ЕГЭ - 2017. Базовый уровень. Задача № 19.

Теория делимости.

Учитель математики гимназии № 92
г. Краснодара
Экшиян Алиса Андреевна

«Если вы хотите научиться плавать,

то смело входите в воду,

а если хотите научиться решать задачи,

то решайте их». ***Д. Пойа***

Признаки делимости.

На 2: если запись числа оканчивается четной цифрой, то число делится на 2.

На 5: если запись числа оканчивается на 0 или 5, то число делится на 5.

На 10: если запись числа оканчивается на 0, то число делится на 10.

Любое число, которое делится на 10 делится на 2 и на 5.

Не любое число, которое делится на 5 будет делиться на 2 и на 10.

Не любое число, которое делится на 2 будет делиться на 5 и на 10.

На 3: если сумма цифр числа делится на 3, то число делится на 3.

На 9: если сумма цифр числа делится на 9, то число делится на 9.

Любое число, которое делится на 9 делится и на 3.

Не любое число, которое делится на 3 делится на 9.

На 11: если сумма цифр в записи числа, стоящих на четных местах равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах равна или отличается на 11, то число делится на 11.

На 4: если две последние цифры в записи числа делятся на 4, то число делится на 4.

На 8: если три последние цифры в записи числа делятся на 8, то число делится на 8.

Любое число, которое делится на 8, делится и на 4.

Не любое число, которое делится на 4 будет делиться на 8.

<u>ЗАДАЧА 1</u>. Найдите шестизначное натуральное число, которое записывается только цифрами 1 и 2 и делиться на 24. В ответе укажите какое–нибудь одно такое число.

<u>РЕШЕНИЕ</u>. $24 = 1\cdot 24 = 2\cdot 12 = 3\cdot 8 = 4\cdot 6.$

Теория.

1. Число делится на 3, если сумма цифр этого числа делится на 3.

2. Число делится на 8, если три последние цифры в записи числа образуют число, которое делится на 8.

$\overline{abcd}$ – некоторое шестизначное число. Число делится на 24, значит, должно делиться на 3 и на 8.

Число делится на 8, последние три цифры в записи числа - 112.

$a + b + c + 1 + 1 + 2 = a + b + c + 4.$

$a + b + c = 2$ нет возможности.

$a + b + c = 5,\ 5 = 2 + 2 + 1.$

<u>ОТВЕТ</u>. 221112; 212112; 122112.

- **ЗАДАЧА 2.** Найдите трехзначное число, кратное 11, все цифры которого различны, а сумма квадратов цифр делиться на 3, но не делиться на 9. В ответе укажите какое–нибудь одно такое число.
- **РЕШЕНИЕ**. Число $\overline{abc}$ делится на 11.
- **Теория.** Число делится на 11, если сумма цифр, которые стоят на четных местах, равна сумме цифр, стоящих на нечетных местах, либо отличается от неё на 11.

a+ c = b

- Если **b = 1**, то a + c – нет комбинации чисел.
- Если **b = 2**, то a + c – нет комбинации чисел.
- Если **b = 3**, то **a = 1** и **c = 2** или наоборот.

Получилось число **132**. Проверяем второе условие о сумме квадратов цифр $1^2 + 3^2 + 2^2 =$ 1 + 9 + 4 = 14 – не делится на 3.

- Если **b = 4**, то **a = 1** и **c = 3** или **a = 2** и **c = 2**. Получились числа **143** или **242**.

Проверяем второе условие о сумме квадратов цифр

$1^2 + 4^2 + 3^2$ = 1 + 16 + 9 = 26 - не делится на 3 и

$2^2 + 4^2 + 2^2$ = 4 + 16 + 4 = 24 – делится на 3 и не делится на 9.

Кажется, что мы нашли это число и уже хочется записать его в ответ, но мы забыли условие задачи – все числа должны быть различны. Значит, это число нельзя записать в ответ. Продолжаем подбирать решение.

- Если **b = 5**, то **a = 1** и **c = 4** или **a = 2** и **c = 3**. Получились числа **154** или **451**, **253** или **352**.

Проверяем второе условие о сумме квадратов цифр

$1^2 + 5^2 + 4^2$ = 1 + 25 + 16 = 42 – делится на 3 и не делится на 9.

$2^2 + 5^2 + 3^2$ = 4 + 25 + 9 = 38 – не делится на 3, а значит, не удовлетворяет условию задачи. Решение можно продолжать и дальше, но просили найти хотя бы одно такое число. И мы его нашли – это **154** или **451**.

- **<u>ОТВЕТ</u>. 154; 451; 187; 781; 275; 572; 517; 715; 528; 825; 748; 847.**

<u>ЗАДАЧА 3</u>. Найдите четырехзначное число, кратное 88, все цифры которого различны и четны. В ответе укажите какое–нибудь одно такое число.

<u>РЕШЕНИЕ</u>. Число $\overline{abcd}$ делится на 88.

88 = 8·11, для делимости на 11 **a + c = b + d** и $\overline{bcd}$ (три последние цифры в записи числа) должно делиться на 8.

Помним, что все цифры четные и различные.

Четные цифры это – 0, 2, 4, 6, 8.

2 + 4 = 6 + 0, то есть число **2640**. Проверяем делимость на 8. 640 делиться на 8. Другую последовательность этих цифр взять нельзя (**2046**), потому что не выполняется делимость на 8.

Рассмотрим цифры 2, 4, 6, 8.

2 + 8 = 4 + 6. Получим число **2486** или **8426** или **8624** или **6248**. Первые два числа не подходят – не выполняется признак делимости на 8, а вот два последних числа соответствуют второму условию (**8624; 6248**).

<u>ОТВЕТ</u>. 2640; 8624; 6248.

ЗАДАЧА 4. Найдите трехзначное натуральное число, которое при делении на 4, на 5 и на 6 дает в остатке 1 и цифры которого расположены в порядке убывания слева направо. В ответе укажите какое–нибудь одно такое число.

РЕШЕНИЕ. Так как число делится на 4, на 5 и на 6 и дает в остатке 1, значит, оно делится на $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ и в остатке так же дает 1, т.е. число может иметь вид $\mathbf{120n + 1}$, где n – некоторое натуральное число.

Такими числами могут быть числа: 121; 241; 361; 481; 601; 721; 841; 961 и еще такими числами могут быть числа 181; 301; 421; 541; 661; 781; 901.

Проверяем второе условие, о расположении цифр в записи числа порядке убывания слева направо, получим **721; 841; 961; 421; 541**. Других вариантов нет.

ОТВЕТ. **721; 841; 961; 421; 541**.

ЗАДАЧА 5. Найдите четное четырехзначное натуральное число, сумма цифр которого равна их произведению. В ответе укажите какое–нибудь одно такое число.

РЕШЕНИЕ. $\overline{abcd}$ – данное четырехзначное число. Так как число четное, то на последнем месте может стоять цифра 0; 2; 4; 6; 8.

0 в записи числа присутствовать не может, т.к. произведение всегда будет равно 0 и не будет равно сумме цифр.

Остаются цифры 2; 4; 6; 8. **a + b + c + d = a · b · c · d**.

Начнем с первой цифры – 2. Число принимает вид $\overline{abc2}$.

Тогда **a + b + c + 2 = a · b · c · 2.** Так как ничего не сказано о повторении цифр, то цифры могут повторяться. Один из вариантов a = 1, b = 1, c = 4. Число **1142**, 1 · 1 · 4 · 2 = 1 + 1 + 4 + 2; 8 = 8.

Так как цифры подобраны, то теперь можно составить различные комбинации расположения этих цифр.

Получим – **1124; 1412; 4112; 2114; 1214**.

ОТВЕТ. **1124; 1412; 4112; 2114; 1214; 1142**.

<u>ЗАДАЧА 6</u>. Найдите четырехзначное натуральное число, большее 2200, но меньше 3000, которое делиться на каждую свою цифру, и все цифры которого различны. В ответе укажите какое–нибудь одно такое число.

<u>РЕШЕНИЕ</u>. **2200 <** $\overline{abcd}$ **< 3000.**

Так как все цифры различны, то числа вида $\overline{22cd}$ не может быть.

Пусть **b = 3**, тогда $\overline{23cd}$, значит, обязательно это число должно делиться на 2, т.е. оно четное и должно делиться на 3, т.е. сумма цифр числа

2 + 3 + c + d – должна делиться на 3.

Вместо **d** можно взять 4; 6; 8.

Пусть **d = 4**, тогда $\overline{23c4}$, 2 + 3 + с + 4 = 9 + с.

Получается, что **с = 3** (9 + 3 = 12) или **с = 6** (9 + 6 = 15) или **с = 9** (9 + 9 = 18). Чтобы цифры были различными необходимо выбрать **6**, тогда число **2364**. Это число делиться на каждую свою цифру. Также решением этой задачи могут быть числа – **2316; 2436; 2916**.

<u>ОТВЕТ</u>. **2364; 2316; 2436; 2916**.

ЗАДАЧА 7. Вычеркните в числе **45 341 527** три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 22. В ответе укажите какое–нибудь одно такое число.

РЕШЕНИЕ. Чтобы число делилось на 22, оно должно делиться на 2 и на 11 ($22 = 2 \cdot 11$).

Таким образом, это число четное.

Из восьмизначного числа оно должно стать пятизначным. Вычеркивая цифры необходимо проверять признак делимости на 11.

Вычеркнем **7**, получим - **45 341 52** и еще две цифры **1** и **5**, получим **45 342.**

Проверим делимость на 11: $4 + 3 + 2 = 5 + 4$, $9 = 9$. Равенство верно, это число нам подходит.

Другой вариант решения – вычеркнуть цифры **4**; **4** и **7,** получим – **53 152**.

Проверяем делимость на 11: $5 + 1 + 2 = 3 + 5$, $8 = 8$. Опять равенство верно, значит, это число то же может являться решением задачи.

ОТВЕТ. **45 342; 53 152; 45 452.**

ЗАДАЧА 8. Вычеркните в числе **75 416 303** три цифры так, чтобы получившееся число делилось на 30. В ответе укажите какое–нибудь одно такое число.

РЕШЕНИЕ. Так как число должно делиться на 30, то оно должно делиться на 3 и на 10 (**30 = 3 · 10**).

Теория. Число делиться на 10, если запись числа оканчивается цифрой 0.

Поэтому обязательно нужно вычеркнуть крайнюю правую цифру **3**, получим **7 541 630**.

Вычеркивая еще две цифры помним, что сумма оставшихся цифр должна делиться на 3.

Получим **75 630** (7 + 5 + 6 + 3 + 0 = 21) или

54 630 (5 + 4 + 6 + 3 +0 = 18).

Решение можно продолжить и получить другие решения.

ОТВЕТ. **75 630; 54 630;74 160; 51 630; 74130**.

ЗАДАЧА 9. Цифры четырехзначного натурального числа, кратного 5, записали в обратном порядке и получили второе четырехзначное число. Затем из первого числа вычли второе и получили 2628. Приведите пример такого числа.

РЕШЕНИЕ. Данное четырехзначное число $\overline{abcd}$.

Теория. Число делится на 5, если запись числа оканчивается цифрой 5 или 0.

Значит, **d = 5** или **d = 0**.

0 взять не можем, потому что в обратном порядке записать число не удастся.

Остается, что **d = 5**, тогда число имеет вид $\overline{abc5}$, а в обратном порядке $\overline{5bcd}$.

Запишем каждое из этих чисел в виде суммы разрядных слагаемых:

$\overline{abc5}$ = 1000a + 100b + 10c +5 и

$\overline{5bcd}$ = 5000 + 100c + 10b +a.

Составим разность этих чисел:

$\overline{abc5}$ - $\overline{5bcd}$ = 1000a + 100b + 10c +5 – (5000 + 100c + 10b +a) = 1000a + 100b +10c +5 – 5000 – 100c - 10b – a = 999a + 90b - 90c – 4995.

999a + 90b - 90c – 4995 = 2628.

999a + 90b - 90c = 7623, разделим почленно это равенство на 9.

111a + 10b - 10c = 847.

10b - 10c = 847 – 111a.

Вместо **a** нужно взять цифру, которая позволит получить в правой части равенства круглое число (число, которое делиться на 10).

Таким числом может быть **a = 7**,

получим 10b - 10c = 847 – 777,

тогда 10b - 10c = 70, а теперь почленно разделим это равенство на 10.

Получим **b – c = 7**. Т.е. **b** больше, чем с на **7**. Это могут быть числа **b = 9** и **c = 2** или **b = 8** и **c = 1** и еще один вариант **b = 7** и **c = 0**.

Получаются числа **7925; 7815 или 7705**.

<u>ОТВЕТ</u>. **7925; 7815; 7705**.

Хочу пожелать вам удачи
и успеха на экзамене.

Спасибо за внимание.