Элективный курс «Решение задач с параметрами»

Для предпрофильной подготовки учащихся 8-9 классов

Здравствуйте, дорогие ребята!

- ***Я рада приветствовать на своем курсе вас, любящих математику, интересующихся решением логических задач, желающих в будущем связать себя с царицей наук.***
- ***Я рада приветствовать всех тех ребят, кто заглянул сюда из-за любопытства, которые не определились с выбором профиля, может вам пригодятся полученные здесь знания при подготовке к ЕГЭ.***

- **В своем курсе ДО я используем такие элементы обучения, как лекция, тест-тренинг, практические и самостоятельные работы, чаты и итоговую контрольную работу.**

- **Лекции (У-1)строятся по типу чередования страниц с теоретическим материалом и страниц с вопросами. Материал лекции строится таким образом, чтобы в основе обучения лежал деятельностный подход. То есть практически в каждом параграфе содержится какое-либо задание, которое выполняется совместно с учителем, либо самостоятельно.**

- **По завершении лекции учащиеся проходят тест-тренинг(Тест «Найти параметр» и т.д.), который помогает вам самим проверить, насколько вы усвоили пройденный материал, и повторить его. На выполнение таких тестов отводится неограниченное количество попыток с начислением или нет штрафных баллов за неправильные ответы.**

- **После прохождения лекционного тематического блока учащемуся предлагается выполнить самостоятельную работу,(которая не ограничена по времени) и отправить преподавателю на проверку(СР№ 1и т.д.)**

- **Чат будет использоваться для вопросов –ответов, для обсуждения возникших в ходе выполнения самостоятельной работы вопросов. При этом в обсуждении принимают участие как преподаватель, так и другие ученики. Мой skype: maina601**
- **Данный блок (курс) завершится итоговой контрольной работой (КР) и круглым столом.**

Темы курса:

- **Что такое параметр?**
- **Примеры равенств с параметрами**
- **Равносильность уравнений**
- **Преобразования, при которых данное уравнение переходит в равносильное:**
- **Преобразования, при которых появляются уравнения – следствия**
- **Таблица равносильных преобразований**

Уравнения и неравенства с параметрами

- 1.Линейные уравнения и уравнения, сводящиеся к ним.
- 2.Линейные неравенства и неравенства, сводящиеся к ним.
- 3.Некоторые рациональные неравенства и неравенства, сводящиеся к ним.

- **Наши цели:**

  - знать, что такое параметр,
- - знать, что значит решить уравнение и неравенство с параметром;
- -уметь решать уравнения и неравенства с параметром;
- - уметь отличать в уравнениях и неравенствах параметр от неизвестных;
- - уметь выбирать и записывать ответ в уравнениях и неравенствах
- с параметрами.

Урок 1.
Что такое параметр?

- Если в уравнение или неравенство наряду с неизвестной величиной входят неизвестные, но фиксированные числа, обозначаемые буквами, то они называются параметрами.
- Уравнение или неравенство называются параметрическими.

Примеры равенств с параметрами

- линейная функция $y=kx+b$, k, b - параметры, x, y- переменные;
- квадратичная функция $y= ax^2+bx+c$, где $a\neq 0$

a, b, c-параметры, x, y –переменные;

- уравнение окружности с центром в начале координат имеет вид ,где x, y- координаты точек - переменные, r- радиус окружности – параметр.

Практическая работа (совместно с учителем)
Составьте уравнение с параметром, чтобы:

- каждому значению параметра соответствовало единственное значение переменной x;
- при любом значении параметра оно не имело корней;
- которое не имеет корней при всех $a<0$;
- которое не имело корней при каком-то одном значении параметра, а при всех остальных его значениях имело бы корни;
- которое имело бы корни при одном значении параметра, а при всех остальных его значениях не имело бы корней.

Тест-тренинг.

Тест «Найти параметр»

Урок 2-3.

Равносильность уравнений

- **Определение 1**. Пусть имеются два уравнения f (x)=g (x) и f (x)=g (x).
- Если каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения, и каждый корень второго уравнения является корнем первого, то эти уравнения называют равносильными.
- **Пример**. Уравнения 3х=9 и $\sqrt{3x+7=4}$ являются равносильными. Значение х=3 -их корень.
- Уравнения $x^4+7=0$ и $3x^2+8=0$ тоже равносильны, так как ни одно из них не имеет корней.
- **Определение 2.** Если каждый корень одного уравнения является корнем другого, то второе уравнение является следствием первого. (Из определения следует, что если два уравнения не являются следствием друг друга, то они равносильны).
- **Пример**. Уравнение (х+2)(х-3)=0 является следствием уравнения 2х=6, так как число 3 является корнем второго уравнения, но не является корнем первого.

Преобразования, при которых данное уравнение переходит в равносильное:

- **1. Слагаемое можно переносить из одной части уравнения в другую, изменяя знак на противоположный.**
- Пример. Уравнение $x^2+7=3x$ равносильно уравнению

$x^2-3x+7=0$.

- **2. Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то получится уравнение, равносильное данному.**
- Пример. Уравнение $9x-5=4$ равносильно $9x-1=0$.
- **3. Если обе части уравнения умножить на одно и то же число, отличное от нуля, то получится уравнение, равносильное данному.**
- Пример. Уравнение $2{,}5x+3{,}5=2$ равносильно $5x+7=4$.
- **4. Если обе части уравнения $f(x)=g(x)$ умножить или разделить на функцию $y=k(x)$ (для всех x выполняется $k(x)\neq0$), то получится уравнение, равносильное данному.**
- Пример. Уравнение $4(x^2+1)^2-(x^2+1)=0$ равносильно уравнению $(x^2+1)=$.

Преобразования, при которых появляются уравнения – следствия:

- **1. Освобождение от знаменателя.**
- Пример. Уравнение $\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x^2+1}$

не равносильно уравнению $x^2+1=x(x-1)$, так как первое уравнение имеет только один корень -1, а второе - два корня 1 и -1.

- **2. Возведение в одну и ту же чётную степень.**
- Пример. Уравнения $\sqrt{3-2x}=x$
- и $x^2=3-2x$ не равносильны, т.к. первое уравнение имеет только один корень 1, а второе - два корня 1 и -3.
- **Каждое второе уравнение называют *следствием* первого. Переходя от одного уравнения к его следствию, мы не потеряем корней уравнения, но, возможно, приобретём лишние. Поэтому необходима проверка полученных его корней непосредственной подстановкой в исходное или составлением смешанной системы, включающей ограничения на то действие, которое изменило равносильность.**

Практическая работа (зад.1-1,3,5; зад.2-1,3-совместно с учителем, остальное- самостоятельно)

- Задание 1. Какие из пар уравнений являются равносильными? Какое уравнение в парах является следствием другого?
- 1) $\frac{5x+6}{x-1}=\frac{4-2x}{x-1}$ и 5x+6=4-2x.
- 2) $(x+3)^2=(4-x)^2$ и $|x+3|=|4-x|$
- 3) $\frac{9-x^2}{x+3}=0$ и $9-x^2=0$.
- 4) $6x^2-11x+5=0$ и x- 5/6=0.
- 5) $\sqrt{(x+5)(x+1)}=0$ и $\sqrt{x-5}*\sqrt{x+1}=0$
- 6) 3x-2=x и $(3x-2)\sqrt{x-4}$ = x $\sqrt{x-4}$
- Задание 2. При каких значениях параметра a уравнения равносильны?
- 1)5x-101=0 и (5x-101) (x^4+a)=0.
- 2) 2x-7+$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ =3x-a+ $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ и 2x-7=3x-a.
- 3) $\frac{16x^2-9}{x-a}=0$ и 4x+3=0.

- ОТВЕТЫ: 1. 1) Равносильны.
- 2) Равносильны.
- 3) Второе является следствием первого.
- 4) Первое является следствием второго.
- 5) Первое является следствием второго.
- 6) никакое из уравнений не является следствием другого.
- 2. 1) при $a>0$;
- 2) при $a>9$;
- 3) при $a=3/4$.

С.Р.№1 Таблица равносильных преобразований (заполнить самостоятельно, привести примеры)

Преобразование	Исходное уравнение	Равносильное уравнение
Перенос слагаемых из одной части уравнения в другую		
Алгебраическое сложение с одним и тем же числом		
Умножение на одно и то же не равное нулю число		
Умножение (деление) на одну и ту же не равную нулю функцию		

Таблица неравносильных преобразований

Преобразование	Исходное уравнение	Уравнение - следствие
Приведение подобных слагаемых		
Возведение в одну и ту же натуральную степень		
Освобождение от знаменателя		

Вопросы:

- 1)Что такое параметр?
- 2) Какие уравнения называются равносильными?
- 3) Какие уравнения называют уравнениями-следствиями?
- 4) Какие преобразования приводят к равносильным уравнениям?
- 5) Какие преобразования приводят к уравнениям - следствиям?

- Работа в skype
- чат-форум по вопросам к урокам1-3

Уравнения и неравенства с параметрами

- 1.Линейные уравнения и уравнения, сводящиеся к ним.
- 2.Линейные неравенства и неравенства, сводящиеся к ним.
- 3.Некоторые рациональные неравенства и неравенства, сводящиеся к ним.

Уроки 4-5
Линейные уравнения

Уравнение вида

$$\mathbf{A\ x = B}, \quad (1)$$

где А, В – выражения, зависящие от параметров, х – неизвестное, называется **линейным уравнением с параметрами**.

Решить уравнение с параметрами – значит для всех значений параметров найти множество корней заданного уравнения.

Замечания:

- Если линейное уравнение или уравнение, сводящееся к линейному, не представлено в виде (1), то сначала его нужно привести к виду (1) (стандартному виду) и только после этого проводить исследование.
- Если для каких-нибудь значений параметров уравнение не имеет смысла, то для этих значений параметров множество решений уравнения пусто. Кроме этого, уравнение может иметь пустое множество решений и при других значениях параметров.

Решение задач

- **Задача1**. Для всех значений параметра k решить уравнение: $(k+4)x=2k+1$

Решение: Уравнение уже записано в стандартном виде(1), поэтому проведем исследование по указанной выше схеме:

1) Если $k+4=0$, т.е. $k=-4$, имеем $0*x=-7$, то уравнение не имеет решений.

2) Если $k+4 \neq 0$,т.е. $k=-4$. то $x=(2k+1)/(k+4)$

Ответ: если $k=-4$, то $x \in \acute{Ø}$

если $k \neq -4$, то $x =(2k+1)/(k+4)$

- **Задача 2**. Для всех значений параметра а решить уравнение $(3/4a-1)\ x- 3a+4 =0$

Запишем уравнение в стандартном виде $(3/4a-1)\ x= 3a-4$

1) $3/4a-1=0$, то $a=4/3$. Тогда уравнение имеет вид $0*x=0$ Это равенство верно при любом х. Значит решением уравнения будет все множество действительных чисел, т.е. $x \in R$.

2) $3/4a -1 \neq 0$, то $a \neq 4/3$. Тогда $x=(4-3a)/(3/4a-1) =-4$

Ответ: если $a=4/3$,то $x \in R$.

если $a \neq 4/3$, то $x=-4$

Задача 3

- Для всех значений параметра p решить уравнение

$$\left(p^2-1\right)x = p^3+1$$

Решение:1) $p^2-1=0 \Leftrightarrow p=\pm 1.$

1)при p=1 уравнение имеет вид 0*x=2 $\Rightarrow x \in \varnothing$

при p=-1 уравнение имеет вид 0*x=0 $\Rightarrow x \in \mathrm{R}$

2)$p^2-1 \neq 0 \Leftrightarrow p \neq \pm 1, \mathit{тогда} x = \dfrac{p^3+1}{p^2-1} = \dfrac{(p+1)(p^2-p+1)}{(p+1)(p-1)} = \dfrac{p^2-p+1)}{p-1}$

Ответ: $\mathit{если}\ p=1, \mathit{то}\ x \in \varnothing$

$\mathit{если}\ p=-1, \mathit{то}\ x \in \mathrm{R}$

$\mathit{если}\ p=\pm 1, \mathit{то}\ x = \dfrac{p^2-p+1}{p-1}$

Задача 4

- Для всех значений параметров а и в решить уравнение

$$(a-2)=4a+3в$$

Решение: 1)

Если $a=2,\ уравнение\ имеет\ вид\ 0*x=8+3в$, то это равенство ни при каком x не выполняется, $8+3в\neq 0,\ т.е.\ в\neq-\frac{8}{3}$, поэтому

$$x\in\varnothing$$

Если

$$в=-\frac{8}{3},то\ 0*x=0,\Rightarrow x\in\mathrm{R}$$

2)

$$a-2\neq 0\Leftrightarrow a\neq 2,тогда\ x=\frac{4a+3в}{a-2}.$$

Ответ:

$$если\ a=2,в\neq-\frac{8}{3},то\ x\in\varnothing\ ;$$

$$если\ a=2,в=-\frac{8}{3},то\ x\in\mathrm{R};$$

$$если\ a\neq 2,в-любое число,то\ x=\frac{4a+3в}{a-2}$$

Повторение- мать учения!

- [«Линейные уравнения с параметром»]

Тест-тренинг:

- «Линейные уравнения с параметром»

С.Р.№2. Решить самостоятельно

1) *Для всех значениий параметра а решите уравнения*:

$a)\ a(x-2)=4(x+2)$

$б)\ \dfrac{a}{2a-x}=\dfrac{3a-2}{a+1}$

$в)\ a^2(1-x)+2a+4x=0$

2) *Найти все значения параметра а, при каждом из которых число* -3 *является единственным корнем уравнения*

$a^2x+6a=4x-12.$

3) *При каких значениях параметра а уравнение* $\dfrac{1}{x-2a}=\dfrac{2}{ax-1}$ *имеет положительные корни*?

Уроки 6-7

Линейные неравенства с параметром

- **Неравенства вида**
  , где **A** и **B** - действительные числа или выражения, зависящие от параметров, а **x** - неизвестное, называются **линейными неравенствами.**
- **Решить неравенство с параметрами-** значит для всех значений параметров найти множество решений заданного неравенства.

Задача 1

Для всех значений параметра а

решить неравенство $(к+4)x \le 2к-1$.

Решение. Запишем неравенство в стандартном виде : $(к+4)x + 2к - 1 \le 0$

1) $к+4 > 0 \Leftrightarrow к > -4$. *Тогда* $x \le \dfrac{1-2к}{к+4}$

2) $к+4 < 0 \Leftrightarrow к < -4$. *Тогда* $x \ge \dfrac{1-2к}{к+4}$

3) $к+4 = 0, \Leftrightarrow к = -4$. *Неравенство имеет вид* $0 * x \le 9$.

Это неравенство верно при любом x, *т.е.* $x \in \mathrm{R}$.

Ответ :

если $к > -4$, *то* $x \le \dfrac{1-2к}{к+4}$;

если $к < -4$, *то* $x \ge \dfrac{1-2к}{к+4}$;

если $к = -4$, *то* $x \in \mathrm{R}$.

Задача 2

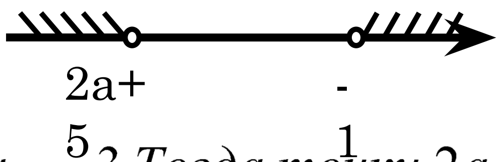
Найти область определения функции

$$f(x)=\sqrt{1+x}+\sqrt{2a+5-x}.$$

Решение. $\begin{cases}1+x\ge 0,\\ 2a+5-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ x\le 2a+5\end{cases}$

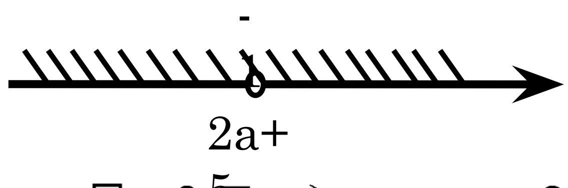
1) $2a+5<-1\Leftrightarrow a<-3$. *Тогда точка* $2a+5$ *находится левее точки* -1. *Тогда*

$D(f)=\varnothing$



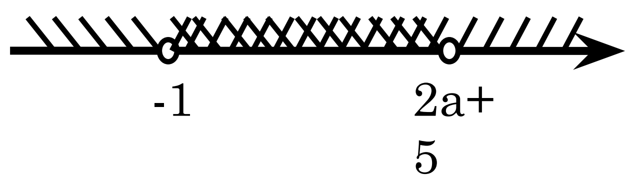
2) $2a+5=-1\Leftrightarrow a=-3$. *Тогда точки* $2a+5$ *и* -1 *совпадают.*

$D(f)=\{-1\}$.



3) $2a+5>-1\Leftrightarrow a>-3$. *Тогда точка* $2a+5$ *находится правее точки* -1.

Тогда $D(f)=[-1;2a+5]$



Ответ:

если $a<-3$, *то* $D(f)=\varnothing$

если $a=-3$, *то* $D(f)=\{-1\}$;

если $a>-3$, *то* $D(f)=[-1;2a+5]$

ЗАДАЧА 3

При каких значениях параметра m

неравенство $(m+1)x+m+4 \square 0$ *выполняется для всех* $x \in (-2;1]$

Решение.

1) *Если* $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1,$ *то неравенство имеет вид* $0 * x+3 \square 0 \Rightarrow x \in R.$

Следовательно, при $m=-1$ *для всех* $x \in (-2;1]$ *неравенство также выполняется.*

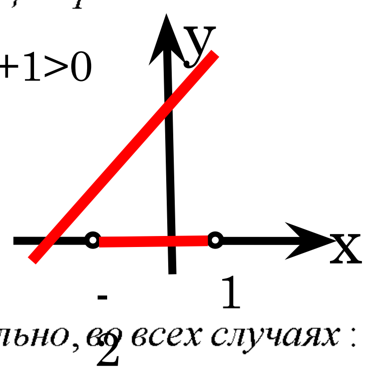
2) *Если* $m \neq -1,$ *то для выполнения условия задачи*

необходимо и достаточно, чтобы график линейной функции $f(x)=(m+1)x+m+4,$

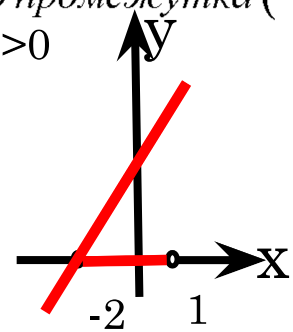
в зависимости от знака $m+1,$ *имел схематически одно из*

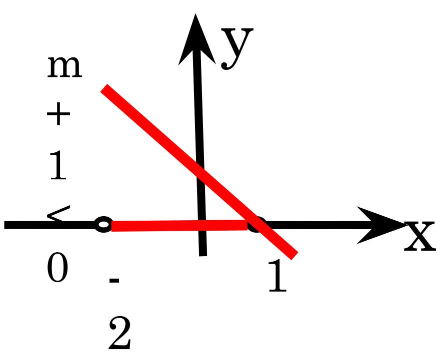
следующих расположений относительно промежутка $(-2;1]$

m+1>0



m+1>0





Следовательно, во всех случаях :

$$\begin{cases} f(-2) \geq 0. \\ f(1) \square 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m+2 \geq 0. \\ 2m+5 \square 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \square m \leq 2.$$

заметим, что значение $m=-1,$ *при котором условие задачи также выполняется,*

принадлежит промежутку $\left(-\frac{5}{2};2\right]$

Ответ : при $-\frac{5}{2} \square m \leq 2.$

Повторение- мать учения!

- Повторим!

Тест-тренинг

- «Линейные неравенства с параметром»

Урок 8
Это интересно!

- Изучи самостоятельно!

- Чат-форум по просмотренным презентациям.

С.Р.№3. Решить самостоятельно

Урок 9-10.

Некоторые рациональные уравнения и неравенства, сводящиеся к линейным

Задача 1. *Для всех значений параметра а решить уравнение*

$$\frac{(x-4a)(x+2a+3)}{x+3a}=0.$$

Решение. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x+3a\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x-4a=0, \\ x+2a+3=0, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -3a \\ \left[\begin{array}{l} x=4a, \\ x=-2a-3, \end{array}\right. \end{cases}$$

Возможны случаи:

1) $4a=-3a \Leftrightarrow a=0,$ *тогда система примет вид*

$$\begin{cases} x\neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=-3, \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x=-3$$

2) $-2a-3=-3a \Leftrightarrow a=3.$ *Тогда система примет вид*

$$\begin{cases} x\neq -9 \\ \left[\begin{array}{l} x=12, \\ x=-9, \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x=12$$

3) $x\neq 0$ *и* $a\neq 3.$ *Тогда* $4a=-3a$ *и* $-2a-3=-3a,$

поэтому уравнение имеет два решения: $x=4a$ *и* $x=-2a-3$

Ответ:

если $a=0,$ *то* $x=-3,$

если $a=3,$ *то* $x=12,$

если $x\neq 0$ *и* $a\neq 3,$ *то* $x\in\{4a;-2a-3\}.$

Задача 2.Для всехзначений параметра а решить неравенство

$$\frac{x+2a-1}{(x+2-a)^2}\le 0.$$

Решение. Уравнение равносильно системе :

$$\begin{cases} x+2a-1\le 0 \\ x+2-a\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1-2a \\ x\ne a-2. \end{cases}$$

Возможны случаи : $1)\ 1-2a<a-2 \Leftrightarrow a>1,$ *тогда рисунок*

Отсюда $x\le 1-2a$

$2)\ 1-2a=a-2\Leftrightarrow a=1,$ *тогда рисуенок*

Отсюда $x<a-2,$ *т.к.* $a-2=1-2=-1,$ *то* $x<-1.$

$3)\ 1-2a>a-2\Leftrightarrow a<1,$ *тогда римс.*

Отсюда $x\in(-\infty;a-2)\cup(a-2;1-2a]$

Ответ :

если $a<1,$ *то* $x\in(-\infty;a-2)\cup(a-2;1-2a];$

если $a=1,$ *то* $x\in(-\infty;-1);$

если $a>1,$ *то* $x\in(-\infty;1-2a].$

С.Р.№4. Решить самостоятельно

1.*Для всех значений параметра p решить неравенство*

$$(x-3+p)^2(x-1+2p)\ge 0;$$

2) *Для всех значений параметра a решить неравенство*

$$\frac{a}{x+1}\ge -1$$

3) *Для всех значений параметра a решить уравнение*

$$a)\ \frac{x^2-5x+6}{x+a+1}=0$$

$$б)\ \frac{(a+2)x+2a}{x^2-x-2}=-1$$

Вопросы

- 1)Что значит решить уравнение с параметром?
- 2)Какой вид имеет линейное уравнение?
- 3)Схема исследования линейного уравнения
- 4)Схема исследования линейного неравенства
- 5) Зачем надо знать ответы на эти вопросы?

Контрольная работа

Критерии оценивания контрольной работы

- Чтобы получить оценку**3**, достаточно правильно решить № 1,2
- Чтобы получить оценку **4**, достаточно правильно решить № 3,4.
- Чтобы получить оценку **5**,достаточно правильно решить №5,6.
- **Приветствуется, если решили все номера**.

Вопросы для форума(«круглый стол»)

- Имели ли вы представление о содержании данного курса?
- Не сожалеете ли вы, что выбрали данный элективный курс?
- Встречались ли вы раньше с заданиями, содержащими параметр?
- Испытывали ли вы затруднения в понимании смысла заданий, содержащих параметр, до изучения курса?
- Оказался ли вам полезен этот курс?
- Оцените уровень своих умений в выполнении заданий с параметрами после изучения курса:
- - задания не вызывают затруднений;
- - иногда затрудняюсь;
- - слабо ориентируюсь;
- - так ничего и не понял.
- Что, по-вашему, может способствовать лучшему усвоению курса?
- Хотели бы вы продолжить изучение различных способов решения задач с параметрами?

- Форум
- Подведение итогов