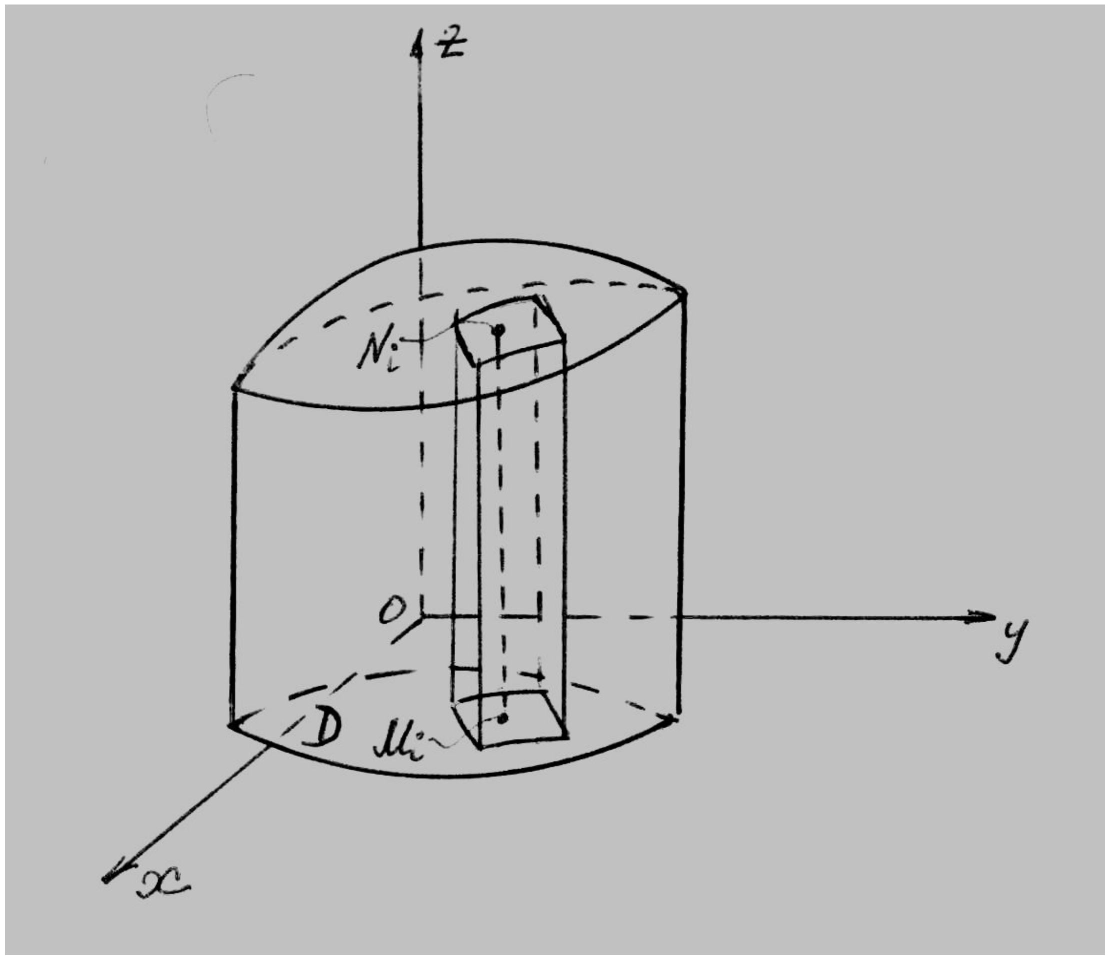
Двойные интегралы

Лекция 7

Цилиндрический брус

Назовём цилиндрическим брусом, или цилиндроидом, тело, ограниченное плоскостью Oxy, поверхностью $z=f(x,y)$ и цилиндрической поверхностью, образующая которой параллельна оси Oz (рис). Область D, вырезаемая цилиндрическим брусом на плоскости Oxy, называется основанием цилиндра, а цилиндрическая поверхность – его боковой поверхностью.

Вычисление объема цилиндрического бруса



Продолжение

Объём цилиндра приближённо выражается суммой $V \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$,

где $\Delta\sigma i$ –площадь элементарной ячейки . Таким образом, переходя к пределу при условии, что

max diam$\Delta\sigma i \to 0$, мы получим точный объём цилиндра:

$$V = \lim_{\max diam \Delta\sigma_i} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i$$

Определение двойного интеграла

Определение. Если существует конечный предел интегральных сумм при условии, что max $diam\ \Delta\sigma i \to 0$, не зависящий ни от разбиения области D на элементарные ячейки, ни от выбора точек Mi, то он называется двойным интегралом по области D от функции $z=f(x,y)$ и обозначается $\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma$.

Продолжение

Таким образом, по определению

$$\iint\limits_D f(x,y)\,d\sigma = \lim_{\max diam \Delta\sigma_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}, \overline{y_i})\Delta\sigma_i$$

В этой формуле *f(x,y)* называют подынтегральной функцией, D – областью интегрирования, а *dσ* – элементом площади.

Некоторые определения

Назовём область D *замкнутой,* если этой области принадлежат как внутренние, так и граничные точки области, то есть если граница области причисляется к самой области.

Некоторые определения

Кривая называется *гладкой*, если эта кривая непрерывна и в каждой точке имеет касательную, непрерывно меняющую своё положение от точки к точке. Очевидно, кривая будет гладкой, если её уравнение на плоскости Oxy может быть записано в виде $y=f(x)$ ($a \le x \le b$), где функция $f(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную на данном интервале (a,b).

Некоторые определения

Кусочно – гладкой мы называем кривую, которую можно разбить на гладкие кривые точками. Например, кусочно – гладкой кривой является ломаная. Сформулируем без доказательства теорему.

Условие существования двойного интеграла

Если область D с кусочно – гладкой границей *Г* ограничена и замкнута, а функция *f(x,y)* непрерывна в области *D*, то двойной интеграл

$$\iint_D f(x, y)d\sigma$$

как предел соответствующих интегральных сумм, существует и не зависит ни от разбиения области D на элементарные ячейки, ни от выбора точек *Mi*(x_i, y_i).

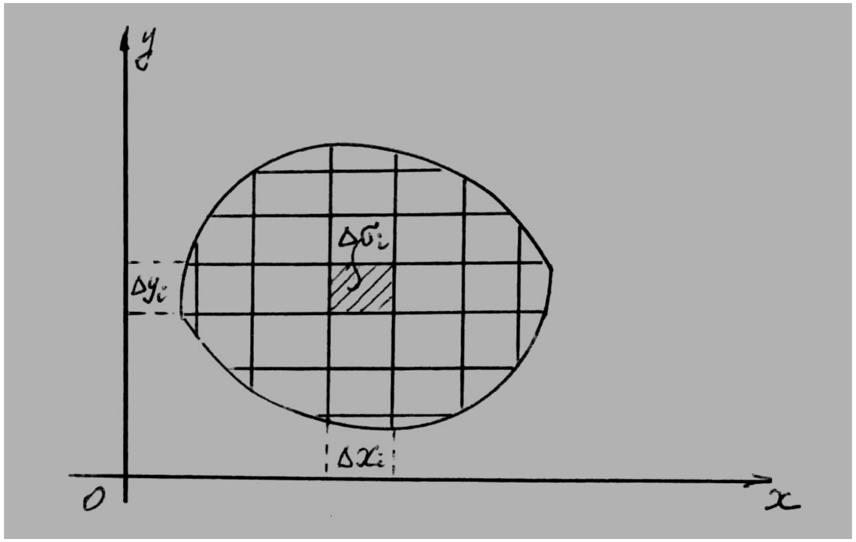
В дальнейшем мы будем предполагать, что условия этой теоремы выполнены.

Двойной интеграл в декартовых координатах

Так как двойной интеграл не зависит от способа разбиения области на элементарные ячейки, то в декартовых координатах область разбивают на ячейки прямыми, параллельными координатным осям.

Тогда элемент площади $d\sigma$ в декартовых координатах полагают равным

$d\sigma = dxdy$.



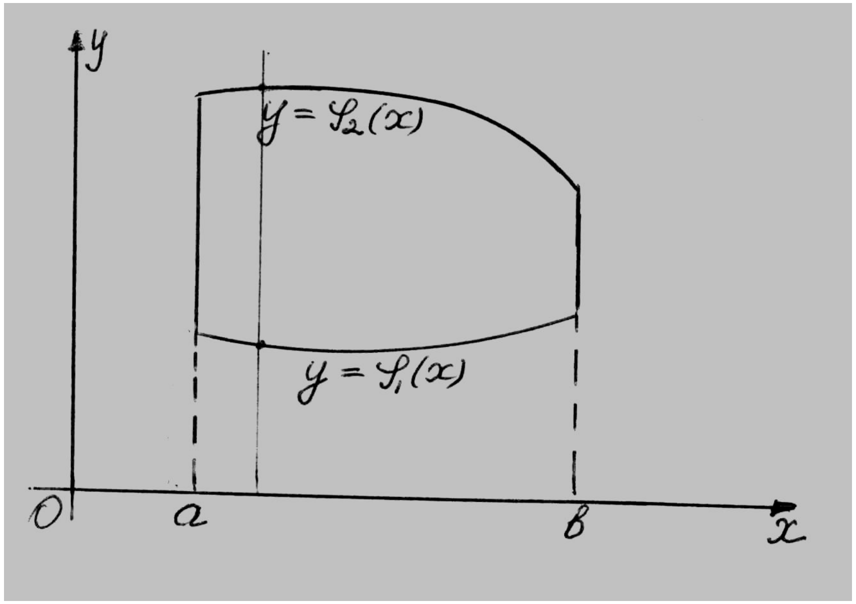
Двойной интеграл в декартовых координатах

Тогда имеем

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(x,y)dxdy.$$

Правильная в направлении оси оУ область

Пусть область ограничена сверху и снизу кривыми, изображенными на рисунке, а с боков – отрезками прямых. Прямая, параллельная оси, пересекает нижнюю и верхнюю границы области не более, чем в 2-х точках. Такую область называют правильной в направлении оси Оу.



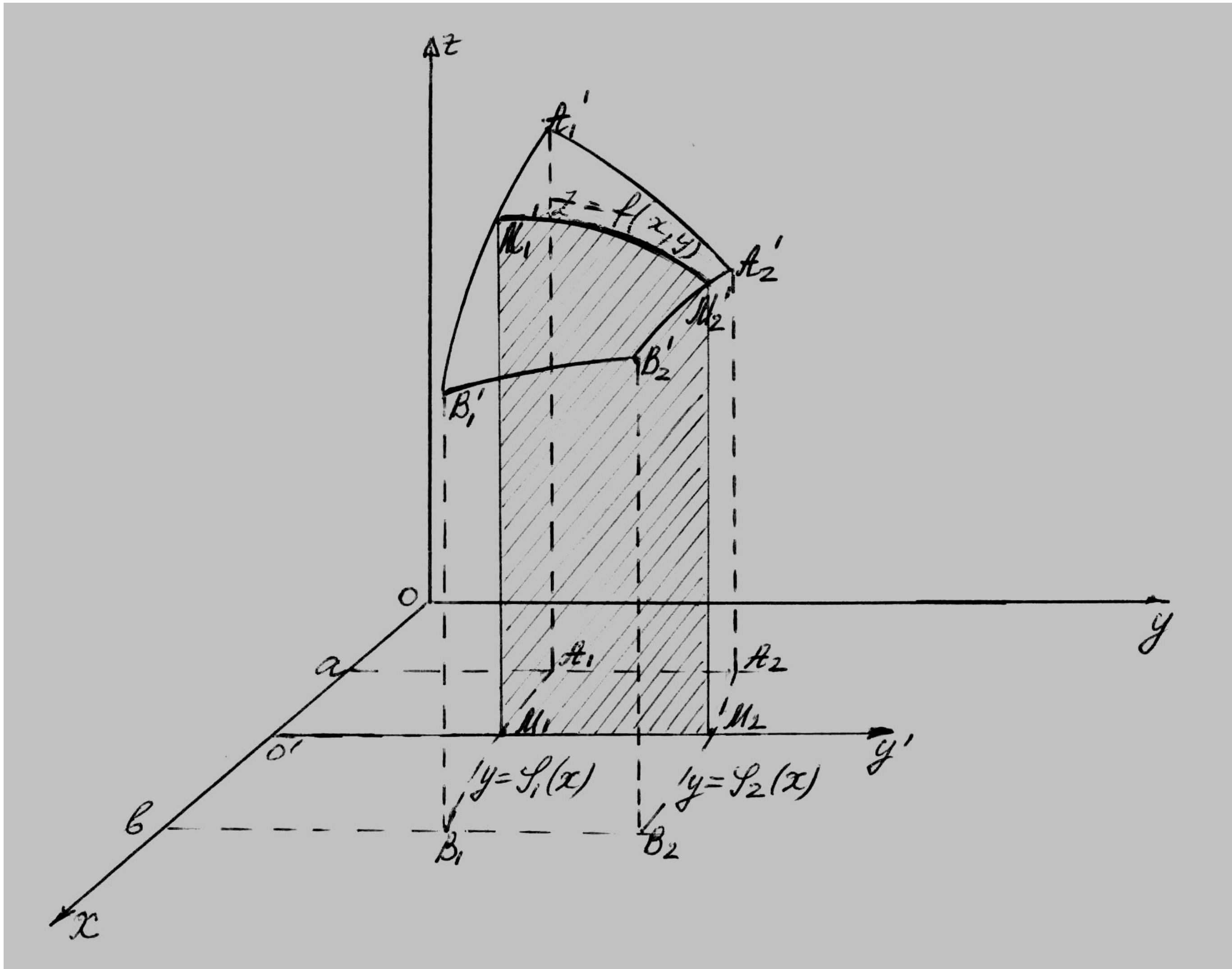
Двукратный интеграл

Назовем двукратным интегралом по области, простой и правильной в направлении оси Ох , интеграл вида

$$\int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

Здесь сначала вычисляют внутренний интеграл, а затем внешний.

Вычисление двойного интеграла в декартовых координатах



Сведение двойного интеграла к двукратному

Двойной интеграл по области, простой и правильной в направлении оси Ох, сводится к двукратному интегралу по такой области:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

Если область простая и правильная в направлении оси оX

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy =$$

$$\int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx.$$

Двойной интеграл по правильной области

Если область является простой и правильной в направлении обеих координатных осей, то интеграл можно вычислить в любом порядке:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy =$$

$$= \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$