

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Эффективные методы решения неравенств с одной переменной

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

(типовые задания С3)

МБОУ « СОШ №6» г. Нефтеюганска
Учитель математики Юрьева Ольга
Александровна



0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

При решении иррациональных, показательных и логарифмических неравенств в задании С3, в различных сборниках, тренировочных вариантах ЕГЭ используются, в основном, стандартные методы решения, которые, иногда, трудоемки и занимают много времени.

Метод рационализации позволяет упростить и сократить время решения данных неравенств. Этот метод заключается в замене сложного выражения на более простое, равносильное данному на области определения, выражение. Использование данного метода не только упрощает решение, но и сокращает количество ошибок и увеличивает число учащихся, приступающих и решивших задание С3.

1 2 4 5

Правило 1. Если $g(x) \geq 0$, то знак разности $\sqrt{f(x)} - g(x)$ совпадает со знаком разности $f(x) - g^2(x)$ в ОДЗ.

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011

Пример 1: Решить неравенство $\sqrt{x^2 - 6x} < 8 + 2x$

Решение.

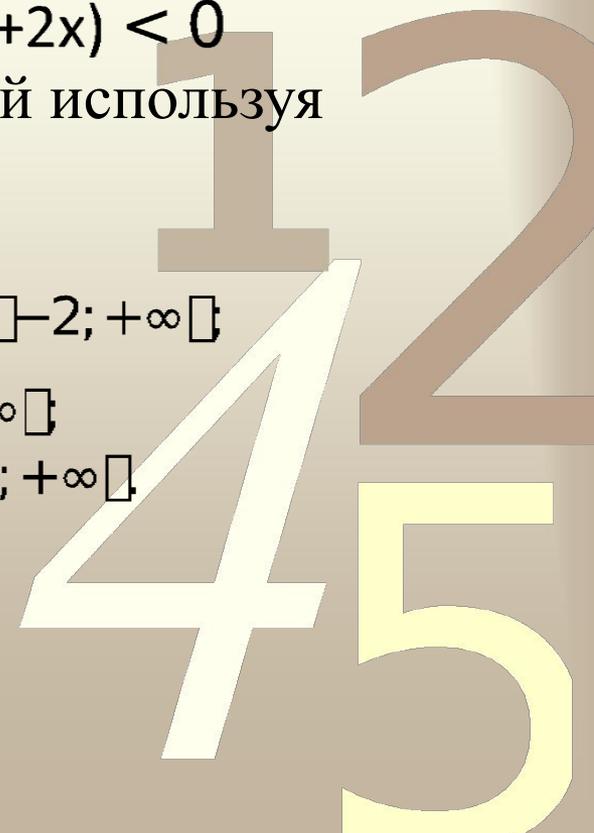
Запишем неравенство в виде $\sqrt{x^2 - 6x} - (8 + 2x) < 0$

Заменим неравенство равносильной системой используя метод рационализации

$$\begin{cases} x^2 - 6x - (8 + 2x)^2 < 0, \\ 8 + 2x > 0, \\ x^2 - 6x \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & \left[-\infty; -10\frac{2}{3} \right]; \left[-2; +\infty \right] \\ & \left[-4; +\infty \right] \\ & \left[-\infty; 0 \right] \left[6; +\infty \right] \end{aligned}$$

Ответ: $(-2; 0] \cup [6; +\infty)$



Правило 2. Знак разности $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$ совпадает со знаком разности $f(x) - g(x)$ в ОДЗ.

Пример 2: Решить неравенство $\sqrt{2x + 1} \leq \sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 5}$

Решение.

Запишем неравенство в виде $\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x^3 - 4x^2 + x + 5} \leq 0$;

Заменим неравенство равносильной системой используя метод рационализации

$$\begin{cases} \sqrt{2x + 1} - (x^3 - 4x^2 + x + 5) \leq 0, \\ 2x + 1 \geq 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x^3 - 4x^2 - x + 4 \geq 0, \\ x \geq -\frac{1}{2}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} [-1; 1] \cup [4; +\infty) \\ [-\frac{1}{2}; +\infty); \end{cases}$$

$$\begin{cases} [-1; 1] \cup [4; +\infty) \\ [-\frac{1}{2}; +\infty); \end{cases}$$

Ответ: $[-\frac{1}{2}; 1] \cup [4; +\infty)$

Более сложные неравенства

Правило 3. Так как при $g(x) \geq 0$, знак разности $\sqrt{f(x)} - g(x)$ совпадает со знаком разности $f(x) - g^2(x)$ в ОДЗ, то получаются условия равносильности:

1) если $g(x) \geq 0$, то

$$\frac{\sqrt{f(x)} - g(x)}{h(x)} \leq 0$$

ОДЗ
 \Leftrightarrow

$$\frac{f(x) - g^2(x)}{h(x)} \leq 0$$

2) если $g(x) < 0$,

то

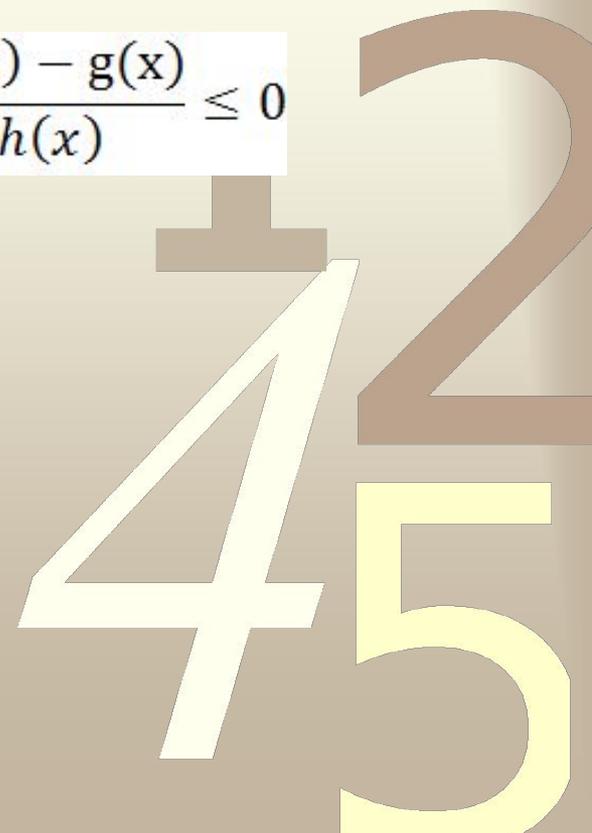
$$h(x) < 0$$

Правило 4. Так как знак разности $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}$ совпадает со знаком разности $f(x) - g(x)$ в ОДЗ, то

$$\frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)}}{h(x)} \leq 0$$

ОДЗ
 \Leftrightarrow

$$\frac{f(x) - g(x)}{h(x)} \leq 0$$



Метод рационализации для показательных неравенств

Правило 5. Знак разности $a^{f(x)} > a^{g(x)}$ совпадает со знаком произведения

$$(a - 1)(f(x) - g(x)) > 0.$$

Правило 6. Для любой функции $h(x)$ имеет место условие равносильности

$$\frac{a^{f(x)} - a^{g(x)}}{h(x)} \geq 0$$

ОДЗ

\Leftrightarrow

$$\frac{(a - 1)(f(x) - g(x))}{h(x)} \geq 0$$

Пример 3. Решить неравенство:

$$\frac{x^2 + x - 2}{(3^x - 1)(2^{x^2} - 16)} \geq 0$$

Решение.

$$\frac{x^2 + x - 2}{(3^x - 1)(2^{x^2} - 2^4)} \geq 0$$

Запишем неравенство используя метод рационализации в виде

$$\frac{x^2 + x - 2}{(3 - 1)(x - 0)(2 - 1)(x^2 - 4)} \geq 0,$$

$$\frac{(x + 2)(x - 1)}{x(x^2 - 4)} \geq 0$$

$$\frac{(x + 2)(x - 1)}{x(x - 2)(x + 2)} \geq 0$$

$$\frac{x - 1}{x(x - 2)} \geq 0$$

Ответ: $(0; 1]; (2; +\infty)$



001 **Правило 6.** Для любой функции $h(x)$ имеет место условие равносильности

$$\frac{a^{f(x)} - a^{g(x)}}{h(x)} \geq 0$$

ОДЗ
 \Leftrightarrow

$$\frac{(a - 1)(f(x) - g(x))}{h(x)} \geq 0$$



Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Задача № 53

Пример 4.

Решить неравенство:

$$3 \cdot 49^x - 16 \cdot 21^x + 21 \cdot 9^x < 0$$

Решение.

Запишем неравенство в виде

$$3 \cdot 7^{2x} - 16 \cdot 3^x \cdot 7^x + 21 \cdot 3^{2x} < 0,$$

$$3 \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^{2x} - 16 \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^x + 21 < 0,$$

$$\frac{7}{3} < \left(\frac{7}{3}\right)^x < 3$$

$$\left(\frac{7}{3}\right)^1 < \left(\frac{7}{3}\right)^x < \left(\frac{7}{3}\right)^{\log_{\frac{7}{3}} 3},$$

$$1 < x < \log_7 3$$

Ответ: $\left(1; \log_{\frac{7}{3}} 3\right)$



$$3 \cdot 7^{2x} - 16 \cdot 3^x \cdot 7^x + 21 \cdot 3^{2x} < 0, \quad : 3^{2x}$$

$$3 \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^{2x} - 16 \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^x + 21 < 0,$$

$$\left(\frac{7}{3}\right)^x = t, \quad t > 0,$$

$$t^2 - 16t + 21 < 0$$

$$D = 256 - 252 = 4$$

$$t = \frac{16-2}{6} = \frac{7}{3} \quad t = \frac{16+2}{6} = 3$$

$$\frac{7}{3} < t < 3$$

$$\left(\frac{7}{3}\right)^x = t, \quad t > 0,$$



1 2
4 5

$$\left(\frac{7}{3}\right)^1 < \left(\frac{7}{3}\right)^x < \left(\frac{7}{3}\right)^{\log_{\frac{7}{3}} 3}$$

Функция $y = \left(\frac{7}{3}\right)^x$ возрастающая, так как $\frac{7}{3} > 1$,
значит,

функция $y = \left(\frac{7}{3}\right)^x$ возрастающая, так как $\frac{7}{3} > 1$,
значит,



1 2
4 5

Пример 5. Решить неравенство:

$$\frac{7}{9^x - 2} \geq \frac{2}{3^x - 1}$$

Решение.

Перепишем неравенство в виде

$$\frac{7(3^x - 1) - 2(9^x - 2)}{(3^{2x} - 2)(3^x - 1)} \geq 0,$$

$$\frac{\left(3^x - \frac{1}{2}\right)(3^x - 3)}{(3^{2x} - 2)(3^x - 1)} \leq 0$$

$$\frac{\left(3^x - 3^{\log_3 \frac{1}{2}}\right)(3^x - 3)}{(3^{2x} - 3^{\log_3 2})(3^x - 3^0)} \leq 0$$

Применим метод рационализации



$$\frac{2 \cdot 3^{2x} - 7 \cdot 3^x + 3}{(3^{2x} - 2)(3^x - 1)} \leq 0,$$

0011, 0010, 1010, 1101, 0001, 0100, 1011
Рассмотрим числитель дроби, введем замену, решим полученное квадратное уравнение

$$2t^2 - 7t + 3 = 0$$

$$D = 49 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 49 - 24 = 25$$

$$t = \frac{7 + 5}{4} = 3$$

$$t = \frac{7 - 5}{4} = \frac{1}{2}$$

Рассмотрим знаменатель дроби, представим числа 2 и 1 в виде степени числа 3

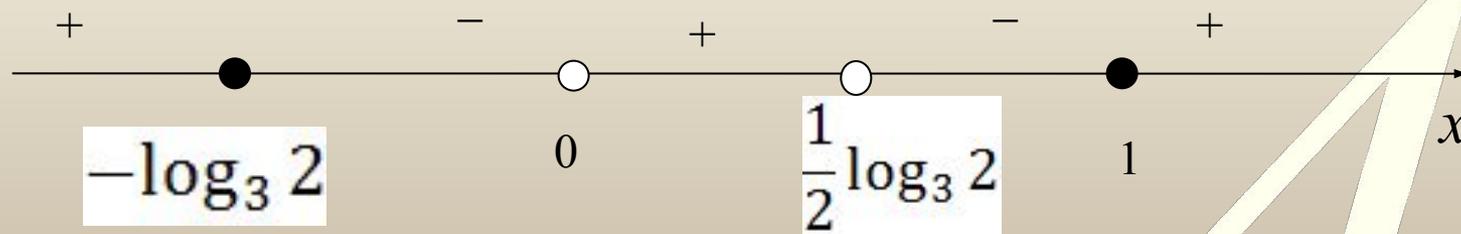
$$\frac{\left(3^x - 3^{\log_3 \frac{1}{2}}\right)(3^x - 3)}{(3^{2x} - 3^{\log_3 2})(3^x - 3^0)} \leq 0$$



$$\frac{(x - \log_3 \frac{1}{2})(x - 1)}{(x - \frac{1}{2} \log_3 2)(x - 0)} \leq 0$$

На числовой прямой обозначим все полученные точки, учитывая результаты оценки

$$0 < \log_3 2 < 1 \quad \frac{1}{2} \log_3 2 < \frac{1}{2}$$



Ответ: $[-\log_3 2; 0); (\frac{1}{2} \log_3 2; 1]$

Метод рационализации для логарифмических неравенств

0011, 0110, 1010, 1101, 0001, 01
Правило 7 Знак $\log_a f(x)$ совпадает со знаком произведения $(a-1)(f(x)-1)$ в ОДЗ.

Правило 8 Знак разности $\log_a f(x) - \log_a g(x)$ совпадает со знаком произведения $(a-1)(f(x)-g(x))$ в ОДЗ.



Метод рационализации для логарифмических неравенств

Правило 9 Решение неравенств вида

$$\frac{\log_a f(x) - \log_a g(x)}{h(x)} \geq 0$$

сводится к решению неравенства в ОДЗ

$$\frac{(a - 1)(f(x) - g(x))}{h(x)} \geq 0$$

Правило 10 Решение неравенств вида

$$\frac{f(x)(\log_a g_1(x) - \log_a g_2(x))}{\log_b g_3(x)} > 0$$

сводится к решению неравенства в ОДЗ

$$\frac{f(x)(a - 1)(g_1(x) - g_2(x))}{(b - 1)(g_3(x) - 1)} > 0$$

Пример 7. Решить неравенство:

$$\frac{\log_3(x + \frac{4}{5})}{\log_7(x^2 + 2x + \frac{7}{16})} < 0$$

Решение.

Область определения неравенства задается системой

$$\begin{cases} x + \frac{4}{5} > 0, \\ x^2 - 2x + \frac{7}{16} > 0, \\ x^2 - 2x + \frac{7}{16} \neq 1; \end{cases}$$

Запишем неравенство используя метод рационализации в виде

$$\frac{(3-1)(x + \frac{4}{5} - 1)}{(7-1)(x^2 - 2x + \frac{7}{16} - 1)} < 0,$$

$$\frac{x - \frac{1}{5}}{(x + \frac{1}{14})(x - \frac{9}{4})} < 0,$$

Ответ

:

$$(-\frac{4}{5}; -\frac{1}{4}) \cup (\frac{1}{5}; \frac{1}{4}) \cup (\frac{7}{4}; \frac{9}{4})$$

$$\square \quad x + \frac{4}{5} > 0,$$

$$\square \quad x^2 - 2x + \frac{7}{16} > 0,$$

$$\square \quad x^2 - 2x + \frac{7}{16} \neq 1;$$

$$\square \quad x > -\frac{4}{5},$$

$$\square \quad x - \frac{1}{4} < x - \frac{7}{4},$$

$$\square \quad x \neq -\frac{1}{4}; \quad x \neq \frac{9}{4};$$

$$\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right)$$



1 2
4 5

Пример 8. Решить неравенство: $\log_{x+\frac{5}{2}} \left(\frac{x-5}{2x-3} \right)^2 > 0$

Решение.

Найдем область определения неравенства

$$\begin{cases} x + \frac{5}{2} > 0, \\ x + \frac{5}{2} \neq 1, \\ \frac{x-5}{2x-3} \neq 0, \end{cases} \begin{cases} x > -\frac{5}{2}, \\ x \neq -\frac{3}{2}, \\ x \neq 5, \\ x \neq \frac{3}{2}. \end{cases}$$

$$\left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right); \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right); \left(\frac{3}{2}; 5\right); (5; +\infty)$$

Применим метод рационализации



Правило 7

0011, 0010, 1,010, 1,101, 0001, 0100, 1011

Знак $\log_a f(x)$ совпадает со знаком произведения $(a-1)(f(x)-1)$ в ОДЗ.



$$\left(x + \frac{5}{2} - 1\right) \left(\left(\frac{x-5}{2x-3}\right)^2 - 1\right) > 0$$

$$\frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)(3x^2 - 2x - 16)}{(2x - 3)^2} < 0,$$

$$\frac{\left(x + \frac{3}{2}\right)(x + 2)(3x - 8)}{(2x - 3)^2} < 0$$

$$\left[-\frac{5}{2}; -2\right] \cup \left[-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right] \cup \left[-\frac{9}{8}; \frac{8}{3}\right]$$

С учетом области определения

$$\left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right); \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right); \left(\frac{3}{2}; 5\right); (5; +\infty)$$

Ответ:

$$\left(-\frac{5}{2}; -2\right); \left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) \left(\frac{3}{2}; \frac{8}{3}\right)$$



Пример 9. Решить неравенство:

$$\frac{\log_9 x + 4}{1 + \log_9 x} \leq 4 \log_x 3 - 1$$

Решение.

Область определения неравенства задается системой

$$\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \log_9 x \neq -1. \end{cases}$$



$$\frac{\log_9 x + 4}{1 + \log_9 x} - \frac{2}{\log_9 x} + 1 \leq 0,$$

$$\log_9 x = t,$$

$$\frac{t+4}{1+t} - \frac{2}{t} + 1 \leq 0,$$

$$\frac{t^2 + 4t - 2 - 2t + t^2 + t}{t(t+1)} \leq 0,$$

$$\frac{2(t+2)(t - \frac{1}{2})}{t(t+1)} \leq 0,$$

$$\frac{2t^2 + 3t - 2}{t(t+1)} \leq 0,$$

$$\frac{(\log_9 x - \log_9 \frac{1}{81})(x - 3)}{(\log_9 x - \log_9 1)(\log_9 x - \log_9 \frac{1}{9})} \leq 0,$$

Применим метод рационализации



0011.00

$$\frac{(\log_9 x - \log_9 \frac{1}{81})(x - 3)}{(\log_9 x - \log_9 1)(\log_9 x - \log_9 \frac{1}{9})} \leq 0,$$

$$\frac{(x - \frac{1}{81})(x - 3)}{(x - 1)(x - \frac{1}{9})} \leq 0$$

Ответ: $[\frac{1}{81}; \frac{1}{9}) \cup (1; 3]$



Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Задача № 52

Пример 10. Решить неравенство:

0011, 0010, 1010, 1101, 0001, 0100, 1011

$$\frac{3^x - 25}{x + 1} \leq \frac{3^x - 25}{x - 3}$$



Решение:

$$\frac{(3^x - 25)(x - 3) - (3^x - 25)(x + 1)}{(x + 1)(x - 3)} \leq 0,$$

$$\frac{(3^x - 25)(x - 3 - 1)}{(x + 1)(x - 3)} \leq 0,$$

$$\frac{(3^x - 3^{\log_3 25})(-4)}{(x + 1)(x - 3)} \leq 0,$$

$$\frac{x - \log_3 25}{(x + 1)(x - 3)} \geq 0,$$

$$\log_3 25 < 3,$$

Ответ: $(-1; \log_3 25] \cup (3; +\infty)$



0011

Пример 11. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 5^{3x-1} - 5^{3x+1} \leq -72, \\ \log_{\frac{x}{3}}(3x^2 - 2x + 1) \geq 0, \end{cases}$$



Решение.

Рассмотрим первое неравенство системы.

$$5^{3x-1} - 5^{3x+1} \leq -72,$$

$$\frac{5^{3x}}{5} - 5 \cdot 5^{3x} \leq -72,$$

$$5^{3x} \left(\frac{1}{5} - 5 \right) \leq -72,$$

$$5^{3x} \geq 5^{\log_5 15},$$

$$5^{3x} \geq 15,$$

$$x \geq \frac{1}{3} \log_5 15$$

Решением неравенства является множество:

$$\left[\frac{1}{3} \log_5 15; \frac{2}{3} \right]; (3; +\infty)$$



Рассмотрим второе неравенство системы.
Найдем область определения неравенства.

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x + 1 > 0, \\ \frac{x}{3} \neq 1 \\ \frac{x}{3} > 0 \end{cases}$$
$$\log_{\frac{x}{3}}(3x^2 - 2x + 1) \geq 0,$$
$$\left(\frac{x}{3} - 1\right)(3x^2 - 2x + 1 - 1) \geq 0,$$
$$\left(\frac{x}{3} - 1\right)(3x^2 - 2x) \geq 0,$$
$$x(x - 3)\left(x - \frac{2}{3}\right) \geq 0,$$
$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ x > 0, \\ x \neq 3. \end{cases}$$

Решением неравенства является множество: $\left[0; \frac{2}{3}\right]; [3; +\infty)$

Решением исходной системы
является множество

$$\left[\frac{1}{3} \log_5 15; \frac{2}{3}\right]; (3; +\infty)$$

Ответ: $\left[\frac{1}{3} \log_5 15; \frac{2}{3}\right]; (3; +\infty)$

Пример 12. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_{7-x}(x+2) \leq \log_{7-x}(3-x) \\ 32 \cdot 9^x \leq 60 \cdot 3^x - 7. \end{cases}$$



0011, 0010, 1010, 1101

Решение.

$$\begin{cases} \log_{7-x}(x+2) \leq \log_{7-x}(3-x) \\ 32 \cdot 9^x \leq 60 \cdot 3^x - 7. \end{cases}$$

Рассмотрим первое неравенство системы.

Найдем область определения неравенства.

$$\begin{cases} x+2 > 0, \\ 3-x > 0, \\ 7-x > 0, \\ 7-x \neq 1, \end{cases}$$

$(-2; 3)$

$$(7-x-1)(x+2-3+x) \leq 0,$$

$$(6-x)(2x-1) \leq 0,$$

$$(x-6)(x-\frac{1}{2}) \geq 0,$$

$$\mathbb{R} \setminus \left[-\infty; \frac{1}{2} \right] \cup [6; +\infty)$$

Решением неравенства является множество:

$$\left(-2; \frac{1}{2} \right]$$



Рассмотрим второе неравенство системы.

$$32 \cdot 9^x \leq 60 \cdot 3^x - 7,$$

$$32 \cdot 3^{2x} - 60 \cdot 3^x + 7 \leq 0, \quad \text{Пусть } 3^x = t, \text{ где } t > 0$$

$$32t^2 - 60t + 7 \leq 0$$

$$32\left(3^x - \frac{7}{4}\right)\left(3^x - \frac{1}{8}\right) \leq 0$$

$$32\left(3^x - 3^{\log_3 \frac{1}{8}}\right)\left(3^x - 3^{\log_3 \frac{7}{4}}\right) \leq 0$$

$$\left[x - \log_3 \frac{1}{8}\right] \left[x - \log_3 \frac{7}{4}\right] \leq 0,$$

Решением неравенства является множество

$$\left[\log_3 \frac{1}{8}; \log_3 \frac{7}{4}\right]$$

Решением исходной системы является множество

$$\left[\log_3 \frac{1}{8}; \frac{1}{2}\right]$$

Ответ: $\left[\log_3 \frac{1}{8}; \frac{1}{2}\right]$

Пример 13. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_{\log_x 2x}(9x - 4) \geq 0, \\ 6^x - 4 \cdot 3^x - 2^x + 4 \leq 0. \end{cases}$$

Решение.

Область определения неравенства задается системой

$$\begin{cases} 9x - 4 > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1, \\ \log_x 2x > 0, \\ \log_x 2x \neq 1, \end{cases}$$

$$\left(\frac{4}{9}; \frac{1}{2}\right); (1; +\infty)$$



Рассмотрим первое неравенство системы

$$\log_{\log_x 2x} (9x - 4) \geq 0,$$

$$\log_{\log_x 2x} (9x - 4) - \log_{\log_x 2x} 1 \geq 0,$$

$$(\log_x 2x - 1)(9x - 4 - 1) \geq 0,$$

$$(\log_x 2x - \log_x x)(9x - 5) \geq 0,$$

$$(x - 1)(2x - x)(9x - 5) \geq 0,$$

$$x(x - 1)\left(x - \frac{5}{9}\right) \geq 0,$$

Решением неравенства является множество:

$$\left[0; \frac{5}{9}\right]; [1; +\infty)$$



Рассмотрим второе неравенство системы

$$6^x - 4 \cdot 3^x - 2^x + 4 \leq 0,$$

$$3^x \cdot 2^x - 4 \cdot 3^x - 2^x + 4 \leq 0,$$

$$2^x (3^x - 1) - 4(3^x - 1) \leq 0,$$

$$(3^x - 1)(2^x - 4) \leq 0,$$

$$(3^x - 3^0)(2^x - 2^2) \leq 0,$$

$$(x - 0)(x - 2) \leq 0,$$

$$x(x - 2) \leq 0,$$

Решением неравенства является множество:

[0; 2]



Учитывая полученные промежутки,
записываем ответ

$$\left(\frac{4}{9}; \frac{1}{2}\right); (1; +\infty)$$

$$\left(\frac{4}{9}; \frac{1}{2}\right); (1; +\infty)$$

$$[0; 2]$$

Ответ: $\left(\frac{4}{9}; \frac{1}{2}\right); (1; 2]$



Прокофьев А.А., Корянов А.Г. Задача № 115

Пример 14 . Решить систему неравенств:

$$0011, 0010, 1010 \begin{cases} \log_{\log_x 3x}(4x - 1) \geq 0, \\ 21^x - 9 \cdot 7^x - 3^x + 9 \leq 0. \end{cases}$$

Решение.

Область определения неравенства задается системой

$$\begin{cases} x > \frac{1}{4}, \\ (x - 1)(3x - 1) > 0, \\ x \neq 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$
$$\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right); (1; +\infty)$$



Рассмотрим первое неравенство системы

$$\log_{\log_x 3x} (4x - 1) \geq 0,$$

$$\log_{\log_x 3x} (4x - 1) - \log_{\log_x 3x} 1 \geq 0,$$

$$(\log_x 3x - 1)(4x - 1 - 1) \geq 0,$$

$$(\log_x 3x - \log_x x)(4x - 2) \geq 0,$$

$$(x - 1)(3x - x)(4x - 2) \geq 0,$$

$$x(x - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right) \geq 0,$$

Решением неравенства является множество:

$$\left[0; \frac{1}{2}\right]; [1; +\infty)$$



Рассмотрим второе неравенство системы

$$21^x - 9 \cdot 7^x - 3^x + 9 \leq 0,$$

$$3^x \cdot 7^x - 9 \cdot 7^x - 3^x + 9 \leq 0,$$

$$3^x(7^x - 1) - 9(7^x - 1) \leq 0,$$

$$(7^x - 1)(3^x - 9) \leq 0,$$

$$(7^x - 7^0)(3^x - 3^2) \leq 0,$$

$$(x - 0)(x - 2) \leq 0,$$

$$x(x - 2) \leq 0,$$

Решением неравенства является множество: $[0; 2]$

Решением системы является множество: $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right); (1; 2]$

Ответ: $\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{3}\right); (1; 2]$

Пример 15. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} \log_{x+3}(x^2 - x) < 1, \\ \log_{x^2-1,5x}(3 - 2^x) > 0. \end{cases}$$

Пример 16. Решить систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{x - 2\sqrt{x} - 8}{2^x - 4} \geq 0, \\ \frac{\log_2 x - 5}{1 - 2 \log_x 2} \geq 2 \log_2 x \end{cases},$$

Пример 17 Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} 3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 9 \leq 0, \\ \log_{x^2}(x - 1)^2 \leq 1. \end{cases}$$



Пример 15. Решить систему неравенств $\begin{cases} \log_{x+3}(x^2 - x) < 1, \\ \log_{x^2-1,5x}(3 - 2^x) > 0. \end{cases}$

0011 0010 1010 1101 0001 0100 1011
Ответ: $\left(-3; -2\right); \left(-1; -\frac{1}{2}\right); \left(\frac{3}{2}; \log_2 3\right)$

Пример 16. Решить систему неравенств $\begin{cases} \frac{x - 2\sqrt{x} - 8}{2^x - 4} \geq 0, \\ \frac{\log_2 x - 5}{1 - 2 \log_x 2} \geq 2 \log_2 x \end{cases}$

Ответ: $\left(0; \frac{1}{2}\right]; [1; 2)$

Пример 17 Решить систему неравенств: $\begin{cases} 3 \cdot 9^x - 28 \cdot 3^x + 9 \leq 0, \\ \log_{x^2}(x - 1)^2 \leq 1. \end{cases}$

Ответ: $(-1; 0); \left(0; \frac{1}{2}\right]; (1; 2]$

42
45

Литература:

1. Колесникова, С.И. Математика. Интенсивный курс подготовки к ЕГЭ. Айрис- пресс 2004г.
2. Прокофьев, А.А., Корянов, А.Г. Математика ЕГЭ 2011, 2013 Системы неравенств с одной переменной.
3. Материалы ЕГЭ 2011, 2012, 2013гг.

