



## 16.6. ЭКСТРЕМУМ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

Как и в случае функции одной переменной, функция  $z=f(x,y)$  имеет узловые, определяющие график функции, точки.

Определим точки экстремума для функции двух переменных.




*Точка  $M(x_0, y_0)$  называется точкой максимума (минимума) функции  $z=f(x, y)$ , если существует окрестность точки  $M$ , такая что для всех точек  $(x, y)$  из этой окрестности выполняется неравенство:*

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y)$$

*max*

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$$

*min*



Экстремум имеет локальный характер, поскольку рассматривается максимальное и минимальное значение функции в достаточно малой окрестности точки  $M(x_0, y_0)$ .

Сформулируем аналог теоремы Ферма для функции двух переменных:

***необходимое условие  
экстремума***



# ТЕОРЕМА.

Пусть точка  $(x_0, y_0)$  является точкой экстремума дифференцируемой функции  $z=f(x, y)$ .

Тогда частные производные в этой точке

$$f'_x(x_0, y_0) \quad f'_y(x_0, y_0)$$

равны нулю:

$$f'_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f'_y(x_0, y_0) = 0$$

# Доказательство:

Пусть точка  $M(x_0, y_0)$  – точка максимума.

Зафиксируем одну из переменных, например,  $y$ :

$$y = y_0$$

Тогда получим функцию одной переменной

$$z_1 = f(x, y_0)$$

которая будет иметь максимум при  $x = x_0$ .

Согласно теореме Ферма  $z_1'(x_0) = f'_x(x, y_0) = 0$

Аналогично можно доказать, что  $f'_y(x_0, y) = 0$



*Точки, в которых выполняются условия экстремума функции  $z=f(x,y)$ , т.е.*

$$z'_x = 0$$

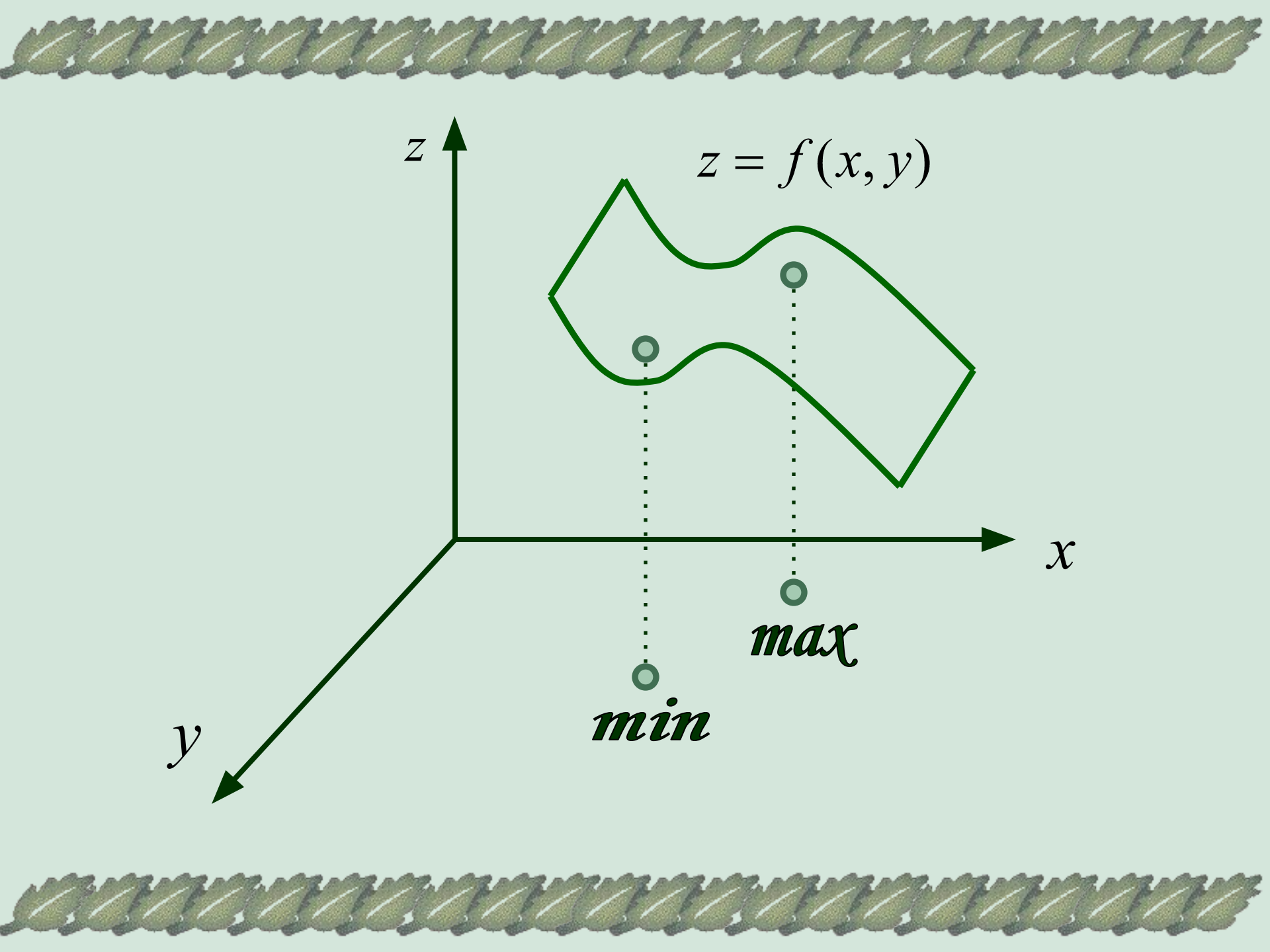
$$z'_y = 0$$

*называются критическими или стационарными.*

Необходимое условие экстремума можно сформулировать иначе:

*В точках максимума или минимума дифференцируемой функции градиент этой функции равен нулю:*

$$\nabla_z = 0$$





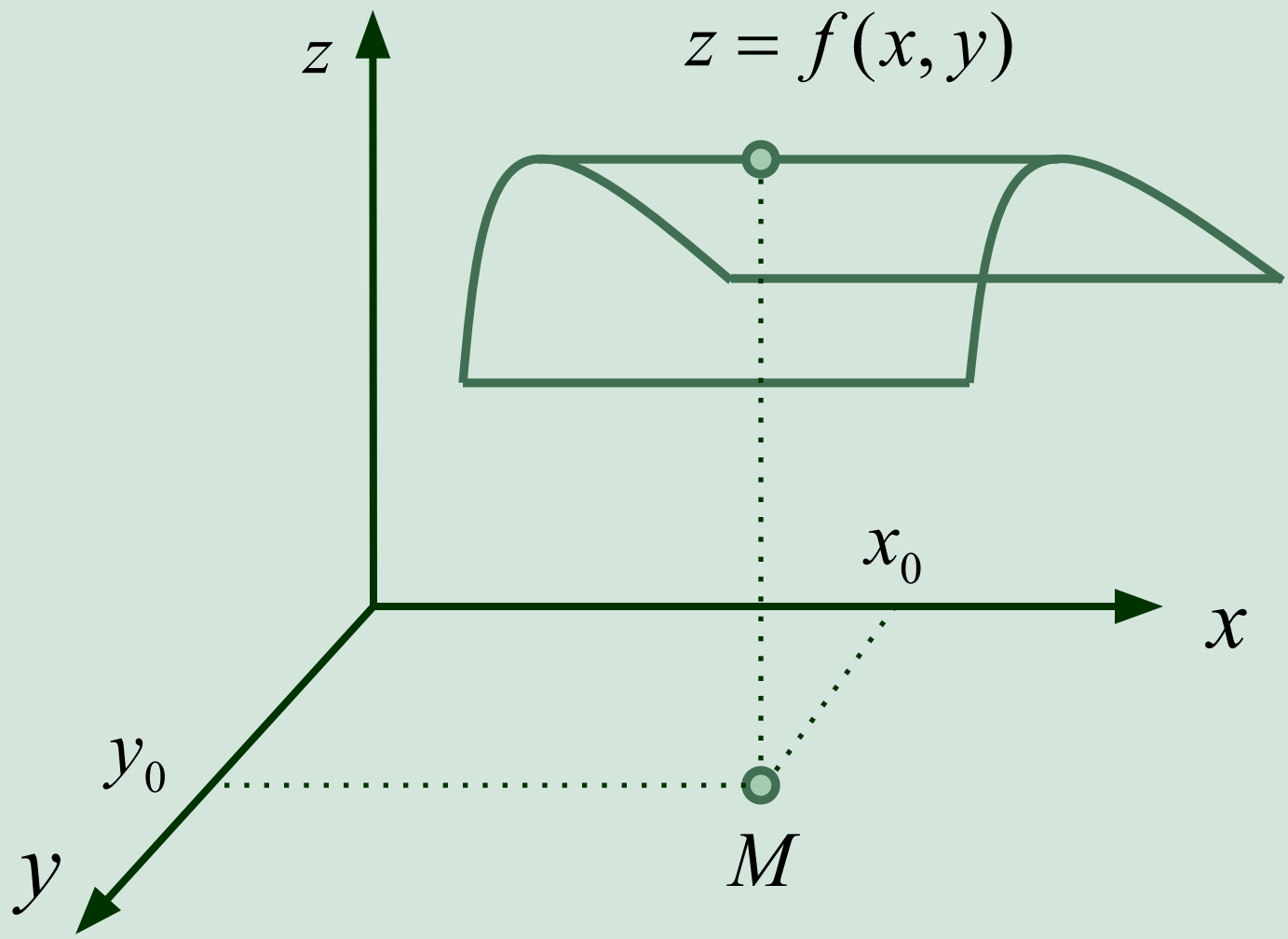


**Однако, сформулированное выше условие является необходимым, но не достаточным.**

**Т.е., если частные производные функции в точке равны нулю, то это еще не означает, что в данной точке имеется экстремум функции.**

**Например:**







**В точке  $M(x_0, y_0)$  выполняется необходимое условие экстремума:**


$$f'_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f'_y(x_0, y_0) = 0$$

**Но эта точка не является точкой экстремума.**

**Она называется седловой точкой (аналог точки перегиба).**

**Чтобы отличать такие точки от точек экстремума, необходимо рассмотреть достаточное условие экстремума.**



# ТЕОРЕМА.

## Достаточное условие экстр

Пусть функция  $z=f(x,y)$

①

Определена в некоторой окрестности критической точки  $(x_0, y_0)$ , в которой

$$f'_x(x_0, y_0) = 0$$

$$f'_y(x_0, y_0) = 0$$

②

*Имеет в этой точке непрерывные частные производные второго порядка:*

$$f''_{xx}(xy) = A$$

$$f''_{xy}(xy) = f''_{yx}(xy) = B$$

$$f''_{yy}(xy) = C$$

Тогда, если  $\Delta = A \cdot C - B^2 > 0$   
то в данной точке функция имеет  
экстремум, причем

если  $A > 0$ , то минимум

если  $A < 0$ , то максимум

если  $\Delta = A \cdot C - B^2 < 0$

то функция экстремума не имеет,

если  $\Delta = A \cdot C - B^2 = 0$

то вопрос остается открытым.



# **СХЕМА** **исследования функции нескольких** **переменных на экстрем**

1

*Найти частные производные*

$$z'_x = f'_x(x, y) \quad z'_y = f'_y(x, y)$$





2

*Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$$

*и найти критические точки*





*Найти частные производные второго порядка, вычислить их значения в критических точках и с помощью достаточного условия экстремума сделать вывод о наличии экстремума функции.*



4


*Найти значения функции в точках  
экстремума.*





# *Пример.*

*Найти экстремум функции*

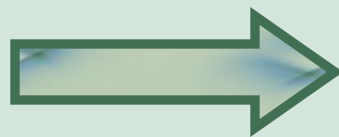
$$z = x^3 - y^3 - 3xy$$


# Решение.


$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y$$

$$z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -3y^2 - 3x$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ -3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$



$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -1 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$


$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -6y$$


$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -3$$

$$A_1 = 0 \quad B_1 = 0 \quad C_1 = -3$$

$$\Delta = -9$$

**Экстремума нет.**




$$A_2 = -6 \quad B_2 = 6 \quad C_1 = -3$$

$$\Delta = 27$$

**Экстремум есть.**

**Т.к.  $A < 0$ , то это будет максимум.**

