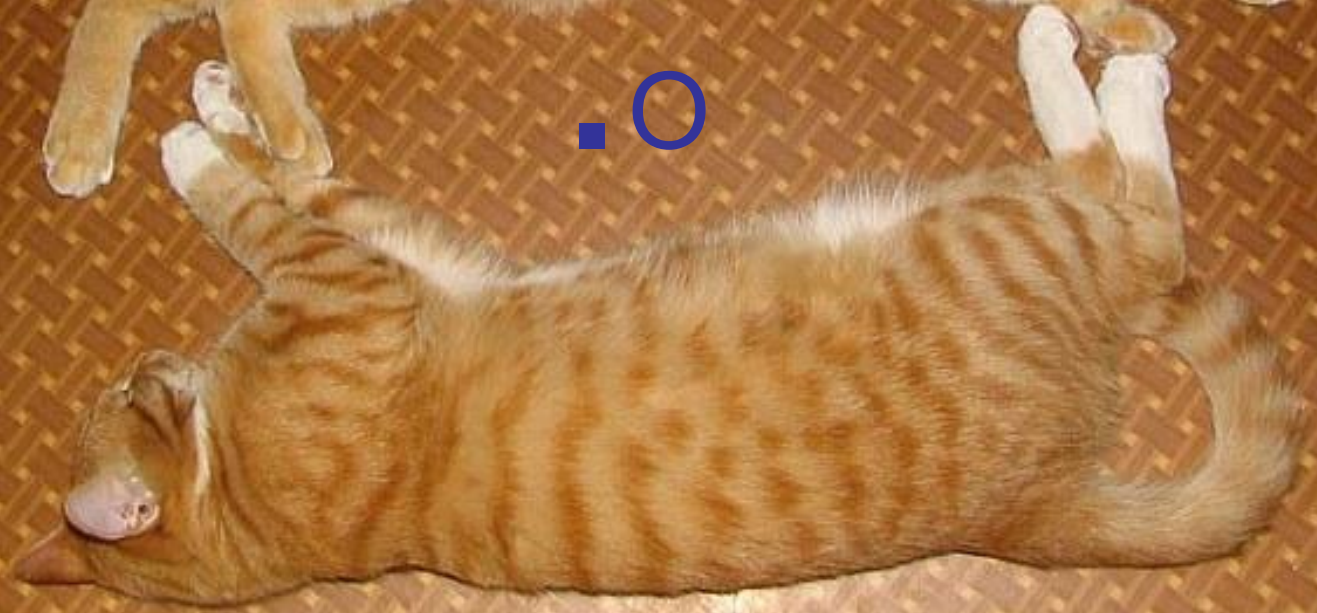


# Павильон Культура, ВВЦ





■ ○





# Осевая симметрия

$M_1$

$M$

$a$

Осевой симметрией с осью  $a$  называется такое отображение пространства на себя, при котором любая точка  $M$  переходит в симметричную ей точку  $M_1$  относительно оси  $a$ .

Осевая симметрия – это движение.



Докажем, что осевая симметрия является движением. Для этого введем прямоугольную систему координат  $Oxyz$  так, чтобы ось  $Oz$  совпала с осью симметрии, и установим связь между координатами двух точек  $M(x;y;z)$  и  $M_1(x_1;y_1;z_1)$  симметричных относительно оси  $Oz$ . Если точка  $M$  не лежит на оси  $Oz$ , то ось  $Oz$ :



1) проходит через середину отрезка  $MM_1$  и 2) перпендикулярна к нему. Из первого условия по формулам для координат середины отрезка получаем  $(x+x_1)/2=0$  и  $(y+y_1)/2=0$ , откуда  $x_1=-x$  и  $y_1=-y$ . Второе условие означает, что аппликаты точек  $M$  и  $M_1$  равны:  $z_1=z$ .

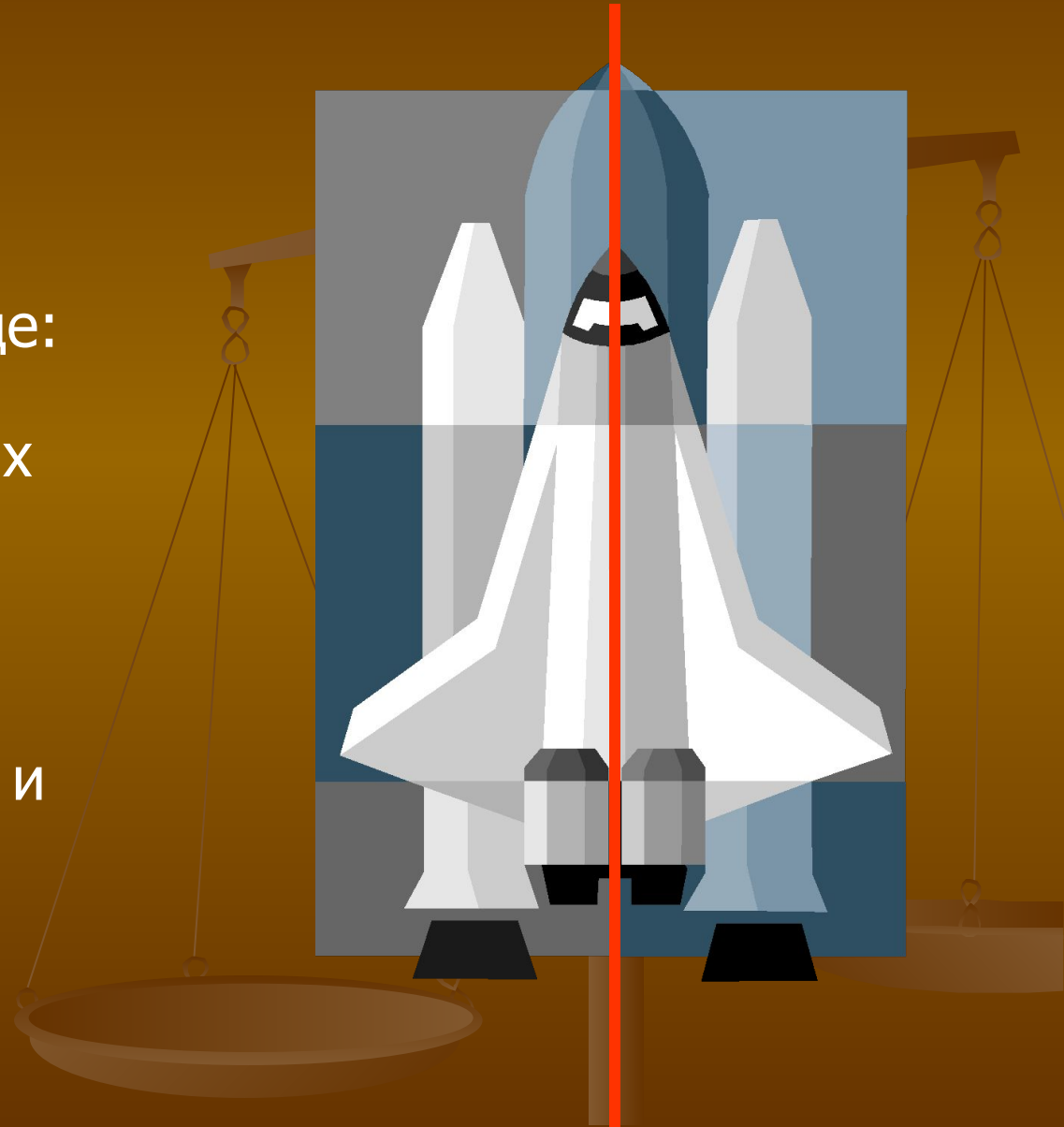


# Доказательство

Рассмотрим теперь любые две точки  $A(x_1; y_1; z_1)$  и  $B(x_2; y_2; z_2)$  и докажем, что расстояние между симметричными им точками  $A_1$  и  $B_1$  равно  $AB$ . Точки  $A_1$  и  $B_1$  имеют координаты  $A_1(-x_1; -y_1; -z_1)$  и  $B_1(-x_2; -y_2; -z_2)$ . По формуле расстояния между двумя точками находим:  $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$ ,  
 $A_1B_1 = \sqrt{(-x_2 + x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2}$ . Из этих соотношений ясно, что  $AB = A_1B_1$ , что и требовалось доказать.

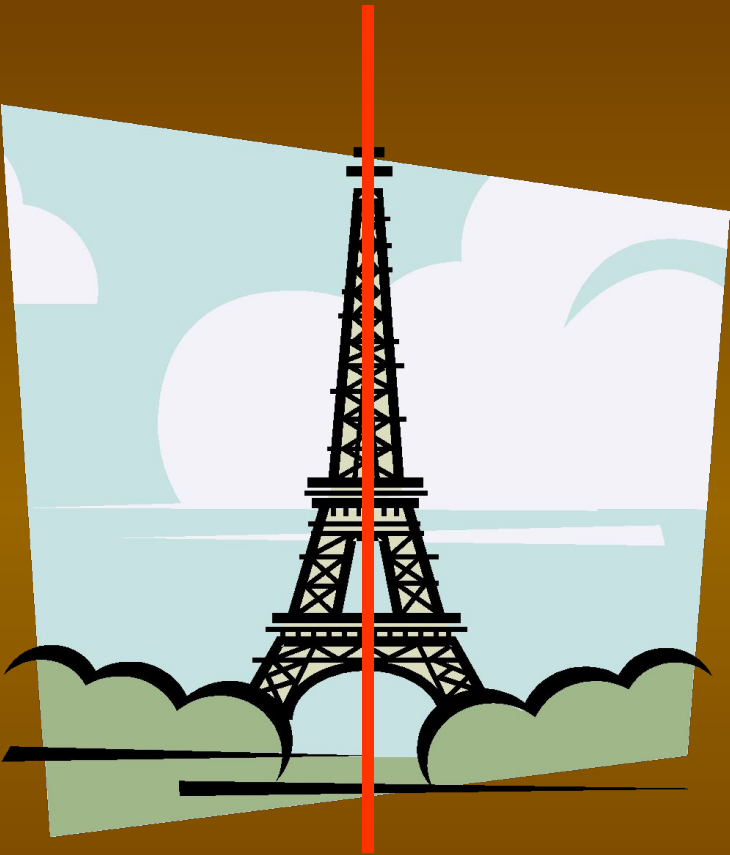
# Применение

Осевая симметрия встречается очень часто. Ее можно увидеть как в природе: листья растений или цветы, тело животных насекомых и даже человека, так и в творении самого человека: здания, автомобили, техника и многое другое.

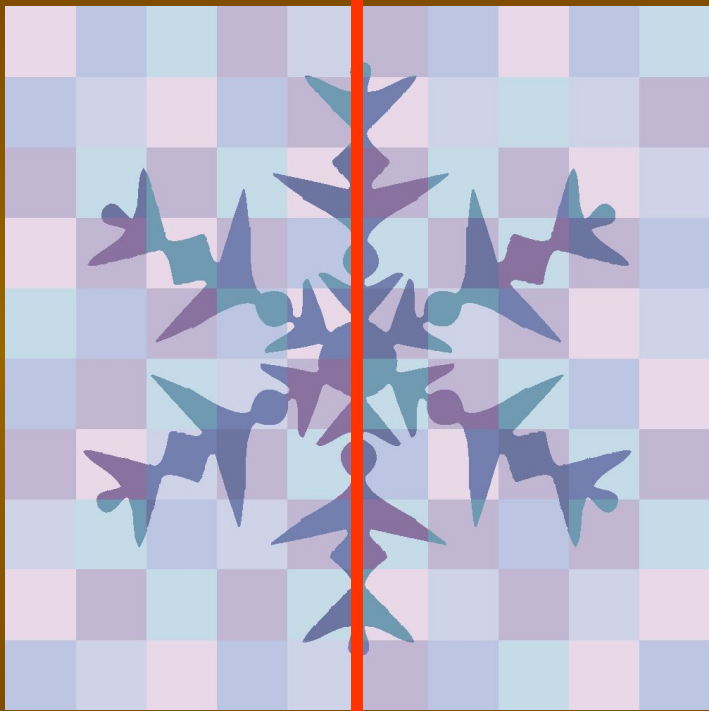




# Применение осевой симметрии в ЖИЗНИ



Архитектурные строения




Снежинки и тело человека



www.VETTON.ru

сова

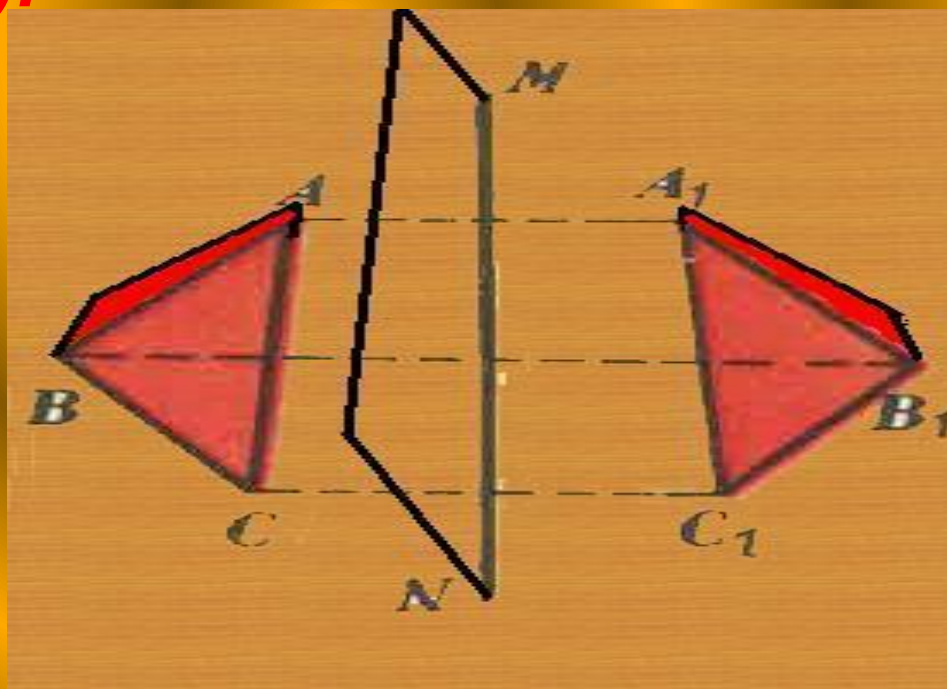
Эйфелева Башня



**Что может быть больше похоже на мою руку или мое ухо , чем их собственное отражение в зеркале ? И все же руку которую я вижу в зеркале , нельзя поставить на место настоящей руки.  
Эммануил Кант .**

**Зеркальная симметрия**

- **Отображение объемной фигуры, при котором каждой ее точке соответствует точка, симметричная ей относительно данной плоскости, называется отражением объемной фигуры в этой плоскости (или зеркальной симметрией).**



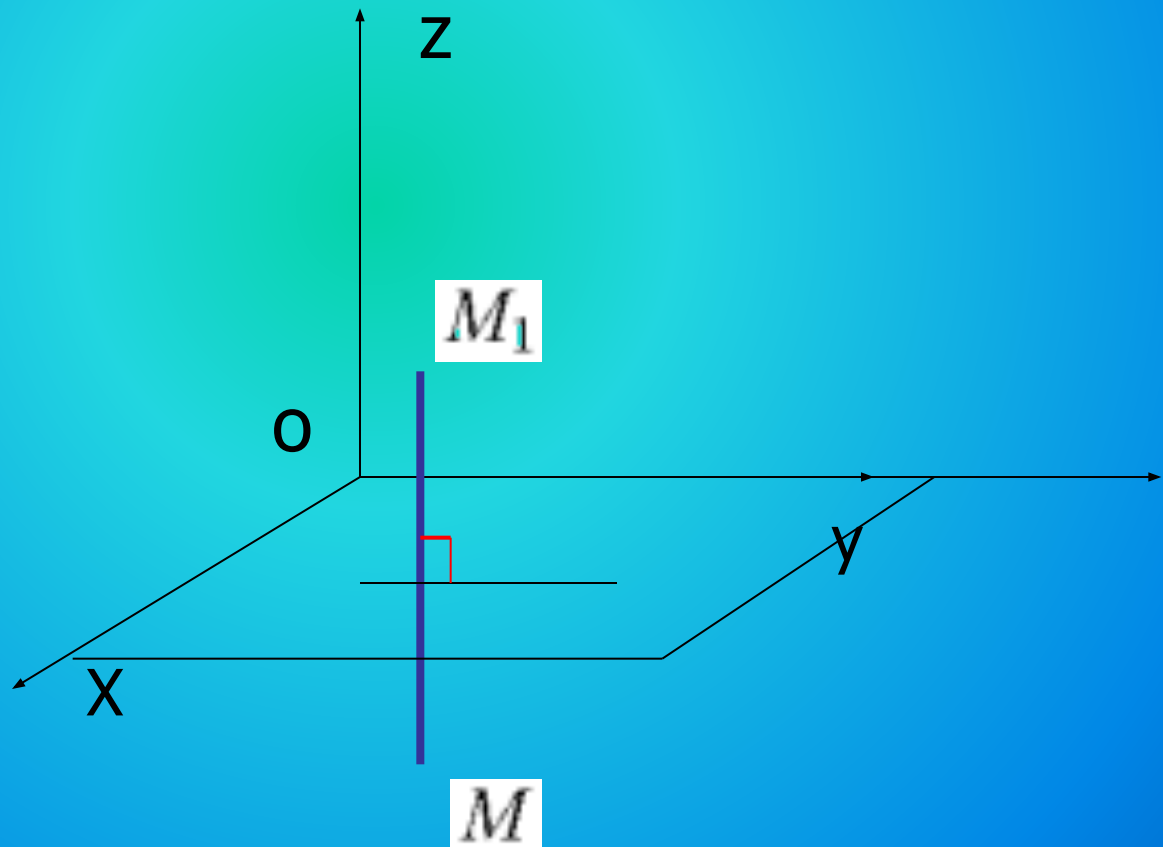


- Теорема 1. Отражение в плоскости сохраняет расстояния и, стало быть, является движением.

Теорема 2. Движение, при котором все точки некоторой плоскости неподвижны, является отражением в этой плоскости или тождественным отображением.

Зеркальная симметрия задается указанием одной пары соответствующих точек, не лежащих в плоскости симметрии: плоскость симметрии проходит через середину отрезка, соединяющего эти точки, перпендикулярно к нему.

Докажем, что зеркальная симметрия – это движение  
Для этого введем прямоугольную систему координат  $Oxyz$  так,  
чтобы плоскость  $Oxy$  совпала с плоскостью симметрии, и  
установим связь между координатами двух точек  $M(x; y; z)$  и  
 $M_1(x_1; y_1; z_1)$ , симметричных относительно плоскости  $Oxy$ .

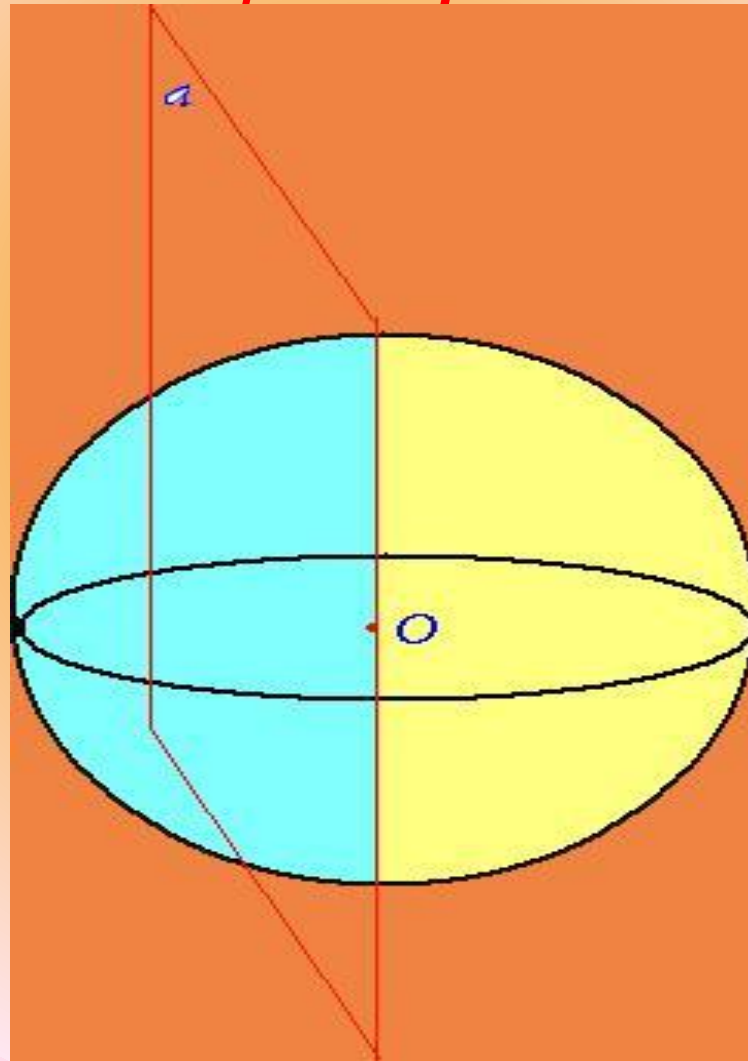


Если точка  $M$  не лежит в плоскости  $Oxy$ , то эта плоскость: 1) проходит через середину отрезка  $MM_1$  и 2) перпендикулярна к нему. Из первого условия по формуле координат середины отрезка получаем  $(z+z_1)/2=0$ , откуда  $z_1=-z$ . Второе условие означает, что отрезок  $MM_1$  параллелен оси  $Oz$ , и, следовательно,  $x_1=x$ ,  $y_1=y$ .  $M$  лежит в плоскости  $Oxy$ .

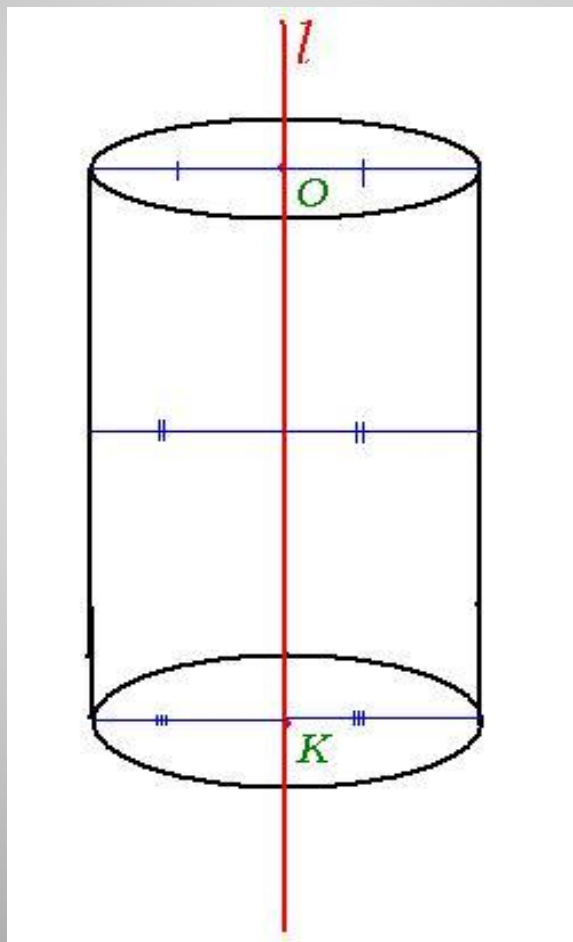
Рассмотрим теперь две точки  $A(x_1; y_1; z_1)$  и  $B(x_2; y_2; z_2)$  и докажем, что расстояние между симметричными им точками  $A_1(x_1; y_1; -z_1)$  и  $B(x_2; y_2; -z_2)$ . По формуле расстояния между двумя точками находим:  $AB = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$ ,  $A_1B_1 = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (-z_2-z_1)^2}$ . Из этих соотношений ясно, что и требовалось доказать.

- **Симметрия относительно плоскости (зеркальная симметрия) пространства есть движение, а значит, обладает всеми свойствами движений: переводит прямую в прямую, плоскость --- в плоскость.**
- **Кроме того, это преобразование пространства, совпадающее со своим обратным: композиция двух симметрий относительно одной и той же плоскости есть тождественное преобразование.**
- **При симметрии относительно плоскости все точки этой плоскости, и только они, остаются на месте (неподвижные точки преобразования). Прямые, лежащие в плоскости симметрии и перпендикулярные ей, переходят в себя. Плоскости, перпендикулярные плоскости симметрии также переходят в себя.**
- **Симметрия относительно плоскости является**

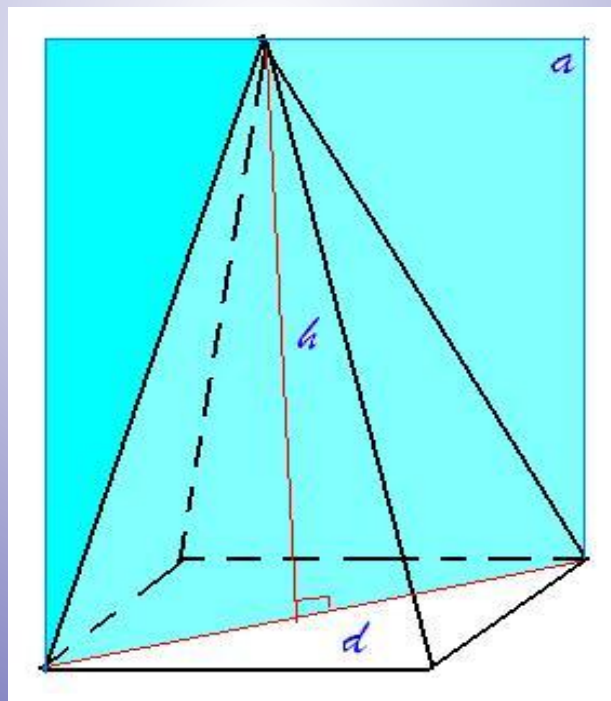
*Шар симметричен относительно  
любой оси, проходящей через его  
центр.*



*Прямой круговой цилиндр симметричен относительно любой плоскости, проходящей через его ось.*



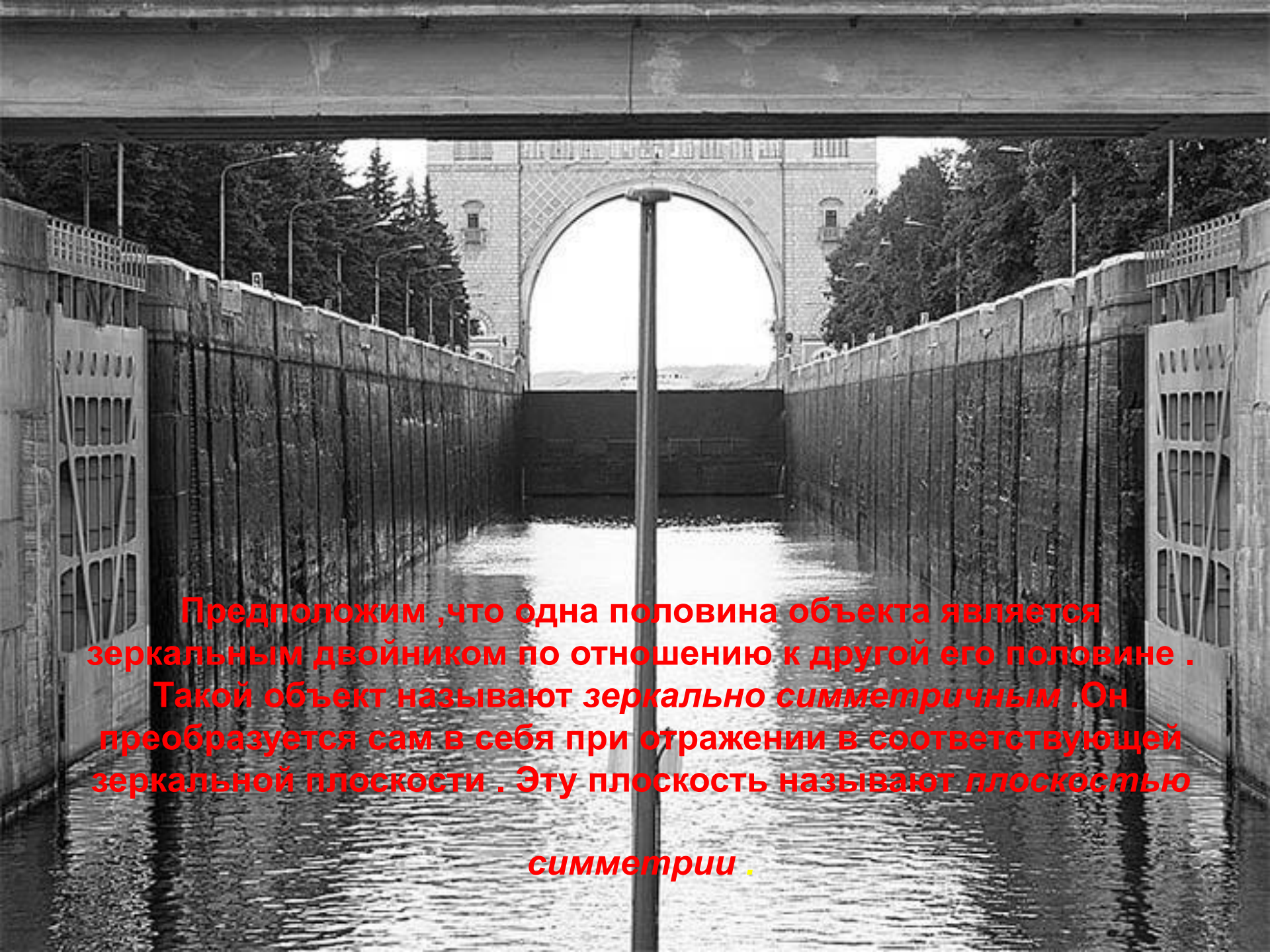
Правильная  $N$ -угольная пирамида  
при четном  $N$  симметрична  
относительно любой плоскости,  
проходящей через ее высоту и  
наибольшую диагональ основания.



Обычно считают ,что наблюдаемый в зеркале двойник является точной копией самого объекта. В действительности это не совсем так . Зеркало не просто копирует объект , а меняет местами (переставляет) передние и задние по отношению к зеркалу части объекта . В сравнении с самим объектом его зеркальный двойник оказывается "вывернутым" вдоль направления перпендикулярного к плоскости зеркала .Этот эффект хорошо виден на одном рисунке и фактически незаметен на другом .







Предположим , что одна половина объекта является зеркальным двойником по отношению к другой его половине . Такой объект называют *зеркально симметричным* . Он преобразуется сам в себя при отражении в соответствующей зеркальной плоскости . Эту плоскость называют *плоскостью симметрии* .

# Здание ЕНУ им. Л.Н Гумилева

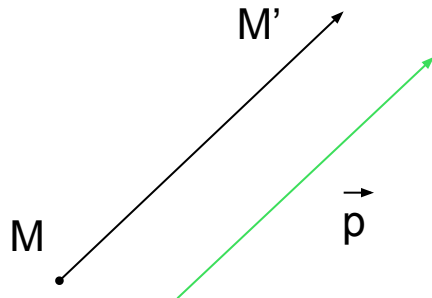


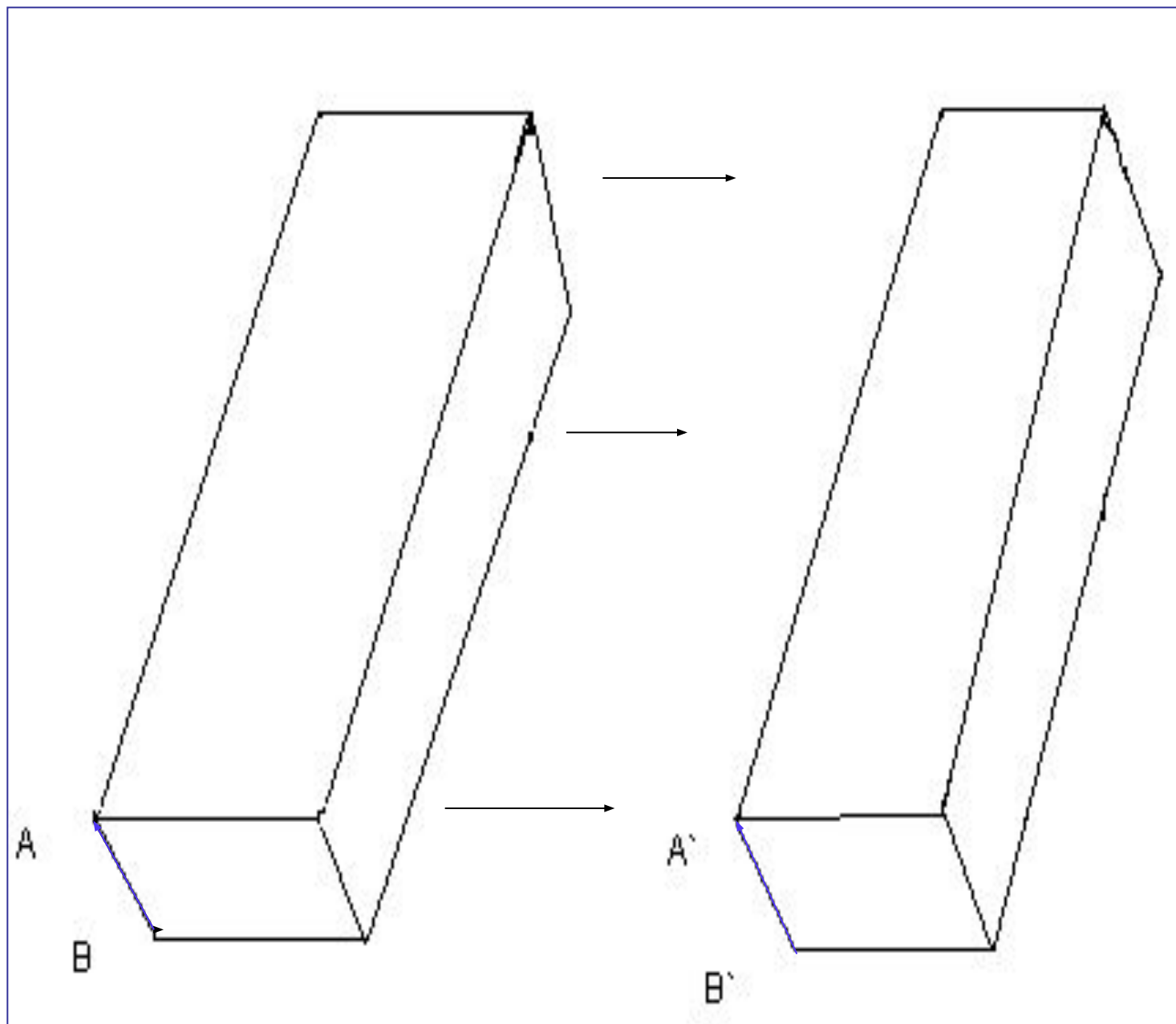
# Параллельный перенос



# Движение плоскости

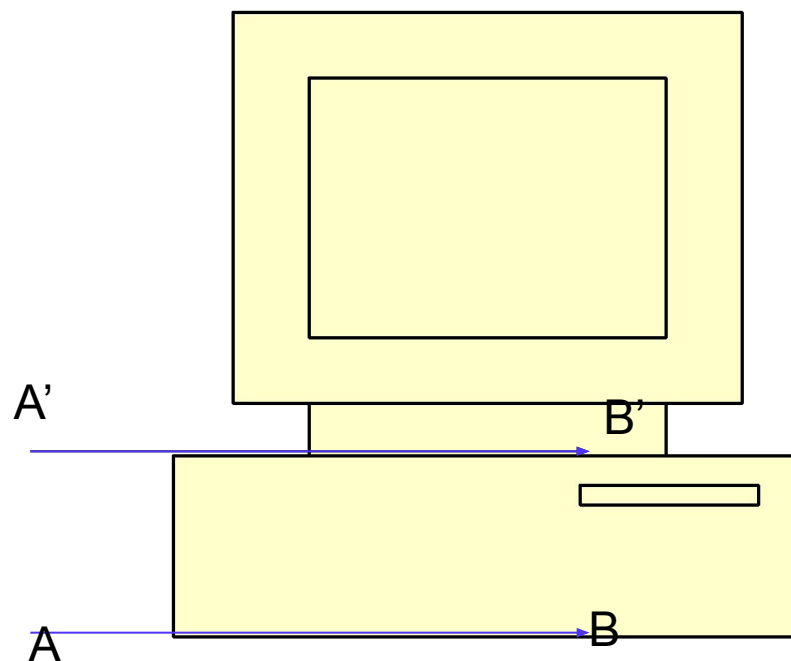
- Движение плоскости – это взаимно однозначное преобразование точек плоскости при котором сохраняются расстояния: если точка  $A$  переходит в  $A'$ ,  $B \rightarrow B'$ , то  $A'B' = AB$
- При движении так же сохраняются углы
- Параллельный перенос – это отображение пространства на себя, при котором любая точка  $M$  переходит в точку  $M'$ , что  $MM' = p$





# Применение

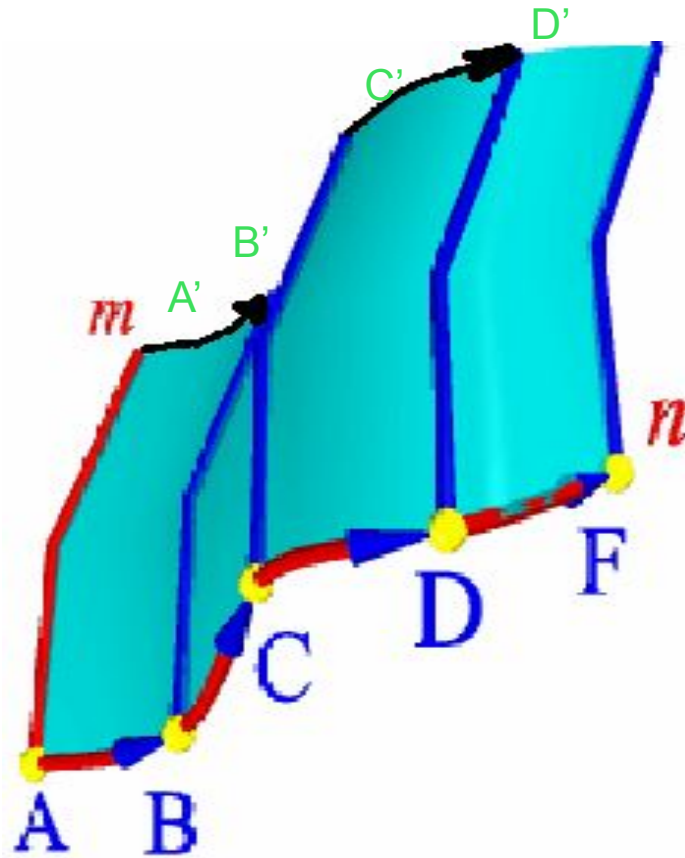
- Мы так же можем увидеть «параллельный перенос в повседневной жизни. Мы видим эти мелочи повсюду, но вряд ли кто-то из нас задумывался об этом. Дизайн в квартирах иногда выполняют в стиле «параллели».



# ПОВЕРХНОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСА

- Поверхностью ***параллельного переноса*** называется поверхность, образованная поступательным плоскопараллельным перемещением образующей - плоской кривой линии ***m*** по криволинейной направляющей ***n***

Наглядным примером  
плоскости  
параллельного  
переноса может  
служить скользящая  
опалубка,  
применяемая в  
строительстве.

















**Спасибо за урок**