

СТАТИСТИКА



Аналитическая статистика.

Лекция 4. Экономические индексы.

Автор: Равичев Л.В..

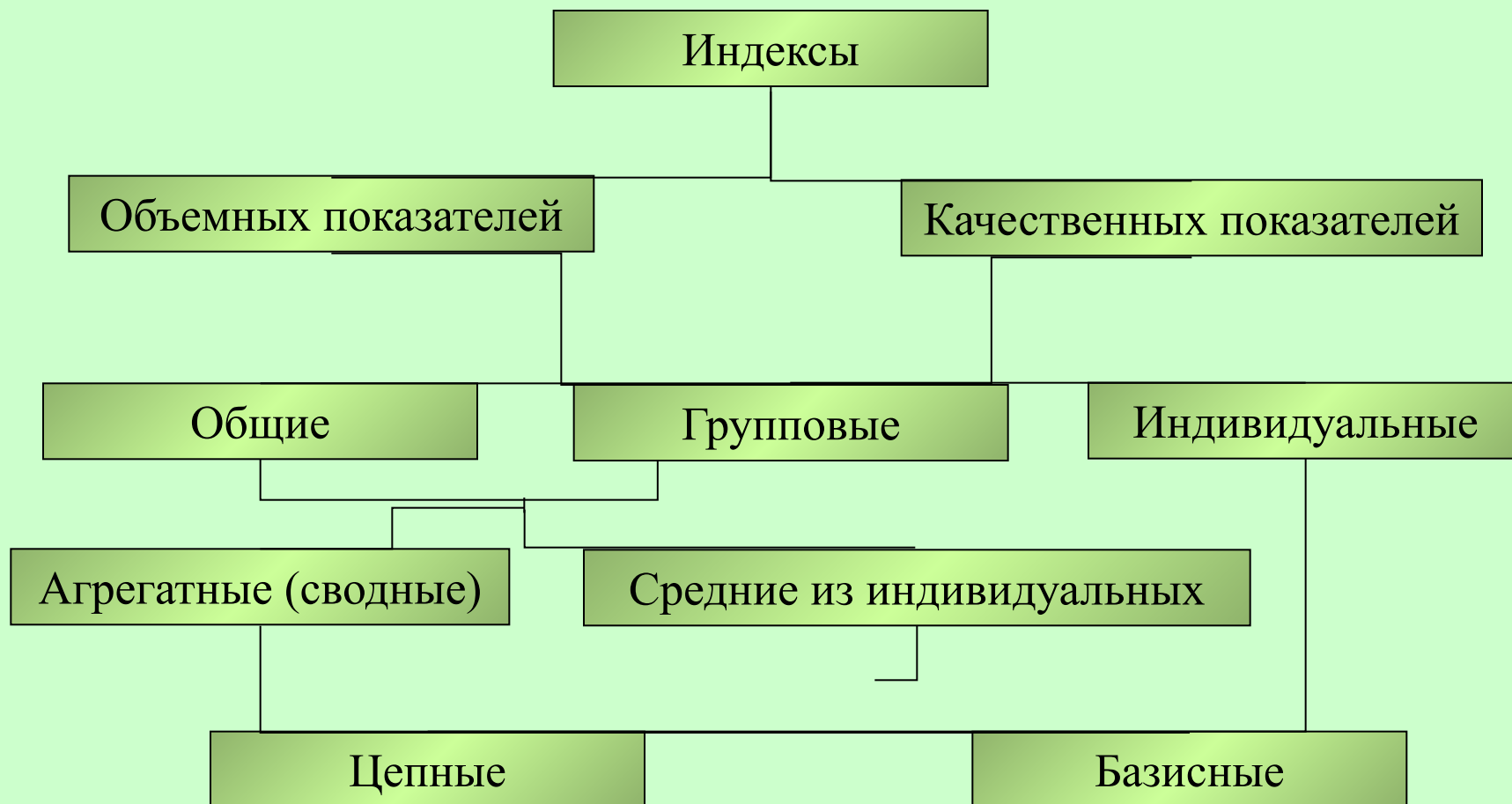
РХТУ им. Д.И.Менделеева

Кафедра управления технологическими инновациями

Москва - 2013

Экономические индексы

Классификация экономических индексов



Индивидуальные индексы

1. Индивидуальный индекс цен:

$$i_p = \frac{p_1}{p_0}$$

2. Индивидуальный индекс физического объема продукции:

$$i_q = \frac{q_1}{q_0}$$

3. Индивидуальный индекс товарооборота:

$$i_{pq} = \frac{p_1 q_1}{p_0 q_0}$$

Индивидуальные индексы

4. Индивидуальный индекс себестоимости:

$$i_z = \frac{z_1}{z_0}$$

5. Индивидуальный индекс производительности труда:

$$i_w = \frac{w_1}{w_0}$$

$$w_1 = \frac{q_1}{T_1}; \quad w_0 = \frac{q_0}{T_0}$$

Агрегатные (сводные) индексы

1. Агрегатный индекс цен

а) по методу Ласпейреса:

$$I_p = \frac{p_1^1 q_0^1 + p_1^2 q_0^2 + \dots + p_1^j q_0^j + \dots + p_1^n q_0^n}{p_0^1 q_0^1 + p_0^2 q_0^2 + \dots + p_0^j q_0^j + \dots + p_0^n q_0^n} = \frac{\sum_{j=1}^n p_1^j q_0^j}{\sum_{j=1}^n p_0^j q_0^j}$$

б) по методу Пааше:

$$I_p = \frac{p_1^1 q_1^1 + p_1^2 q_1^2 + \dots + p_1^j q_1^j + \dots + p_1^n q_1^n}{p_0^1 q_1^1 + p_0^2 q_1^2 + \dots + p_0^j q_1^j + \dots + p_0^n q_1^n} = \frac{\sum_{j=1}^n p_1^j q_1^j}{\sum_{j=1}^n p_0^j q_1^j}$$

Агрегатные (сводные) индексы

2. Агрегатный индекс физического объема продукции

$$I_q = \frac{q_1^1 p_0^1 + q_1^2 p_0^2 + \dots + q_1^j p_0^j + \dots + q_1^n p_0^n}{q_0^1 p_0^1 + q_0^2 p_0^2 + \dots + q_0^j p_0^j + \dots + q_0^n p_0^n} = \frac{\sum_{j=1}^n q_1^j p_0^j}{\sum_{i=1}^n q_0^j p_0^j}$$

или

$$I_q = \frac{q_1^1 p_1^1 + q_1^2 p_1^2 + \dots + q_1^j p_1^j + \dots + q_1^n p_1^n}{q_0^1 p_1^1 + q_0^2 p_1^2 + \dots + q_0^j p_1^j + \dots + q_0^n p_1^n} = \frac{\sum_{j=1}^n q_1^j p_1^j}{\sum_{j=1}^n q_0^j p_1^j}$$

Агрегатные (сводные) индексы

3. Агрегатный индекс товарооборота

$$I_{pq} = I_p \cdot I_q$$

$$I_{pq} = \frac{\sum_{j=1}^n p_1^j q_1^j}{\sum_{j=1}^n p_0^j q_0^j}$$

Агрегатные (сводные) индексы

Пример 1. Имеются следующие данные о реализации плодово-ягодной продукции в области:

| Наименование товара | Июль | | Август | | Расчетные графы, тыс. руб. | | |
|---------------------|---------------------------|---------------------|---------------------------|---------------------|----------------------------|-----------|-----------|
| | цена за кг, руб. p_0 | продано, т q_0 | цена за кг, руб. p_1 | продано, т q_1 | $p_0 q_0$ | $p_1 q_1$ | $p_0 q_1$ |
| Черешня | 120 | 18 | 120 | 15 | 2160 | 1800 | 1800 |
| Персики | 110 | 22 | 10 | 27 | 2420 | 2700 | 2970 |
| Виноград | 90 | 20 | 70 | 24 | 1800 | 1680 | 2160 |
| Итого | - | - | - | - | 6380 | 6180 | 6930 |

Рассчитать агрегатные индексы.

Агрегатные (сводные) индексы

Решение.

1. Индекс товарооборота:

$$I_{pq} = \frac{\sum_{j=1}^n p_1^j q_1^j}{\sum_{j=1}^n p_0^j q_0^j} = \frac{6180}{6380} = 0,969 \text{ или } 96,9\%$$

2. Индекс цен:

$$I_p = \frac{\sum_{j=1}^n p_1^j q_1^j}{\sum_{j=1}^n p_0^j q_1^j} = \frac{6180}{6930} = 0,892 \text{ или } 89,2\%$$

Агрегатные (сводные) индексы

3. Величина экономии (перерасхода) покупателей от изменения цен:

$$E = \sum_{j=1}^n p_1^j q_1^j - \sum_{j=1}^n p_0^j q_1^j = 6180 - 6930 = -750$$

4. Индекс физического объема продукции:

$$I_q = \frac{\sum_{j=1}^n q_1^j p_0^j}{\sum_{j=1}^n q_0^j p_0^j} = \frac{6930}{6380} = 1,086 \text{ или } 108,6\%.$$

Проверка:

$$I_{pq} = I_p \cdot I_q = 0,892 \cdot 1,086 = 0,969 \text{ или } 96,9\%.$$

Агрегатные (сводные) индексы

4. Индекс себестоимости:

$$I_{pq} = \frac{\sum_{j=1}^n z_1^j q_1^j}{\sum_{j=1}^n z_0^j q_1^j}$$

Сумма экономии предприятия от снижения себестоимости:

$$E = \sum_{j=1}^n z_1^j q_1^j - \sum_{j=1}^n z_0^j q_1^j$$

Агрегатные (сводные) индексы

5. Индекс физического объема продукции, взвешенного по себестоимости:

$$I_q = \frac{\sum_{j=1}^n q_1^j z_0^j}{\sum_{j=1}^n q_0^j z_0^j}$$

6. Индекс затрат на производство:

$$I_{zq} = \frac{\sum_{j=1}^n z_1^j q_1^j}{\sum_{j=1}^n z_0^j q_0^j}$$

$$I_{zq} = I_z \cdot I_q$$

Агрегатные (сводные) индексы

7. Индекс производительности труда (по трудоемкости):

$$I_w = \frac{\sum_{j=1}^n t_0^j q_1^j}{\sum_{j=1}^n t_1^j q_1^j}$$

8. Индекс производительности труда в стоимостном выражении (по выработке):

$$I_w = \frac{\sum_{j=1}^n q_1^j p^j / \sum_{j=1}^n T_1^j}{\sum_{j=1}^n q_0^j p^j / \sum_{j=1}^n T_0^j}$$

Агрегатные (сводные) индексы

Пример 2. По данным приведенным в таблице необходимо оценить рост производительности труда на предприятии.

| Вид продукции | Затраты времени на 1 изделие, чел.-ч | | Произведено, шт. | | Расчетные графы, чел.-ч | |
|---------------|--------------------------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------------|----------|
| | январь t_0 | февраль t_1 | январь q_0 | февраль q_1 | t_0q_1 | t_1q_1 |
| Изделие А | 1,0 | 0,9 | 458 | 450 | 450,0 | 405,0 |
| Изделие Б | 1,2 | 1,0 | 311 | 324 | 388,8 | 324,0 |
| Изделие В | 0,9 | 0,8 | 765 | 752 | 676,8 | 601,6 |
| Итого | - | - | - | - | 1515,6 | 1330,6 |

Индекс производительности труда на предприятии по трудоемкости:

$$I_w = \frac{\sum_{j=1}^n t_0^j q_1^j}{\sum_{j=1}^n t_1^j q_1^j} = \frac{1515,6}{1330,6} = 1,139 \text{ или } 113,9\%$$

Агрегатные (сводные) индексы

Пример 3. Имеются следующие данные о производстве продукции и средних отпускных ценах продукции предприятия:

| Вид продукции | Январь | | Февраль | | Средняя отпускная цена, руб. р | Расчетные графы, руб | |
|---------------|---------------------------|-----------------------------------|---------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|----------------------|---------|
| | произведено, шт. q_0 | трудовые затраты, чел.-ч T_0 | произведено, шт. q_1 | трудовые затраты, чел.-ч T_1 | | $q_0 p$ | $q_1 p$ |
| Изделие А | 458 | 458,0 | 450 | 405,0 | 240 | 109920 | 108000 |
| Изделие Б | 311 | 373,2 | 324 | 324,0 | 252 | 78372 | 81648 |
| Изделие В | 765 | 688,5 | 752 | 601,6 | 216 | 165240 | 162432 |
| Итого | - | 1519,7 | - | 1330,6 | - | 353532 | 352080 |

Индекс производительности труда на предприятии по выработке:

$$I_w = \frac{\sum_{j=1}^n q_1^j p^j / \sum_{j=1}^n T_1^j}{\sum_{j=1}^n q_0^j p^j / \sum_{j=1}^n T_0^j} = \frac{392080/1330,6}{394630/1519,7} = \frac{294,60}{292,86} = 1,137 \text{ или } 113,7\%$$

Средние индексы

1. Средний арифметический индекс. Получается при помощи преобразования агрегатного индекса физического объема продукции, учитывая что $q_1 = i_q q_0$:

$$I_q = \frac{\sum_{j=1}^n q_1^j p_0^j}{\sum_{j=1}^n q_0^j p_0^j} = \frac{\sum_{j=1}^n i_q q_0^j p_0^j}{\sum_{j=1}^n q_0^j p_0^j}$$

2. Средний гармонический индекс. Получается при помощи преобразования агрегатного индекса цен, учитывая что $p_0 = p_1 / i_p$:

$$I_p = \frac{\sum_{j=1}^n p_1^j q_1^j}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{i_p} p_1^j q_1^j}$$

Средние индексы

Пример 4. По приведенным в таблице данным рассчитать средний арифметический индекс.

| Товар | Реализация в базисном периоде, руб. $q_0 p_0$ | Изменение физического объема реализации в текущем периоде по сравнению с базисным, % $i_q \cdot 100\% - 100\%$ | Расчетные графы | |
|------------|--|---|-----------------|---------------------|
| | | | i_q | $i_q \cdot q_0 p_0$ |
| Мандарины | 46000 | -6,4 | 0,936 | 43056 |
| Грейпфруты | 27000 | -8,2 | 0,918 | 24786 |
| Апельсины | 51000 | +1,3 | 1,013 | 51663 |
| Итого | 124000 | - | - | 119505 |

Решение:

$$I_q = \frac{\sum_{j=1}^n i_q q_0^j p_0^j}{\sum_{j=1}^n q_0^j p_0^j} = \frac{119505}{124000} = 0,964 \text{ или } 96,4\%$$

Средние индексы

Пример 5. По приведенным в таблице данным сводную оценку изменения цен.

| Товар | Реализация в текущем периоде, руб. $q_0 p_0$ | Изменение цен в текущем периоде по сравнению с базисным, % $i_p \cdot 100\% - 100\%$ | Расчетные графы | |
|---------|---|---|-----------------|-----------------|
| | | | i_p | $p_1 q_1 / i_p$ |
| Морковь | 23000 | +4,0 | 1,040 | 22115 |
| Свекла | 21000 | +2,3 | 1,023 | 20528 |
| Лук | 29000 | -0,8 | 0,992 | 29234 |
| Итого | 73000 | - | - | 71877 |

Решение:

$$I_p = \frac{\sum_{j=1}^n p_1^j q_1^j}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{i_p} p_1^j q_1^j} = \frac{73000}{71877} = 1,016 \text{ или } 101,6\%$$

Средние индексы

3. Средний арифметический индекс производительности труда по трудоемкости (индекс Струмилина):

$$I_w = \frac{\sum_{j=1}^n \left[\frac{T_0^j}{q_0^j} : \frac{T_1^j}{q_1^j} \right] \cdot T_1^j}{\sum_{j=1}^n T_1^j}$$

Системы индексов

1. Цепные индексы цен с переменными весами:

$$I_{p^{1/0}} = \frac{\sum_{j=1}^n p_1^j q_1^j}{\sum_{j=1}^n p_0^j q_1^j}; \quad I_{p^{2/1}} = \frac{\sum_{j=1}^n p_2^j q_2^j}{\sum_{j=1}^n p_1^j q_2^j}; \quad I_{p^{3/2}} = \frac{\sum_{j=1}^n p_3^j q_3^j}{\sum_{j=1}^n p_2^j q_3^j}; \quad \dots; \quad I_{p^{n/n-1}} = \frac{\sum_{j=1}^n p_n^j q_n^j}{\sum_{j=1}^n p_{n-1}^j q_n^j}$$

2. Цепные индексы цен с постоянными весами:

$$I_{p^{1/0}} = \frac{\sum_{j=1}^n p_1^j q_0^j}{\sum_{j=1}^n p_0^j q_0^j}; \quad I_{p^{2/1}} = \frac{\sum_{j=1}^n p_2^j q_0^j}{\sum_{j=1}^n p_1^j q_0^j}; \quad I_{p^{3/2}} = \frac{\sum_{j=1}^n p_3^j q_0^j}{\sum_{j=1}^n p_2^j q_0^j}; \quad \dots; \quad I_{p^{n/n-1}} = \frac{\sum_{j=1}^n p_n^j q_0^j}{\sum_{j=1}^n p_{n-1}^j q_0^j}$$

Системы индексов

3. Базисные индексы цен с переменными весами:

$$I_{p^{1/0}} = \frac{\sum_{j=1}^n p_1^j q_1^j}{\sum_{j=1}^n p_0^j q_1^j}; \quad I_{p^{2/0}} = \frac{\sum_{j=1}^n p_2^j q_2^j}{\sum_{j=1}^n p_0^j q_2^j}; \quad I_{p^{3/0}} = \frac{\sum_{j=1}^n p_3^j q_3^j}{\sum_{j=1}^n p_0^j q_3^j}; \quad \dots; \quad I_{p^{n/0}} = \frac{\sum_{j=1}^n p_n^j q_n^j}{\sum_{j=1}^n p_0^j q_n^j}$$

4. Базисные индексы цен с постоянными весами:

$$I_{p^{1/0}} = \frac{\sum_{j=1}^n p_1^j q_0^j}{\sum_{j=1}^n p_0^j q_0^j}; \quad I_{p^{2/0}} = \frac{\sum_{j=1}^n p_2^j q_0^j}{\sum_{j=1}^n p_0^j q_0^j}; \quad I_{p^{3/0}} = \frac{\sum_{j=1}^n p_3^j q_0^j}{\sum_{j=1}^n p_0^j q_0^j}; \quad \dots; \quad I_{p^{n/0}} = \frac{\sum_{j=1}^n p_n^j q_0^j}{\sum_{j=1}^n p_0^j q_0^j}$$

Индексы постоянного и переменного состава

1. Индекс переменного состава:

$$I_p^{\text{пс}} = \frac{\sum_{k=1}^m p_1^k q_1^k}{\sum_{k=1}^m q_1^k} \cdot \frac{\sum_{k=1}^m p_0^k q_0^k}{\sum_{k=1}^m q_0^k}$$

2. Индекс структурных сдвигов:

$$I_{\text{стр}} = \frac{\sum_{k=1}^m p_0^k q_1^k}{\sum_{k=1}^m q_1^k} \cdot \frac{\sum_{k=1}^m p_0^k q_0^k}{\sum_{k=1}^m q_0^k}$$

Индексы постоянного и переменного состава

3. Индекс цен фиксированного состава:

$$I_p^{\text{фс}} = \frac{\sum_{k=1}^m p_1^k q_1^k}{\sum_{k=1}^m p_0^k q_1^k}$$

$$I_p^{\text{пс}} = I_p^{\text{фс}} \cdot I_{\text{стр}}$$

Агрегатные (сводные) индексы

Пример 6. Имеются следующие данные о реализации товара А в двух регионах:

| Регион | Июнь | | Июль | | Расчетные графы, руб. | | |
|--------------|----------------------------|-----------------------|----------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------|-----------|
| | цена за шт., руб. P_0 | продано шт., Q_0 | цена за шт., руб. P_1 | продано шт., Q_1 | $P_0 Q_0$ | $P_1 Q_1$ | $P_0 Q_1$ |
| 1 | 12 | 10000 | 13 | 18000 | 120000 | 234000 | 216000 |
| 2 | 17 | 20000 | 19 | 9000 | 340000 | 171000 | 153000 |
| Итого | - | 30000 | - | 27000 | 460000 | 405000 | 369000 |

Провести анализ изменения цен реализации товара.

Индексы постоянного и переменного состава

1. Индекс цен переменного состава:

$$I_p^{\text{пс}} = \frac{\sum_{k=1}^m p_1^k q_1^k}{\sum_{k=1}^m q_1^k} : \frac{\sum_{k=1}^m p_0^k q_0^k}{\sum_{k=1}^m q_0^k} = \frac{405000}{27000} : \frac{460000}{30000} = 15,00 : 15,33 = 0,978$$

2. Индекс структурных сдвигов:

$$I_{\text{стр}} = \frac{\sum_{k=1}^m p_0^k q_1^k}{\sum_{k=1}^m q_1^k} : \frac{\sum_{k=1}^m p_0^k q_0^k}{\sum_{k=1}^m q_0^k} = \frac{369000}{27000} : \frac{460000}{30000} = 0,891 \text{ или } 89,1\%$$

Индексы постоянного и переменного состава

3. Индекс цен фиксированного состава:

$$I_p^{\text{фс}} = \frac{\sum_{k=1}^m p_1^k q_1^k}{\sum_{k=1}^m p_0^k q_1^k} = \frac{405000}{369000} = 1,098 \text{ или } 109,8\%$$

$$I_p^{\text{пс}} = I_p^{\text{фс}} \cdot I_{\text{стр}} = 1,098 \cdot 0,891 = 0,978$$

Территориальные индексы

Территориальные индексы служат для сравнения показателей в пространстве, т.е. по предприятиям, округам, городам, районам, республикам, странам и пр.

Способы расчета территориальных индексов.

1. В качестве весов принимается сумма объемов проданных товаров по двум регионам:

$$Q = q_a + q_b$$

Территориальный индекс цен:

$$I_{pb/a} = \frac{\sum_{k=1}^m p_b^k Q}{\sum_{k=1}^m p_a^k Q}$$

Территориальные индексы

Пример 7. Имеются следующие данные о реализации товаров в двух регионах:

| Товар | Регион А | | Регион В | | Расчетные графы | | |
|-------|----------------------------------|------------------------|----------------------------------|------------------------|-----------------|---------|---------|
| | цена за т, тыс. руб. p_a | продано т, q_a | цена за т, тыс. руб. p_b | продано т, q_b | $Q=q_a + q_b$ | $p_a Q$ | $p_b Q$ |
| 1 | 11,0 | 30 | 12,0 | 35 | 65 | 715,0 | 780,0 |
| 2 | 8,5 | 45 | 9,0 | 50 | 95 | 807,5 | 855,0 |
| 3 | 17,0 | 15 | 16,0 | 90 | 105 | 1785,0 | 1680,0 |
| Итого | - | - | - | - | - | 3307,5 | 3315,0 |

Рассчитать территориальный индекс цен.

Территориальные индексы

Территориальный индекс цен:

$$I_{pb/a} = \frac{\sum_{k=1}^m p_b^k Q}{\sum_{k=1}^m p_a^k Q} = \frac{3315,0}{3307,5} = 1,002 \text{ или } 100,2\%$$

ИЛИ

$$I_{pa/b} = \frac{\sum_{k=1}^m p_a^k Q}{\sum_{k=1}^m p_b^k Q} = \frac{3307,5}{3315,0} = 0,998 \text{ или } 99,8\%$$

Территориальные индексы

2. Учитывается соотношение весов сравниваемых территорий.

$$\bar{p}_k = \frac{p_a^k q_a^k + p_b^k q_b^k}{q_a^k + q_b^k} \quad k = 1 \dots m$$

Территориальный индекс цен:

$$I_{pb/a} = \frac{\sum_{k=1}^m p_b^k q_b^k}{\sum_{k=1}^m \bar{p}_k q_b^k} \cdot \frac{\sum_{k=1}^m p_a^k q_a^k}{\sum_{k=1}^m \bar{p}_k q_a^k}$$

Территориальные индексы

Территориальный индекс физического объема реализации:

$$I_{qb/a} = \frac{\sum_{k=1}^m q_b^k \bar{p}_k}{\sum_{k=1}^m q_a^k \bar{p}_k}$$

Территориальный индекс товарооборота:

$$I_{pqb/a} = I_{pb/a} \cdot I_{qb/a}$$

Территориальные индексы

Для примера 7:

$$\bar{p}_1 = \frac{p_a^1 q_a^1 + p_b^1 q_b^1}{q_a^1 + q_b^1} = \frac{11,0 \cdot 30 + 12,0 \cdot 35}{65} = 11,54$$

$$\bar{p}_2 = \frac{p_a^2 q_a^2 + p_b^2 q_b^2}{q_a^2 + q_b^2} = \frac{8,5 \cdot 45 + 9,0 \cdot 50}{95} = 8,76$$

$$\bar{p}_3 = \frac{p_a^3 q_a^3 + p_b^3 q_b^3}{q_a^3 + q_b^3} = \frac{17,0 \cdot 15 + 16,0 \cdot 90}{105} = 16,14$$

Территориальные индексы

Территориальный индекс цен:

$$I_{pb/a} = \frac{12,0 \cdot 35 + 9,0 \cdot 50 + 16,0 \cdot 90}{11,54 \cdot 35 + 8,76 \cdot 50 + 16,14 \cdot 90} \cdot \frac{11,0 \cdot 30 + 8,5 \cdot 45 + 17,0 \cdot 15}{11,54 \cdot 30 + 8,76 \cdot 45 + 16,14 \cdot 15} =$$
$$= 1,022 \quad \text{или} \quad 102,2\%$$

Территориальный индекс физического объема реализации:

$$I_{qb/a} = \frac{35 \cdot 11,54 + 50 \cdot 8,76 + 90 \cdot 16,14}{30 \cdot 11,54 + 45 \cdot 8,76 + 15 \cdot 16,14} = \frac{2294,50}{2193,00} =$$
$$= 1,046 \quad \text{или} \quad 104,6\%$$

Территориальный индекс товарооборота:

$$I_{pqb/a} = I_{pb/a} \cdot I_{qb/a} = 1,022 \cdot 1,046 = 1,069 \quad \text{или} \quad 106,9\%$$