



ЭЛЕКТИВНЫЙ КУРС «РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ»

**Для предпрофильной подготовки
учащихся 8-9 классов**



Здравствуйте, дорогие ребята!

- Я рада приветствовать на своем курсе вас, любящих математику, интересующихся решением логических задач, желающих в будущем связать себя с царицей наук.***
- Я рада приветствовать всех тех ребят, кто заглянул сюда из-за любопытства, которые не определились с выбором профиля, может вам пригодятся полученные здесь знания при подготовке к ЕГЭ.***



- В своем курсе ДО я используем такие элементы обучения, как лекция, тест-тренинг, практические и самостоятельные работы, чаты и итоговую контрольную работу.
- Лекции (**У-1**) строятся по типу чередования страниц с теоретическим материалом и страниц с вопросами. Материал лекции строится таким образом, чтобы в основе обучения лежал деятельностный подход. То есть практически в каждом параграфе содержится какое-либо задание, которое выполняется совместно с учителем, либо самостоятельно.
- По завершении лекции учащиеся проходят тест-тренинг (**Тест «Найти параметр»** и т.д.), который помогает вам самим проверить, насколько вы усвоили пройденный материал, и повторить его. На выполнение таких тестов отводится неограниченное количество попыток с начислением или нет штрафных баллов за неправильные ответы.
- После прохождения лекционного тематического блока учащемуся предлагается выполнить самостоятельную работу, (которая не ограничена по времени) и отправить преподавателю на проверку (**СР № 1** и т.д.)



- Чат будет использоваться для вопросов –ответов, для обсуждения возникших в ходе выполнения самостоятельной работы вопросов. При этом в обсуждении принимают участие как преподаватель, так и другие ученики. **Мой skype: maina601**
- Данный блок (курс) завершится итоговой контрольной работой (КР) и круглым столом.



ТЕМЫ КУРСА:

- Что такое параметр?
- Примеры равенств с параметрами
- Равносильность уравнений
- Преобразования, при которых данное уравнение переходит в равносильное:
- Преобразования, при которых появляются уравнения – следствия
- Таблица равносильных преобразований

Уравнения и неравенства с параметрами

- 1. Линейные уравнения и уравнения, сводящиеся к ним.
- 2. Линейные неравенства и неравенства, сводящиеся к ним.
- 3. Некоторые рациональные неравенства и неравенства, сводящиеся к ним.



□ **Наши цели:**

- - знать, что такое параметр,
- - знать, что значит решить уравнение и неравенство с параметром;
- - уметь решать уравнения и неравенства с параметром;
- - уметь отличать в уравнениях и неравенствах параметр от неизвестных;
- - уметь выбирать и записывать ответ в уравнениях и неравенствах с параметрами.



УРОК 1.

ЧТО ТАКОЕ ПАРАМЕТР?

- Если в уравнение или неравенство наряду с неизвестной величиной входят неизвестные, но фиксированные числа, обозначаемые буквами, то они называются параметрами.
- Уравнение или неравенство называются параметрическими.

□



ПРИМЕРЫ РАВЕНСТВ С ПАРАМЕТРАМИ

- линейная функция $y=kx+b$, k, b - параметры, x, y - переменные;
- квадратичная функция $y= ax^2+bx+c$, где $a \neq 0$
 a, b, c -параметры, x, y –переменные;
- уравнение окружности с центром в начале координат имеет вид $x^2+y^2=r^2$, где x, y - координаты точек - переменные, r - радиус окружности – параметр.



ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА (СОВМЕСТНО С УЧИТЕЛЕМ)

СОСТАВЬТЕ УРАВНЕНИЕ С ПАРАМЕТРОМ, ЧТОБЫ:

- каждому значению параметра соответствовало единственное значение переменной x ;
- при любом значении параметра оно не имело корней;
- которое не имеет корней при всех $a < 0$;
- которое не имело корней при каком-то одном значении параметра, а при всех остальных его значениях имело бы корни;
- которое имело бы корни при одном значении параметра, а при всех остальных его значениях не имело бы корней.



ТЕСТ-ТРЕНИНГ.

Тест «Найти параметр»



УРОК 2-3.

РАВНОСИЛЬНОСТЬ УРАВНЕНИЙ

- **Определение 1.** Пусть имеются два уравнения $f(x)=g(x)$ и $f(x)=g(x)$.
- Если каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения, и каждый корень второго уравнения является корнем первого, то эти уравнения называют равносильными.
- **Пример.** Уравнения $3x=9$ и $\sqrt{3x+7}=4$ являются равносильными. Значение $x=3$ - их корень.
- Уравнения $x^4+7=0$ и $3x^2+8=0$ тоже равносильны, так как ни одно из них не имеет корней.
- **Определение 2.** Если каждый корень одного уравнения является корнем другого, то второе уравнение является следствием первого. (Из определения следует, что если два уравнения не являются следствием друг друга, то они равносильны).
- **Пример.** Уравнение $(x+2)(x-3)=0$ является следствием уравнения $2x=6$, так как число 3 является корнем второго уравнения, но не является корнем первого.



ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ПРИ КОТОРЫХ ДАННОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕХОДИТ В РАВНОСИЛЬНОЕ:



- 1. Слагаемое можно переносить из одной части уравнения в другую, изменяя знак на противоположный.
□ Пример. Уравнение $x^2+7=3x$ равносильно уравнению $x^2-3x+7=0$.
- 2. Если к обеим частям уравнения прибавить одно и то же число, то получится уравнение, равносильное данному.
□ Пример. Уравнение $9x-5=4$ равносильно $9x-1=0$.
- 3. Если обе части уравнения умножить на одно и то же число, отличное от нуля, то получится уравнение, равносильное данному.
□ Пример. Уравнение $2,5x+3,5=2$ равносильно $5x+7=4$.
- 4. Если обе части уравнения $f(x)=g(x)$ умножить или разделить на функцию $u=k(x)$ (для всех x выполняется $k(x) \neq 0$), то получится уравнение, равносильное данному.
□ Пример. Уравнение $4(x^2+1)^2 - (x^2+1)=0$ равносильно уравнению $(x^2+1)=$.



ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, ПРИ КОТОРЫХ ПОЯВЛЯЮТСЯ УРАВНЕНИЯ

– СЛЕДСТВИЯ:



□ 1. Освобождение от знаменателя.

□ Пример. Уравнение $\frac{1}{x+1} = \frac{x}{x^2+1}$ не равносильно уравнению $x^2+1=x(x-1)$, так как первое уравнение имеет только один корень -1 , а второе - два корня 1 и -1 .

□ 2. Возведение в одну и ту же чётную степень.

□ Пример. Уравнения $\sqrt{3-2x} = x$ и $x^2=3-2x$ не равносильны, т.к. первое уравнение имеет только один корень 1 , а второе - два корня 1 и -3 .

□ Каждое второе уравнение называют *следствием* первого. Переходя от одного уравнения к его следствию, мы не потеряем корней уравнения, но, возможно, приобретём лишние. Поэтому необходима проверка полученных его корней непосредственной подстановкой в исходное или составлением смешанной системы, включающей ограничения на то действие, которое изменило равносильность.



ПРАКТИЧЕСКАЯ РАБОТА (ЗАД.1-1,3,5; ЗАД.2-1,3-СОВМЕСТНО С УЧИТЕЛЕМ, ОСТАЛЬНОЕ- САМОСТОЯТЕЛЬНО)

- Задание 1. Какие из пар уравнений являются равносильными? Какое уравнение в парах является следствием другого?
- 1) $\frac{5x+6}{x-1} = \frac{4-2x}{x-1}$ и $5x+6=4-2x$.
- 2) $(x+3)^2=(4-x)^2$ и $|x+3|=|4-x|$
- 3) $\frac{9-x^2}{x+3} = 0$ и $9-x^2=0$.
- 4) $6x^2-11x+5=0$ и $x-\frac{5}{6}=0$.
- 5) $\sqrt{(x+5)(x+1)} = 0$ и $\sqrt{x-5} * \sqrt{x+1} = 0$
- 6) $3x-2=x$ и $(3x-2)\sqrt{x-4} = x\sqrt{x-4}$
- Задание 2. При каких значениях параметра a уравнения равносильны?
- 1) $5x-101=0$ и $(5x-101)(x_1^4 + a)=0$.
- 2) $2x-7+\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 3x-a+\frac{1}{\sqrt{1-x}}$ и $2x-7=3x-a$.
- 3) $\frac{16x^2-9}{x-a} = 0$ и $4x+3=0$.



- ОТВЕТЫ: 1. 1) Равносильны.
- 2) Равносильны.
- 3) Второе является следствием первого.
- 4) Первое является следствием второго.
- 5) Первое является следствием второго.
- 6) никакое из уравнений не является следствием другого.

- 2. 1) при $a > 0$;
- 2) при $a > 9$;
- 3) при $a = 3/4$.



С.Р.№1 **ТАБЛИЦА РАВНОСИЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ (ЗАПОЛНИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО, ПРИВЕСТИ ПРИМЕРЫ)**

| Преобразование | Исходное уравнение | Равносильное уравнение |
|--|--------------------|------------------------|
| Перенос слагаемых из одной части уравнения в другую | | |
| Алгебраическое сложение с одним и тем же числом | | |
| Умножение на одно и то же не равное нулю число | | |
| Умножение (деление) на одну и ту же не равную нулю функцию | | |

Таблица неравносильных преобразований

| Преобразование | Исходное уравнение | Уравнение - следствие |
|---|--------------------|-----------------------|
| Приведение подобных слагаемых | | |
| Возведение в одну и ту же натуральную степень | | |
| Освобождение от знаменателя | | |





Вопросы:

- 1) Что такое параметр?
- 2) Какие уравнения называются равносильными?
- 3) Какие уравнения называют уравнениями-следствиями?
- 4) Какие преобразования приводят к равносильным уравнениям?
- 5) Какие преобразования приводят к уравнениям - следствиям?



- Работа в skype
- чат-форум по вопросам к урокам 1-3



УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРАМИ

- 1. Линейные уравнения и уравнения, сводящиеся к ним.
- 2. Линейные неравенства и неравенства, сводящиеся к ним.
- 3. Некоторые рациональные неравенства и неравенства, сводящиеся к ним.



УРОКИ 4-5

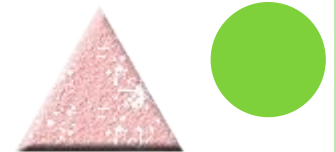
ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Уравнение вида

$$A x = B, (1)$$

где A , B – выражения, зависящие от параметров,
 x – неизвестное, называется **линейным
уравнением с параметрами**.

Решить уравнение с параметрами – значит для всех значений параметров найти множество корней заданного уравнения.





ЗАМЕЧАНИЯ:

- Если линейное уравнение или уравнение, сводящееся к линейному, не представлено в виде (1), то сначала его нужно привести к виду (1) (стандартному виду) и только после этого проводить исследование.
- Если для каких-нибудь значений параметров уравнение не имеет смысла, то для этих значений параметров множество решений уравнения пусто. Кроме этого, уравнение может иметь пустое множество решений и при других значениях параметров.



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ

- ▣ **Задача 1.** Для всех значений параметра k решить уравнение:
 $(k+4)x=2k+1$

Решение: Уравнение уже записано в стандартном виде (1), поэтому проведем исследование по указанной выше схеме:

- 1) Если $k+4=0$, т.е. $k=-4$, имеем $0 \cdot x = -7$, то уравнение не имеет решений.
- 2) Если $k+4 \neq 0$, т.е. $k \neq -4$, то $x = (2k+1)/(k+4)$

Ответ: если $k=-4$, то $x \in \emptyset$
если $k \neq -4$, то $x = (2k+1)/(k+4)$

- ▣ **Задача 2.** Для всех значений параметра a решить уравнение $(\frac{3}{4}a-1)x - 3a+4 = 0$

Запишем уравнение в стандартном виде $(\frac{3}{4}a-1)x = 3a-4$

1) $\frac{3}{4}a-1=0$, то $a=4/3$. Тогда уравнение имеет вид $0 \cdot x = 0$
Это равенство верно при любом x . Значит решением уравнения будет все множество действительных чисел, т.е. $x \in \mathbb{R}$.

2) $\frac{3}{4}a - 1 \neq 0$, то $a \neq 4/3$. Тогда $x = (4-3a)/(\frac{3}{4}a-1) = -4$

Ответ: если $a=4/3$, то $x \in \mathbb{R}$.

если $a \neq 4/3$, то $x = -4$



ЗАДАЧА 3

□ Для всех значений параметра p решить уравнение

$$(p^2 - 1)x = p^3 + 1$$

Решение: 1) $p^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow p = \pm 1$.

1) при $p=1$ уравнение имеет вид $0 \cdot x = 2 \Rightarrow x \in \emptyset$

при $p=-1$ уравнение имеет вид $0 \cdot x = 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$

$$2) p^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow p \neq \pm 1, \text{ тогда } x = \frac{p^3 + 1}{p^2 - 1} = \frac{(p+1)(p^2 - p + 1)}{(p+1)(p-1)} = \frac{p^2 - p + 1}{p-1}$$

Ответ: если $p = 1$, то $x \in \emptyset$

если $p = -1$, то $x \in \mathbb{R}$

$$\text{если } p = \pm 1, \text{ то } x = \frac{p^2 - p + 1}{p-1}$$



ЗАДАЧА 4

□ Для всех значений параметров a и v решить уравнение

$$(a - 2)x = 4a + 3v$$

Решение: 1)

Если $a = 2$, уравнение имеет вид $0 \cdot x = 8 + 3v$, то это равенство ни при каком x не выполняется, поэтому

Если

$$x \in \emptyset$$

$$v = -\frac{8}{3}, \text{ то } 0 \cdot x = 0, \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

2)

Ответ: $-2 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 2$, тогда $x = \frac{4a + 3v}{a - 2}$.

если $a = 2$, $v \neq -\frac{8}{3}$, то $x \in \emptyset$;

если $a = 2$, $v = -\frac{8}{3}$, то $x \in \mathbb{R}$;

если $a \neq 2$, v – любое число, то $x = \frac{4a + 3v}{a - 2}$

ПОВТОРЕНИЕ- МАТЬ УЧЕНИЯ!

- «Линейные уравнения с параметром»

Тест-тренинг:

- «Линейные уравнения с параметром»



С.Р.№2. РЕШИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1) Для всех значений параметра a решите уравнения:

а) $a(x - 2) = 4(x + 2)$ в) $a^2(1 - x) + 2a + 4x = 0$

б) $\frac{a}{2a - x} = \frac{3a - 2}{a + 1}$

2) Найти все значения параметра a ,
при каждом из которых число -3 является
единственным корнем уравнения

$$a^2x + 6a = 4x - 12.$$

3) При каких значениях параметра a

уравнение $\frac{1}{x - 2a} = \frac{2}{ax - 1}$

имеет положительные корни?



Уроки 6-7

ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРОМ

□ Неравенства вида

, где **A** и **B** - действительные числа или выражения, зависящие от параметров, а **x** - неизвестное, называются **линейными неравенствами**.

□ **Решить неравенство с параметрами**- значит для всех значений параметров найти множество решений заданного неравенства.





ЗАДАЧА 1

Для всех значений параметра a

решить неравенство $(k + 4)x \leq 2k - 1$.

Решение. Запишем неравенство в стандартном виде: $(k + 4)x + 2k - 1 \leq 0$

$$1) k + 4 > 0 \Leftrightarrow k > -4. \text{ Тогда } x \leq \frac{1 - 2k}{k + 4}$$

$$2) k + 4 < 0 \Leftrightarrow k < -4. \text{ Тогда } x \geq \frac{1 - 2k}{k + 4}$$

$$3) k + 4 = 0, \Leftrightarrow k = -4. \text{ Неравенство имеет вид } 0 \cdot x \leq 9.$$

Это неравенство верно при любом x , т.е. $x \in \mathbb{R}$.

Ответ:

$$\text{если } k > -4, \text{ то } x \leq \frac{1 - 2k}{k + 4};$$

$$\text{если } k < -4, \text{ то } x \geq \frac{1 - 2k}{k + 4};$$

$$\text{если } k = -4, \text{ то } x \in \mathbb{R}.$$



ЗАДАЧА 2


Найти область определения функции

$$f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{2a+5-x}.$$

Решение. $\begin{cases} 1+x \geq 0, \\ 2a+5-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 2a+5 \end{cases}$

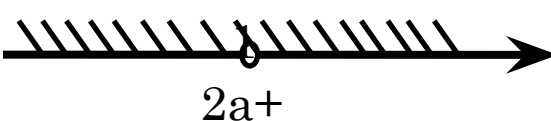
1) $2a+5 < -1 \Leftrightarrow a < -3$. Тогда точка $2a+5$ находится левее точки -1 . Тогда

$D(f) = \emptyset$




2) $2a+5 = -1 \Leftrightarrow a = -3$. Тогда точки $2a+5$ и -1 совпадают.

$D(f) = \{-1\}$.



3) $2a+5 > -1 \Leftrightarrow a > -3$. Тогда точка $2a+5$ находится правее точки -1 .

Тогда $D(f) = [-1; 2a+5]$



Ответ :

если $a < -3$, то $D(f) = \emptyset$

если $a = -3$, то $D(f) = \{-1\}$;

если $a > -3$, то $D(f) = [-1; 2a+5]$



ЗАДАЧА 3

При каких значениях параметра m

неравенство $(m+1)x + m + 4 \geq 0$ выполняется для всех $x \in (-2; 1]$

Решение.

1) Если $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$, то неравенство имеет вид $0 \cdot x + 3 \geq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R}$.

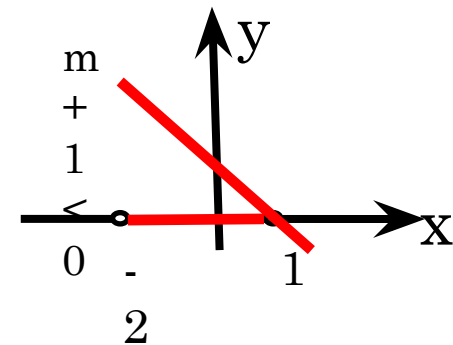
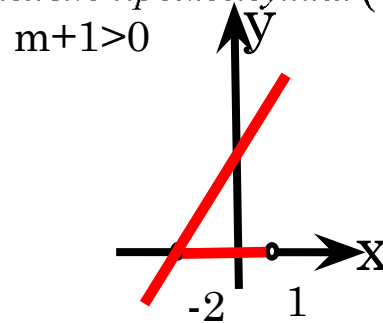
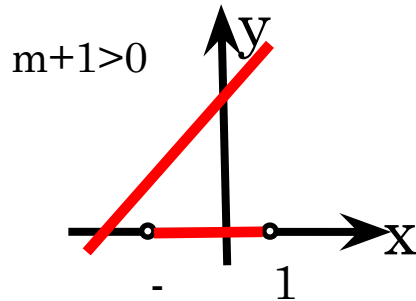
Следовательно, при $m=-1$ для всех $x \in (-2; 1]$ неравенство также выполняется.

2) Если $m \neq -1$, то для выполнения условия задачи

необходимо и достаточно, чтобы график линейной функции $f(x) = (m+1)x + m + 4$,

в зависимости от знака $m+1$, имел схематически одно из

следующих расположений относительно промежутка $(-2; 1]$



Следовательно, во всех случаях:

$$\begin{cases} f(-2) \geq 0. \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m + 2 \geq 0. \\ 2m + 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{2} \leq m \leq 2.$$

заметьте, что значение $m = -1$, при котором условие задачи также выполняется,

принадлежит промежутку $\left[-\frac{5}{2}; 2\right]$

Ответ : при $-\frac{5}{2} \leq m \leq 2$.

ПОВТОРЕНИЕ- МАТЬ УЧЕНИЯ!

□ Повторим!

Тест-тренинг

□ «Линейные неравенства с параметром»



УРОК 8

ЭТО ИНТЕРЕСНО!

- Изучи самостоятельно!



- Чат-форум по просмотренным презентациям.



С.Р.№3. РЕШИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО



УРОК 9-10.

НЕКОТОРЫЕ РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА, СВОДЯЩИЕСЯ К ЛИНЕЙНЫМ

Задача 1. Для всех значений параметра a решить уравнение

$$\frac{(x-4a)(x+2a+3)}{x+3a} = 0.$$

Решение. Уравнение равносильно системе :

$$\begin{cases} x+3a \neq 0 \\ x-4a=0, \\ x+2a+3=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -3a \\ x=4a, \\ x=-2a-3, \end{cases}$$

Возможны случаи :

1) $4a = -3a \Leftrightarrow a = 0$, тогда система примет вид

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x=0, \Rightarrow x=-3 \\ x=-3, \end{cases}$$

2) $-2a-3 = -3a \Leftrightarrow a = 3$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} x \neq -9 \\ x=12, \Rightarrow x=12 \\ x=-9, \end{cases}$$

3) $x \neq 0$ и $a \neq 3$. Тогда $4a = -3a$ и $-2a-3 = -3a$,

поэтому уравнение имеет два решения: $x = 4a$ и $x = -2a-3$

Ответ :

если $a = 0$, то $x = -3$,

если $a = 3$, то $x = 12$,

если $x \neq 0$ и $a \neq 3$, то $x \in \{4a; -2a-3\}$.



Задача 2. Для всех значений параметра a решить неравенство

$$\frac{x+2a-1}{(x+2-a)^2} \leq 0.$$

Решение. Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x+2a-1 \leq 0 \\ x+2-a \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1-2a \\ x \neq a-2. \end{cases}$$

Возможны случаи: 1) $1-2a \geq a-2 \Leftrightarrow a \leq 1$, тогда рисунок

Отсюда $x \leq 1-2a$

2) $1-2a = a-2 \Leftrightarrow a = 1$, тогда рисунок

Отсюда $x \geq a-2$, т.к. $a-2 = 1-2 = -1$, то $x \geq -1$.

3) $1-2a < a-2 \Leftrightarrow a > 1$, тогда рисунок.

Отсюда $x \in (-\infty; a-2) \cup (a-2; 1-2a]$

Ответ:

если $a \leq 1$, то $x \in (-\infty; a-2) \cup (a-2; 1-2a]$;

если $a = 1$, то $x \in (-\infty; -1]$;

если $a > 1$, то $x \in (-\infty; 1-2a]$.



С.Р.№4. РЕШИТЬ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Для всех значений параметра p решить неравенство

$$(x - 3 + p)^2 (x - 1 + 2p) \geq 0;$$

2) Для всех значений параметра a решить неравенство

$$\frac{a}{x+1} \geq -1$$

3) Для всех значений параметра a решить уравнение

$$a) \frac{x^2 - 5x + 6}{x + a + 1} = 0$$

$$б) \frac{(a + 2)x + 2a}{x^2 - x - 2} = -1$$



Вопросы

- 1)Что значит решить уравнение с параметром?
- 2)Какой вид имеет линейное уравнение?
- 3)Схема исследования линейного уравнения
- 4)Схема исследования линейного неравенства
- 5) Зачем надо знать ответы на эти вопросы?



КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА



КРИТЕРИИ ОЦЕНИВАНИЯ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ

- Чтобы получить оценку **3**, достаточно правильно решить № 1,2
- Чтобы получить оценку **4**, достаточно правильно решить № 3,4.
- Чтобы получить оценку **5**, достаточно правильно решить №5,6.
- **Приветствуется, если решили все номера.**





ВОПРОСЫ ДЛЯ ФОРУМА («КРУГЛЫЙ СТОЛ»)

- **Имели ли вы представление о содержании данного курса?**
- **Не сожалеете ли вы, что выбрали данный элективный курс?**
- **Встречались ли вы раньше с заданиями, содержащими параметр?**
- **Испытывали ли вы затруднения в понимании смысла заданий, содержащих параметр, до изучения курса?**
- **Оказался ли вам полезен этот курс?**
- **Оцените уровень своих умений в выполнении заданий с параметрами после изучения курса:**
 - - задания не вызывают затруднений;
 - - иногда затрудняюсь;
 - - слабо ориентируюсь;
 - - так ничего и не понял.
- **Что, по-вашему, может способствовать лучшему усвоению курса?**
- **Хотели бы вы продолжить изучение различных способов решения задач с параметрами?**



- Форум
- Подведение итогов

