Двусвязность

Лекция 7

Определения

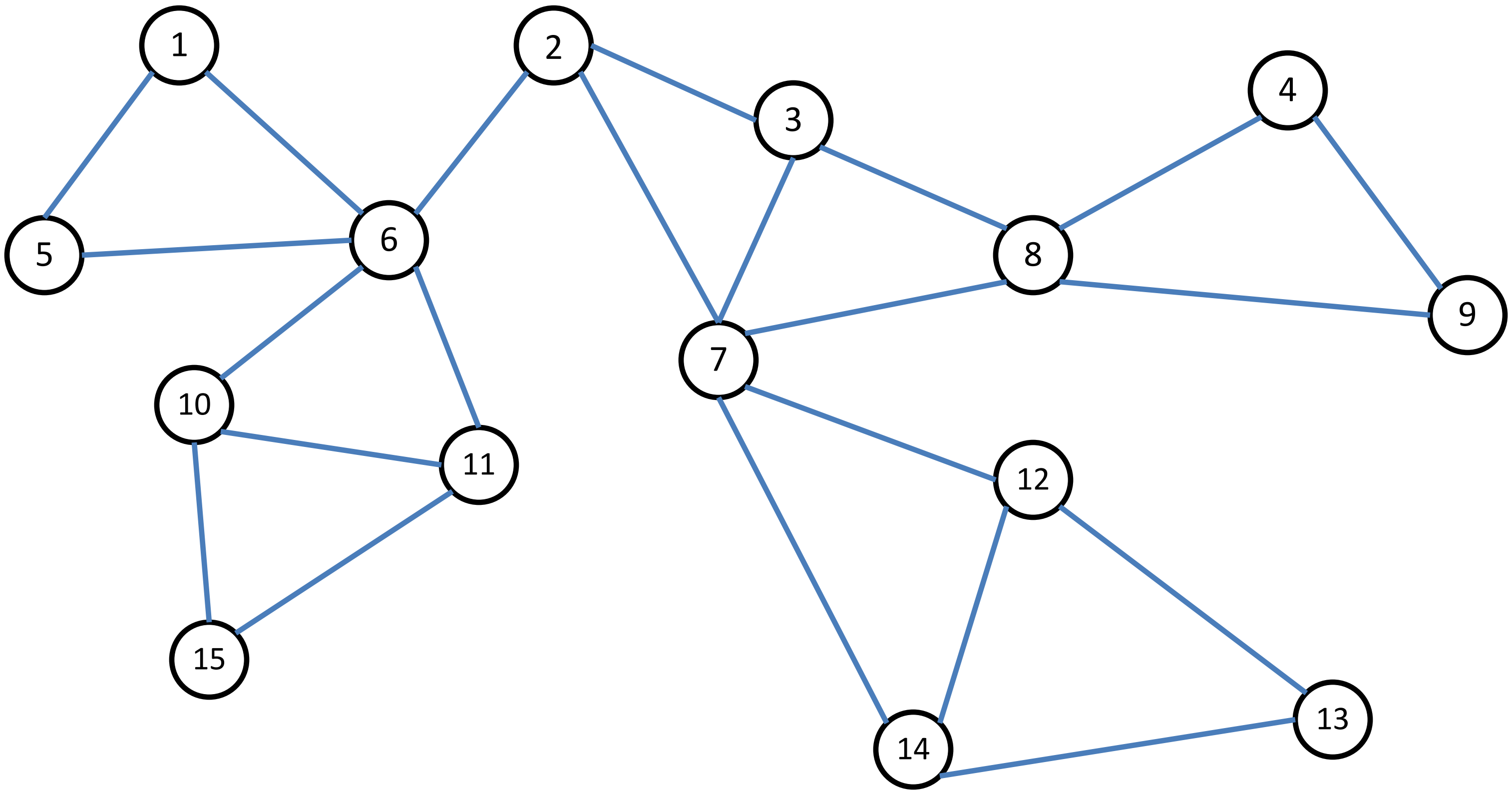
Пусть $G = (V, E)$ — связный неориентированный граф. Узел a называют *точкой сочленения* графа G, если существуют такие узлы v и w, что v, w и a различны и всякий путь между v и w содержит узел a.

Иначе говоря, a — точка сочленения графа G, если удаление узла a расщепляет G не менее чем на две части.

Граф G называется *двусвязным*, если для любой тройки различных узлов v, w, a существует путь между v и w, не содержащий a.

Таким образом, неориентированный связный граф двусвязен тогда и только тогда, когда в нем нет точек сочленения.

Точки сочленения. Пример



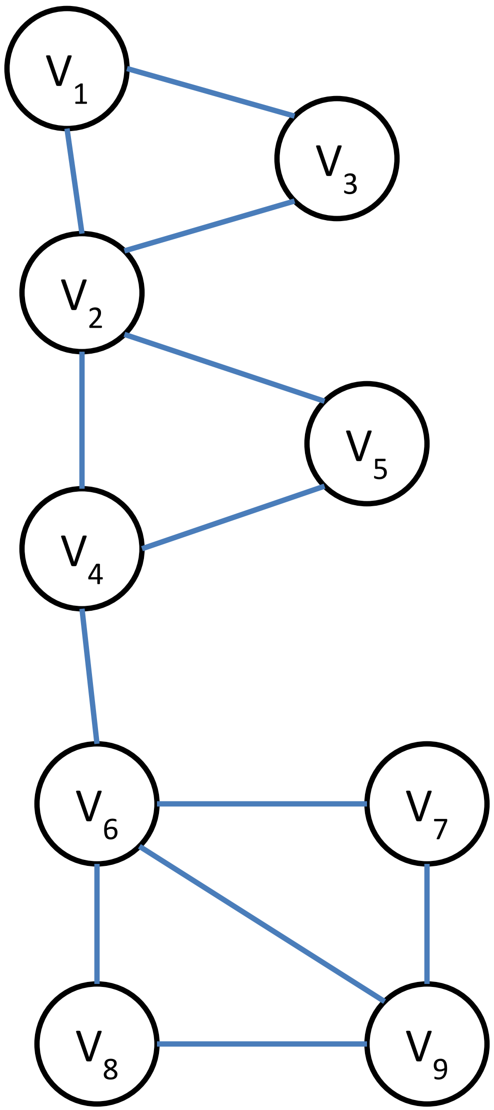
Двусвязные компоненты

На множестве ребер графа G можно задать естественное отношение, полагая, что для ребер e_1 и e_2 выполняется это отношение, если $e_1 = e_2$ или они лежат на некотором цикле.

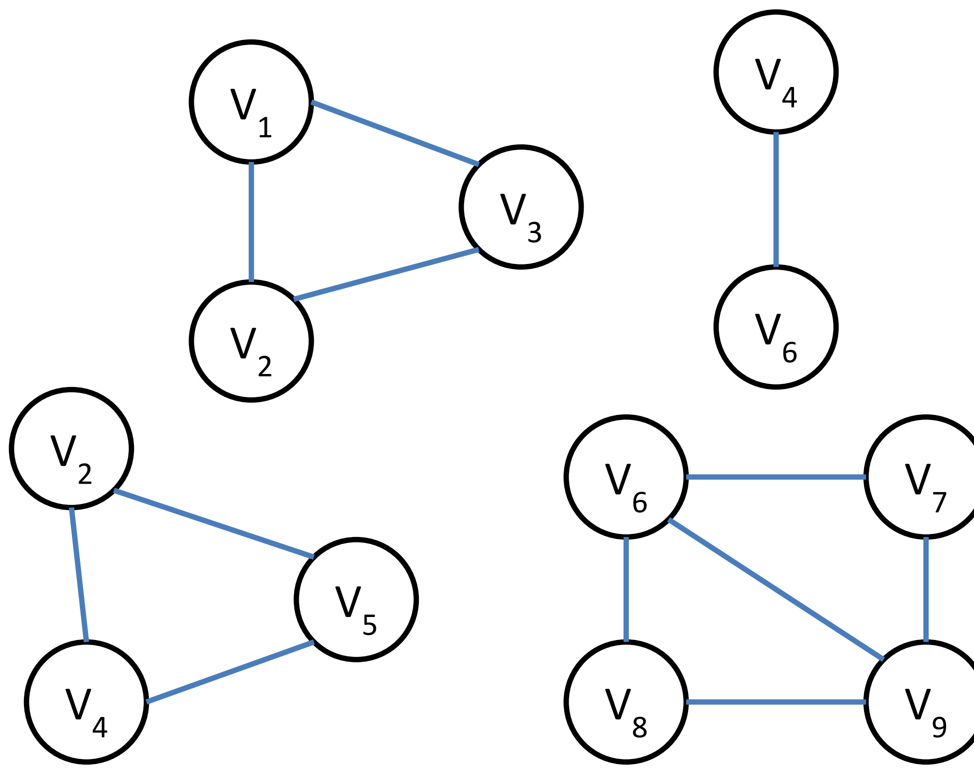
Легко показать, что это отношение является отношением эквивалентности (R называется *отношением эквивалентности* на множестве S, если R *рефлексивно* (aRa для всех $a \in S$), *симметрично* (из aRb следует bRa для всех $a, b \in S$) и *транзитивно* (из aRb и bRc следует aRc)), разбивающим множество ребер графа G на такие классы эквивалентности $E_1, E_2, \ldots, E_k$, что два различных ребра принадлежат одному и тому же классу тогда и только тогда, когда они лежат на общем цикле.

Для $1 \leq i \leq k$ обозначим через V_i множество узлов, лежащих на ребрах из E_i . Каждый граф $G_i = (V_i, E_i)$ называется *двусвязной компонентой* графа G.

Двусвязные компоненты. Пример



$$E_1 = \{ (v_1, v_2), (v_1, v_3), (v_2, v_3)\},$$
$$E_2 = \{ (v_2, v_4), (v_2, v_5), (v_4, v_5)\},$$
$$E_3 = \{ (v_4, v_6)\},$$
$$E_4 = \{ (v_6, v_7), (v_6, v_8), (v_6, v_9), (v_7, v_9), (v_8, v_9)\}$$



Лемма 1.

Пусть $G_i=(V_i, E_i)$ *для* $1 \le i \le k$ — двусвязные компоненты связного неориентированного графа $G = (V, E)$.

Тогда

1) граф G_i двусвязен для каждого i, $1 \le i \le k$;

2) для всех $i \ne j$ пересечение $V_i \cap V_j$ содержит не более одного узла;

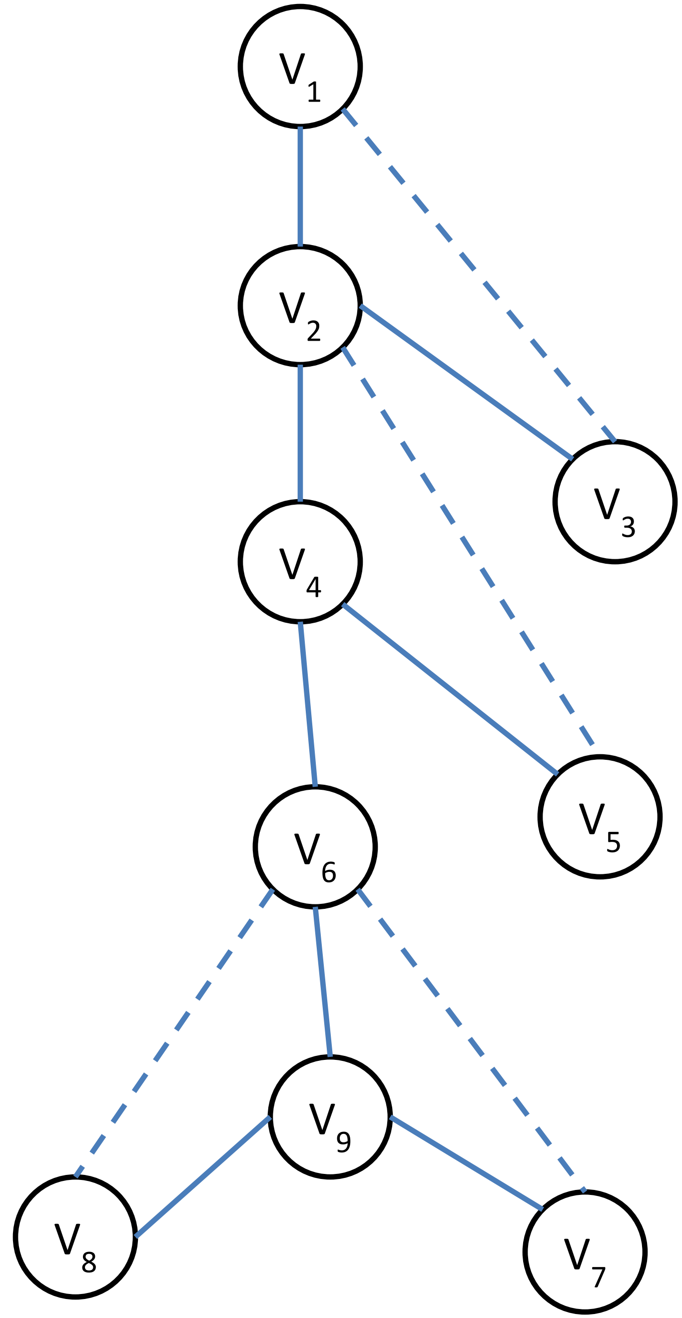
3) a — точка сочленения графа G тогда и только тогда, когда $a \in V_i \cap V_j$ для некоторых $i \ne j$.

Лемма 2.

Пусть G = (V, *E*) *— связный неориентированный граф, а* S=(*V,* T) *—глубинное остовное дерево для него. Узел а является точкой сочленения графа G тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий:*

1) *а — корень и а имеет более одного сына;*

2) *а — не корень и для некоторого его сына s нет обратных ребер между потомками узла s (в том числе самим s) и подлинными предками узла а.*



Нахождение двусвязных компонент и точек сочленения методом поиска в глубину

1. Для всех вершин v вычисляются числа $dfnumber[v]$. Они фиксируют последовательность обхода вершин глубинного остовного дерева в прямом порядке.
2. Для каждой вершины v вычисляется число

$$low[v] = \min \begin{cases} dfnumber[v]; \\ dfnumber[z], (v, z) \text{ – обратное ребро;} \\ low[x], x \text{ – потомок } v. \end{cases}$$

3. Точки сочленения определяются следующим образом:
   - корень остовного дерева будет точкой сочленения тогда и только тогда, когда он имеет двух и более сыновей;
   - вершина v, отличная от корня, будет точкой сочленения тогда и только тогда, когда имеет такого сына w, что

$$low[w] \geq dfnumber\ [v].$$

Алгоритм нахождения двусвязных компонент и точек сочленения

Вход. Связный неориентированный граф $G= (V, E)$.

Выход. Список ребер каждой двусвязной компоненты графа G.

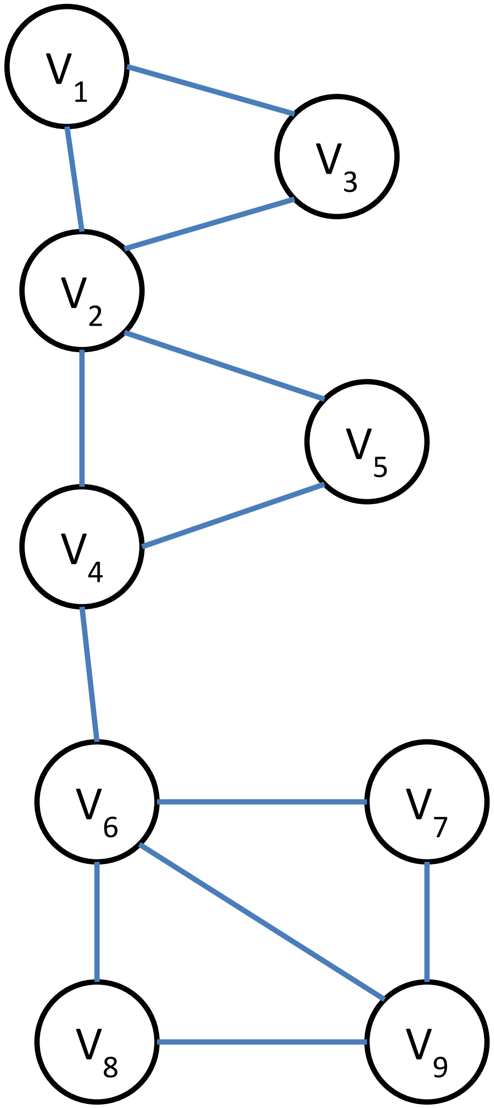
Метод.

Вначале полагаем $T=\varnothing$ и СЧЕТ=1. Помечаем каждый узел в V как "белый", выбираем произвольный узел v_0 в V, отец[v_0] = 0 и вызываем Поиск_дк(v_0), чтобы построить глубинное остовное дерево $S= (V,T)$ и вычислить low[v] для каждого v из V.

Процедура Поиск_дк(v)

```
Поиск_дк(v)
{     цвет [v] ← серый;    dfnumber[v] ← СЧЕТ;   СЧЕТ ← СЧЕТ+1;
      low[v] ← dfnumber[v] ;
      для ∀ w ∈ смежные(v)  выполнить
      {     если (цвет[w] = белый) то
            {     поместить  (v, w) в СТЕК;   добавить (v, w) к T;    отец [w] ← v;
                  Поиск_дк (w);
                  если low[w] ≥ dfnumber[v]  то
                  {      обнаружена двусвязная компонента:
                   вытолкнуть из СТЕКа все ребра вплоть до ребра (v, w) ;
                  }
                  low[v] ← min ( low[v], low[w]);
            }
            иначе
                  если (w ≠ отец[v]) то
                 {если (dfnumber[w] < dfnumber[v] ) то                        {
    поместить  (v, w) в СТЕК;
                     low[v] ← min ( low[v], dfnumber[w] ) }
                  }
      }
       цвет[v] ← чёрный;
}
```

Пример



low[1]= 1

low[2]= 2 1

low[3]= 3 2

low[4]= 4

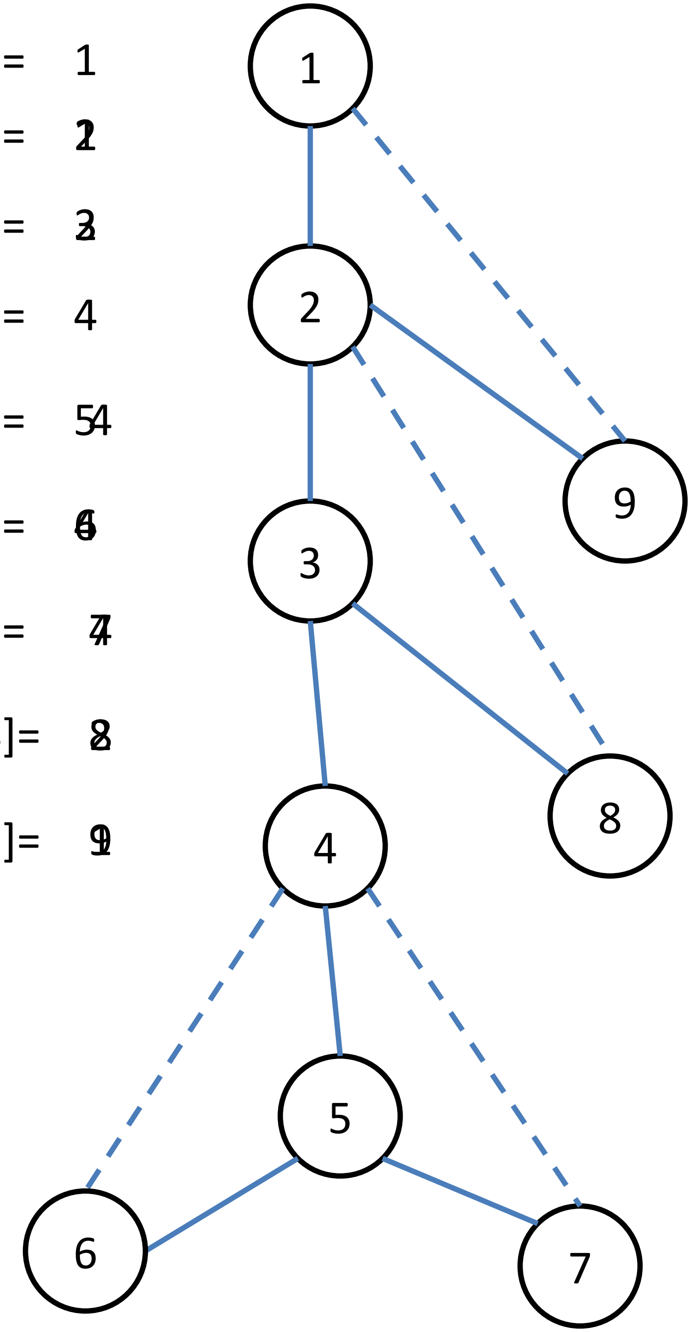
low[5]= 5 4

low[6]= 6 4

low[7]= 7 4

low[8]= 8 2

low[9]= 9 1



Стек

(V_7, V_6)
(V_9, V_7)
(V_8, V_6)
(V_9, V_8)
(V_5, V_9) / (V_6, V_2)
(V_4, V_5) / (V_3, V_6)
(V_2, V_4) / (V_2, V_3)
(V_1, V_2)

Теорема

Алгоритм правильно находит двусвязные компоненты графа G с e ребрами и тратит на это время $O(e)$.