

Эконометрика

Семинар 2

Решение задачи 4

Задача 4

Дана КЛММР $Y = X\beta + \varepsilon$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Рассматриваются два варианта оценки параметра β_1 :

$$\text{а) } \tilde{\beta}_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i - \bar{Y}}{x_i - \bar{x}} \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\text{б) } \tilde{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \bar{x}^2) Y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \bar{x}^2) x_i} \quad \bar{x}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Проверить, является каждая из этих величин:

- 1) несмещенной оценкой β_1 ,
- 2) линейной относительно Y_i ,
- 3) эффективной оценкой β_1 в смысле теоремы Гаусса-Маркова.

A1

Вычислим математические ожидания оценки $\tilde{\beta}_a$:

$$\begin{aligned} E(\tilde{\beta}_a) &= E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i - \bar{Y}}{x_i - \bar{x}}\right) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{E(Y_i) - E(\bar{Y})}{x_i - \bar{x}} = \\ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{E(x_i \cdot \beta + \varepsilon_i) - E(\bar{x} \cdot \beta + \bar{\varepsilon})}{x_i - \bar{x}} = \\ &= \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{x_i \beta - \bar{x} \beta}{x_i - \bar{x}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\beta \cdot (x_i - \bar{x})}{x_i - \bar{x}} = \\ &= \frac{1}{n} \cdot n \cdot \beta = \beta \end{aligned}$$

Оценка $\tilde{\beta}_a$ является несмещенной.

Б1

Вычислим математические ожидания оценки $\widetilde{\beta}_6$:

$$\begin{aligned} E(\widetilde{\beta}_6) &= E\left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \overline{x^2}) \cdot Y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \overline{x^2}) \cdot x_i}\right) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \overline{x^2}) \cdot E(Y_i)}{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \overline{x^2}) x_i} = \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \overline{x^2}) \cdot (x_i \beta_1 + \beta_0)}{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \overline{x^2}) x_i} = \frac{\beta_1 \cdot \sum_{i=1}^n (x_i^2 - \overline{x^2}) \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \overline{x^2}) x_i} = \beta_1 \end{aligned}$$

Оценка $\widetilde{\beta}_6$ является несмещенной.

A2

Представим $\tilde{\beta}_a$ в следующем виде:

$$\begin{aligned}\tilde{\beta} &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i - \bar{Y}}{X_i - \bar{X}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{Y_i}{x_i} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\bar{Y}}{x_k} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} Y_i - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n Y_i \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) Y_i = \sum_{i=1}^n c_i Y_i\end{aligned}$$



Т.к. переменные x_i являются неслучайными, то оценка β_a является линейной.

Представим $\widetilde{\beta}_6$ в следующем виде:

$$\frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \overline{x^2}) Y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \overline{x^2}) x_i} = \left| \text{Пусть } x_i^2 - \overline{x^2} = a_i, (x_i^2 - \overline{x^2}) x_i = b_i \right| =$$
$$= \frac{\sum_{i=1}^n a_i Y_i}{\sum_{i=1}^n b_i} = \left| \text{Пусть } \sum_{i=1}^n b_i = B \right| = \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{B} Y_i = \sum_{i=1}^n c_i Y_i$$



Т.к. переменные x_i являются неслучайными, то оценка β_6 является линейной.

Y_i - некоррелированные СВ с дисперсиями $V(Y_i) = \sigma^2$

$$V(\tilde{\beta}) = V\left(\sum_{i=1}^n c_t Y_t\right) = \sum_{i=1}^n c_t^2 V(Y_t) = \sigma^2 \sum_{i=1}^n c_t^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k}\right)^2$$

- В пространстве комплекснозначных квадратично суммируемых последовательностей l^2 неравенство Коши — Буняковского имеет вид:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 \right),$$

A3

Для проверки теоремы Гаусса-Маркова мы можем воспользоваться неравенством Коши-Буняковского

$$\begin{aligned}
 \frac{V(\tilde{\beta})}{V(\hat{\beta}_{OLS})} &= \left(\sigma^2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right)^2 \right) \left(\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \\
 &= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right)^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \geq \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{x_k} \right) x_i \right)^2 \\
 &= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{x_i}{x_k} \right) \right)^2 = \frac{1}{n^2} \left(n - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{x_k} \sum_{i=1}^n x_i \right) \right)^2 = \frac{1}{n^2} n^2 = 1
 \end{aligned}$$

При $\sum_{i=1}^n x_i = 0$



$V(\tilde{\beta}) \geq V(\hat{\beta}_{OLS})$

- Эффективность оценки означает, что она обладает наименьшей дисперсией.
- МНК-оценка характеризуется наименьшей дисперсией в классе всех линейных несмещенных оценок.
- Мы сравнили полученную дисперсию оценки $\tilde{\beta}$ с дисперсией МНК-оценки и выявили, что последняя меньше.
- Значит, наша оценка не является эффективной при знаке «строго >», является эффективной при знаке «=».

Y_i - некоррелированные СВ с дисперсиями $V(Y_i) = \sigma^2$

$$\begin{aligned}
 V(\tilde{\beta}_0) &= V\left(\frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \bar{x}^2) \cdot Y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \bar{x}^2) \cdot x_i}\right) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \bar{x}^2) V(Y_i)}{\left(\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \bar{x}^2) x_i\right)^2} = \\
 &= \sigma^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \bar{x}^2)^2}{\left(\sum_{i=1}^n (x_i^2 - \bar{x}^2) x_i\right)^2}
 \end{aligned}$$

- В пространстве комплекснозначных квадратично суммируемых последовательностей l^2 неравенство Коши — Буняковского имеет вид:

$$\left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2 \right),$$

БЗ

Для проверки теоремы Гаусса-Маркова мы можем воспользоваться неравенством Коши-Буняковского

Доказ-ть: $V(\tilde{\beta}_\varepsilon) \geq V(\hat{\beta}_{OLS})$

Пусть $a_i = X_i^2 - \bar{X}^2$, $X_i = \bar{X} + x_i$

$$\sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^n (X_i^2 - \bar{X}^2)^2}{\sum_{i=1}^n (X_i^2 - \bar{X}^2) X_i} \quad \text{vs} \quad \sigma^2 \frac{1}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})}$$

$$\sigma^2 \frac{\sum a_i^2}{(\sum a_i (\bar{X} + x_i))^2} \geq \sigma^2 \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2} \quad | : \sigma^2$$

м.к. $\sum_{i=1}^n a_i = 0$

$$\frac{\sum a_i^2}{(\sum a_i x_i)^2} \geq \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i^2}$$

т.е. $(\sum_{i=1}^n a_i x_i)^2 \leq \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^n a_i^2$

$$V(\tilde{\beta}) \geq V(\hat{\beta}_{OLS})$$

- Эффективность оценки означает, что она обладает наименьшей дисперсией.
- МНК-оценка характеризуется наименьшей дисперсией в классе всех линейных несмещенных оценок.
- Мы сравнили полученную дисперсию оценки $\tilde{\beta}$ с дисперсией МНК-оценки и выявили, что последняя меньше.
- Значит, наша оценка не является эффективной при знаке «строго >», является эффективной при знаке «=».