

# 9.3. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ

*Точка  $x_0$  называется точкой максимума функции  $f(x)$ , если в некоторой окрестности точки  $x_0$  выполняется неравенство*

$$f(x) \leq f(x_0)$$

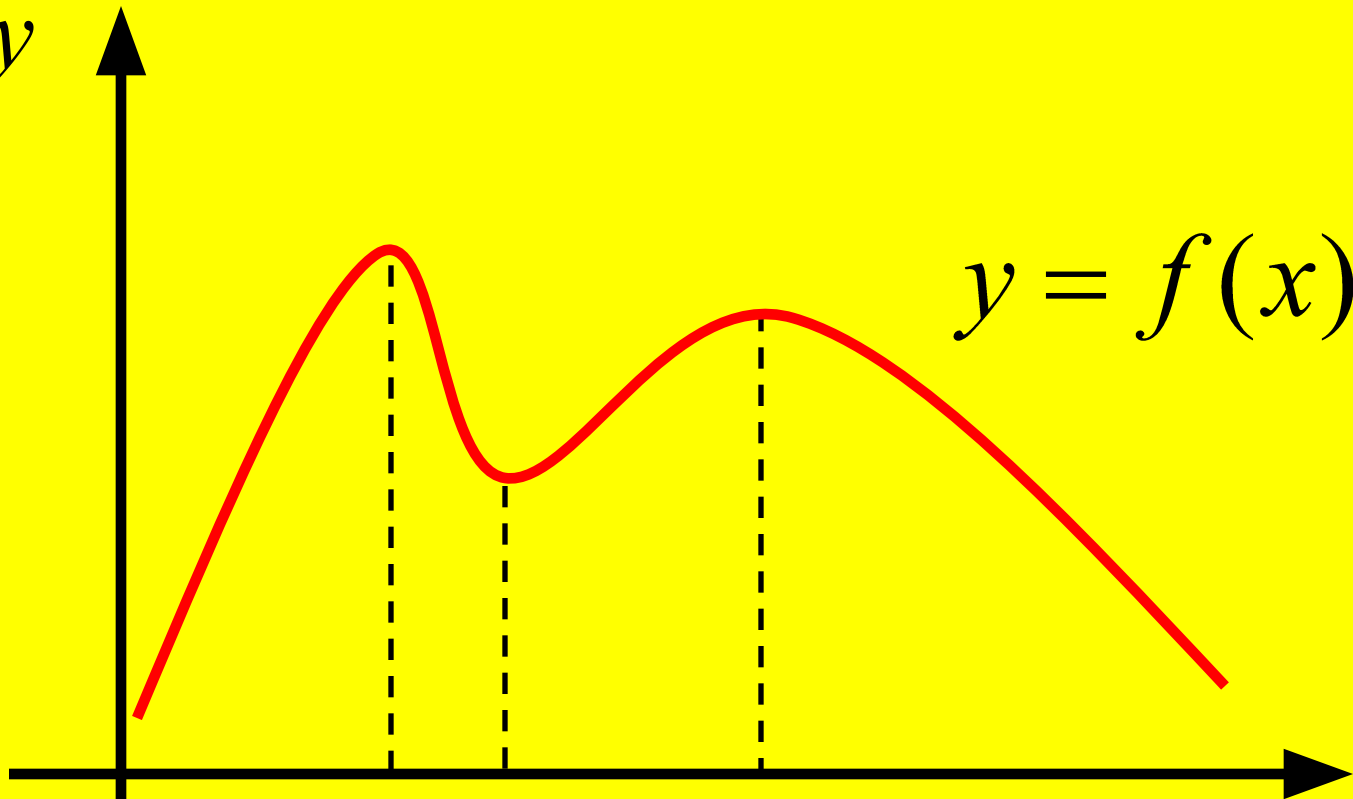
*Точка  $x_1$  называется точкой минимума функции  $f(x)$ , если в некоторой окрестности точки  $x_1$  выполняется неравенство*

$$f(x) \geq f(x_1)$$

*Значения функции в точках  $x_0$  и  $x_1$  называются соответственно максимумом и минимумом функции.*

*Максимум и минимум функции называется экстремумом функции.*

$y$



$$y = f(x)$$

$x_1$

$x_2$

$x_3$

$x$

*max min*

*max*



На одном промежутке функция может иметь несколько экстремумов, причем может быть, что минимум в одной точке больше максимума в другой.

Максимум или минимум функции на некотором промежутке не являются в общем случае наибольшим и наименьшим значением функции.

Если в некоторой точке  $x_0$  дифференцируемая функция  $f(x)$  имеет экстремум, то в некоторой окрестности этой точки выполняется теорема Ферма и производная функции в этой точке равна нулю:

$$f'(x_0) = 0$$



**Однако, функция может иметь экстремум в точке,  
в которой она не дифференцируема.**

**Например, функция**

$$y = |x|$$

**имеет минимум в точке**

$$x = 0$$

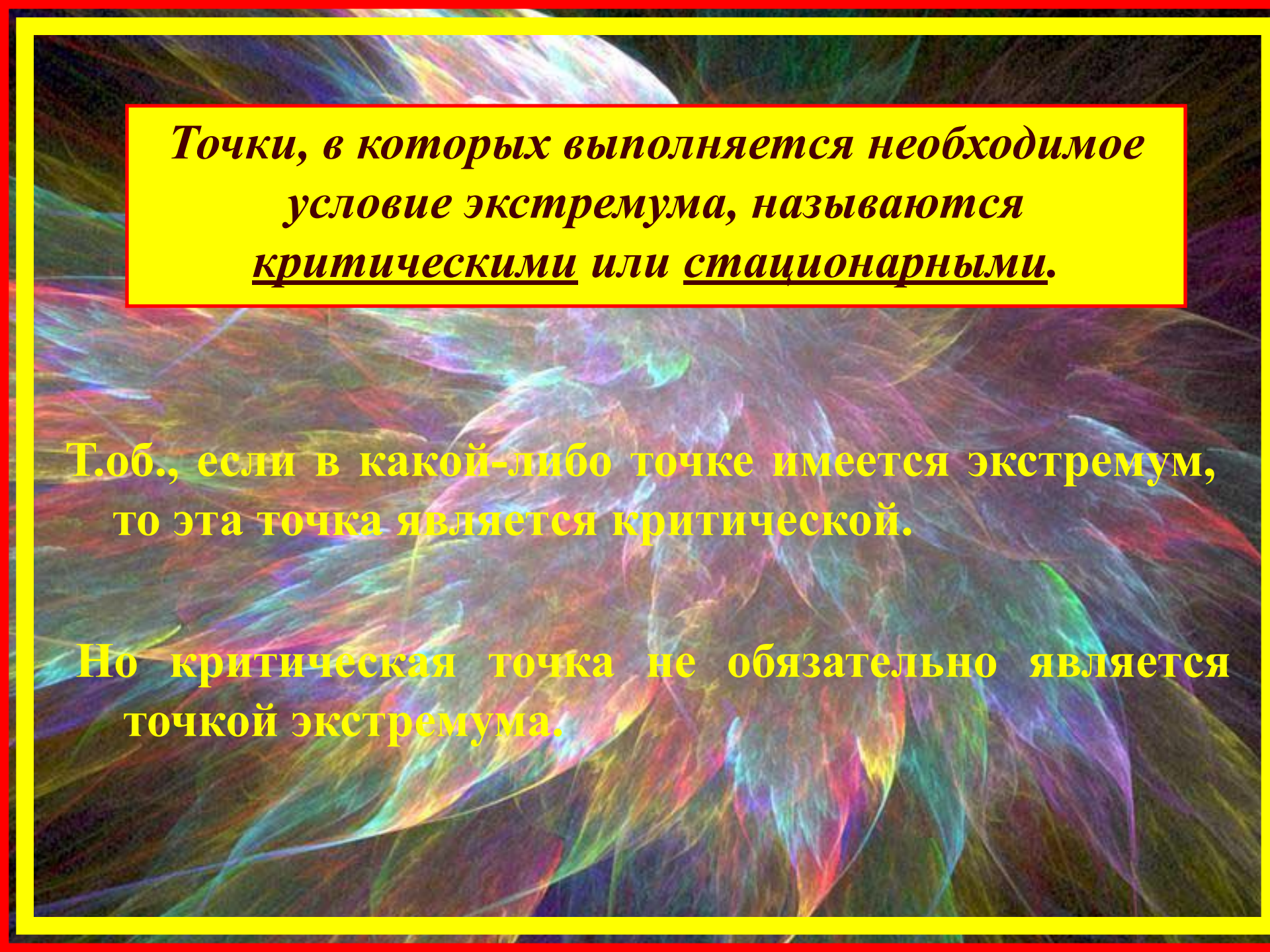
**но она в этой точке не дифференцируема.**



***необходимое условие  
экстремума:***

***Для того, чтобы функция  $y=f(x)$  имела экстремум в точке  $x_0$ , необходимо, чтобы ее производная в этой точке равнялась нулю или не существовала.***





*Точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума, называются критическими или стационарными.*

**Т.об., если в какой-либо точке имеется экстремум, то эта точка является критической.**

**Но критическая точка не обязательно является точкой экстремума.**



# *Примеры*

*Найти критические точки и экстремумы  
функций:*

1

$$y = x^2$$



# Решение:

Применим необходимое условие экстремума:

$$y' = (x^2)' = 2x$$

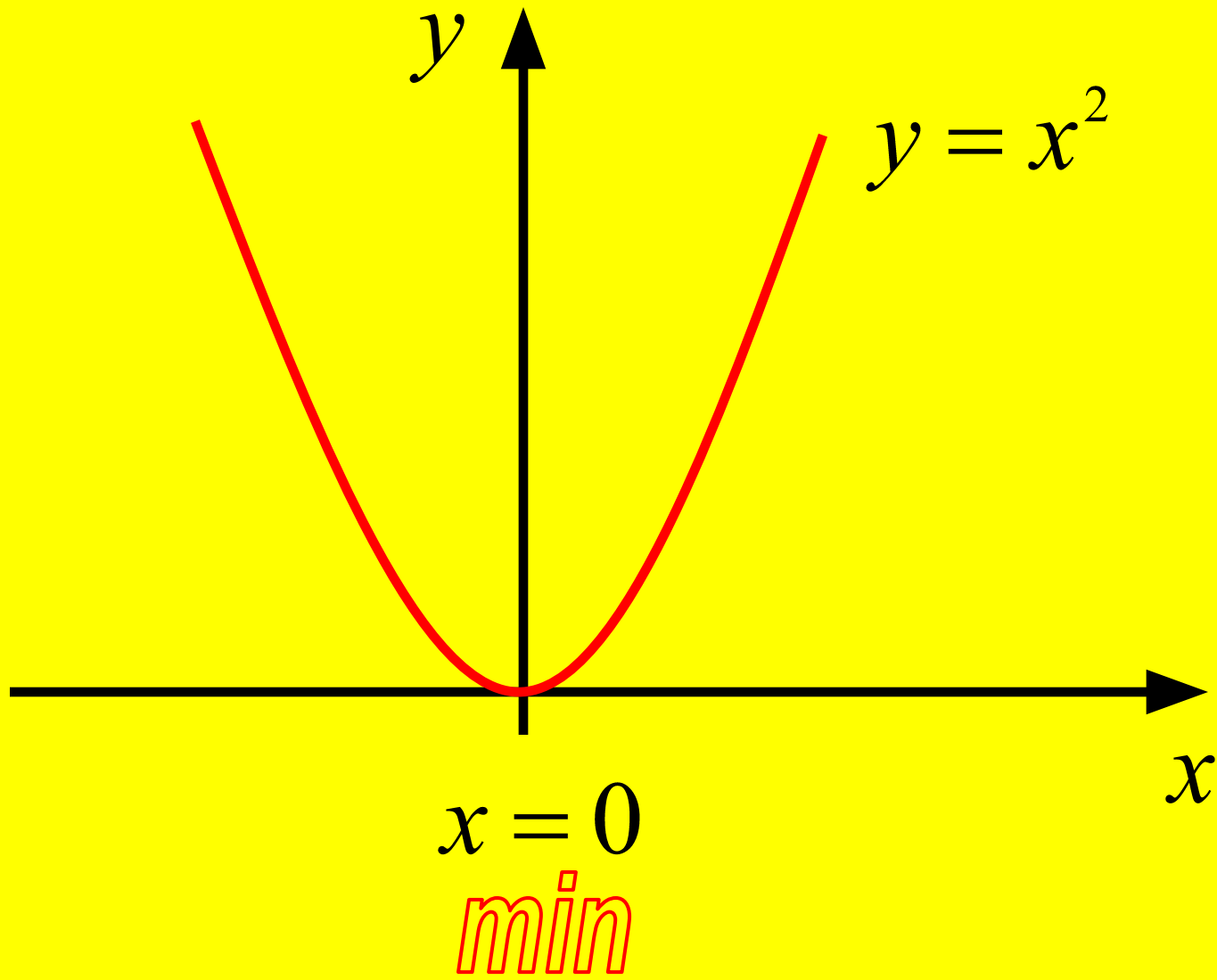
$$y' = 2x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0$$

$$x = 0$$

- критическая точка

$$y = 0$$









2

$$y = x^3 + 1$$



# Решение:

Применим необходимое условие экстремума:

$$y' = (x^3 + 1)' = 3x^2$$

$$y' = 3x^2 = 0 \quad \text{при} \quad x = 0$$

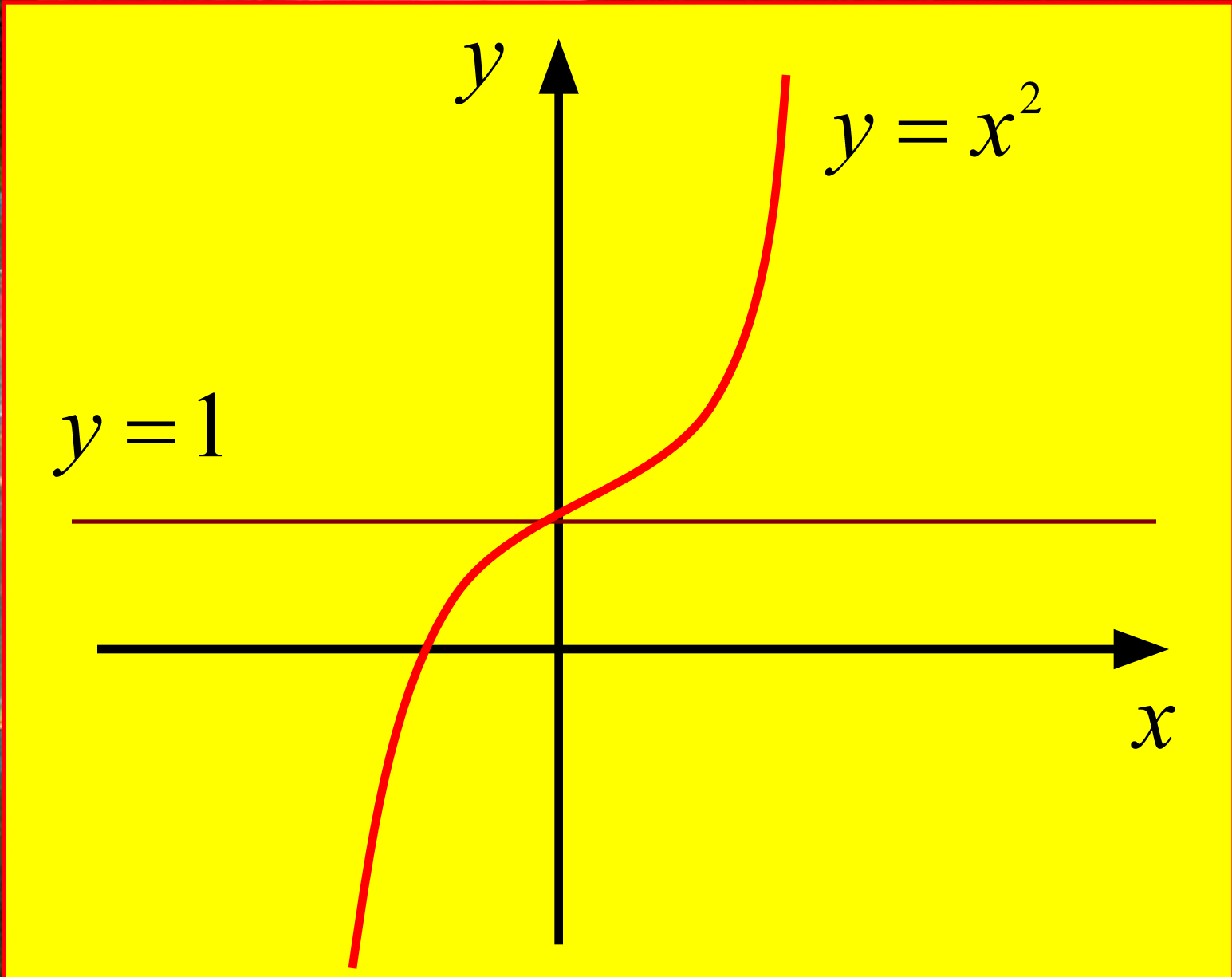
$$x = 0$$

- критическая точка

$$y = 1$$







# *первое достаточное условие экстремума*

*Если при переходе через точку  $x_0$  производная дифференцируемой функции  $y=f(x)$  меняет знак с плюса на минус, то  $x_0$  есть точка максимума, а если с минуса на плюс, то  $x_0$  есть точка минимума.*



# Доказательство:

Пусть производная меняет знак с плюса на минус,  
т.е. на некотором интервале

$$(a; x_0) \quad f'(x) > 0$$

а на некотором интервале

$$(x_0; b) \quad f'(x) < 0$$

Тогда функция  $y=f(x)$  будет возрастать на  $(a; x_0)$



и будет убывать на  $(x_0; b)$

По определению возрастающей функции

$$f(x_0) > f(x) \quad \text{для всех} \quad x \in (a; x_0)$$

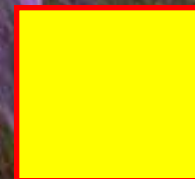
Для убывающей функции

$$f(x_0) < f(x) \quad \text{для всех} \quad x \in (x_0; b)$$



$x_0$  - точка максимума.

Аналогично доказывается для минимума.





# *схема исследования функции на экстремум*

**1**

*Найти производную функции*

$$y' = f'(x)$$

**2**

*Найти критические точки функции, в которых производная равна нулю или не существует.*

**3**

*Исследовать знак производной слева и справа от каждой критической точки.*

**4**

*Найти экстремум функции.*



# *Пример*

*Исследовать функцию на экстремум:*

$$y = x(x - 1)^3$$



# Решение:

Применим схему исследования функции на экстремум:

**1** Находим производную функции:

$$\begin{aligned}y' &= (x(x-1)^3)' = (x-1)^3 + 3x \cdot (x-1)^2 = \\ &= (x-1)^2(x-1+3x) = (x-1)^2(4x-1)\end{aligned}$$



**2**

**Находим критические точки:**

$$(x - 1)^2 (4x - 1) = 0$$

$$x_1 = 1$$

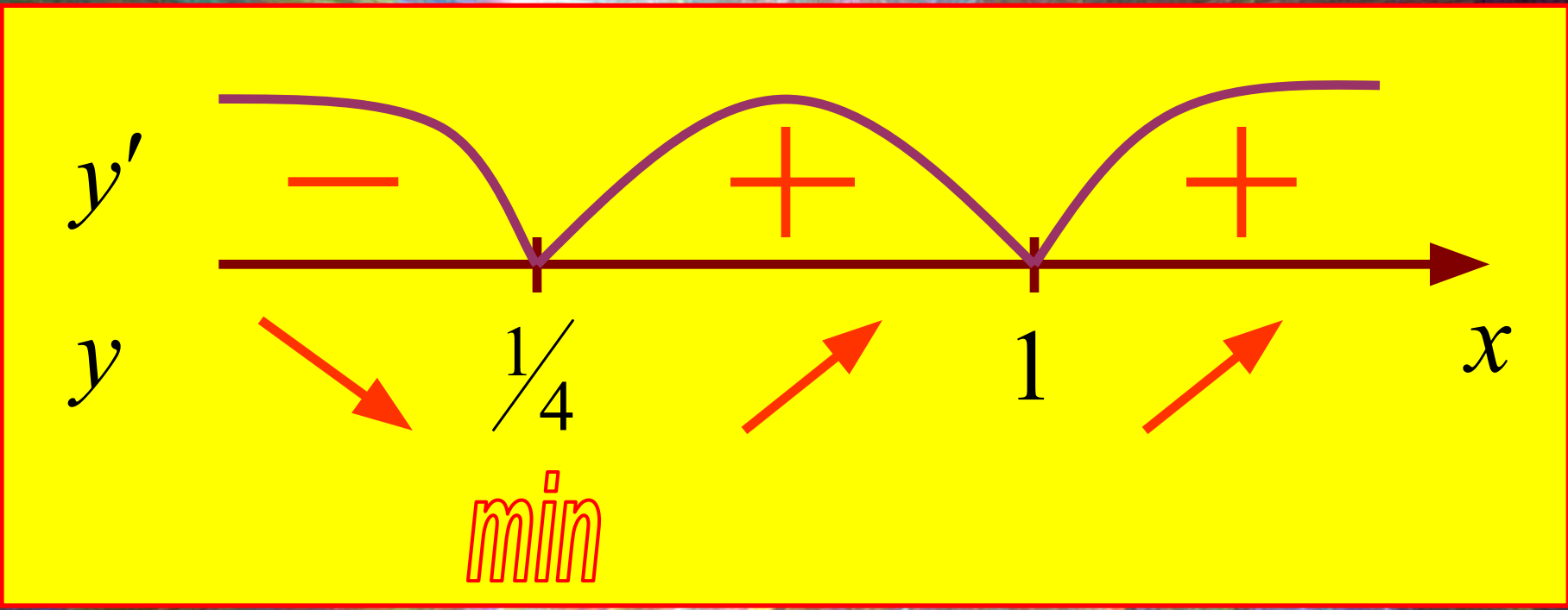
$$x_2 = \frac{1}{4}$$

***критические точки***



3

Исследуем знак производной слева и справа от каждой критической точки:



В точке  $x=1$  экстремума нет.





4

Находим экстремум функции:

$$f_{\min} \left( \frac{1}{4} \right) = -\frac{27}{256}$$



***второе достаточное  
условие экстремума:***

***Если первая производная дифференцируемой функции  $y=f(x)$  в точке  $x_0$  равна нулю, а вторая производная в этой точке положительна, то  $x_0$  есть точка минимума, а если вторая производная отрицательна, то  $x_0$  есть точка максимума.***



# Доказательство:

Пусть

$$f'(x_0) = 0$$

$$f''(x_0) > 0$$

следовательно

$$f''(x) = (f'(x))' > 0$$

и в некоторой окрестности точки  $x_0$ , т.е.



функция  $f'(x)$  будет возрастать на  $(a; b)$   
содержащем точку  $x_0$ .

Но  $f'(x_0) = 0$



на интервале  $(a; x_0)$   $f'(x) > 0$

а на интервале  $(x_0; b)$   $f'(x) < 0$



Таким образом, функция  $f'(x)$

при переходе через точку  $x_0$  меняет знак с минуса на плюс, следовательно эта точка является точкой минимума.

Аналогично доказывается случай для максимума функции.

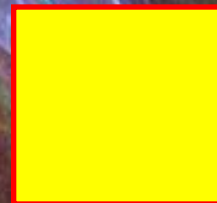




Схема исследования функции на экстремум в этом случае аналогична предыдущей, но третий пункт следует заменить на:

3

*Найти вторую производную и определить ее знак в каждой критической точке.*



**Из второго достаточного условия следует, что если в критической точке вторая производная функции не равна нулю, то эта точка является точкой экстремума.**

**Обратное утверждение не верно: если в критической точке вторая производная функции равна нулю, то эта точка также может являться точкой экстремума.**

**В этом случае для исследования функции необходимо использовать первое достаточное условие экстремума.**