Электронное пособие для решения задач на принцип Дирихле

Составила Амиева Анастасия
ученица 10А класса
МОУ СОШ № 128

Содержание

ИТОРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Дирихле Петер Густав Лежен (13.2.1805-5.5. 1859) - немецкий математик. Родился в Дюрене.

В 1822-1827гг. был домашним учителем в Париже. Входил в кружок молодых ученых, которые группировались вокруг Ж. Фурье.

В 1827 занял место доцента в Бреславе; с 1829 работал в Берлине.

В 1831-1855гг.- профессор Берлинского университета, после смерти К.Гаусса (1855г.) - Гёттингенского университета.

Принцип Дирихле (в честь немецкого математика П.Г.Л.Дирихле). По традиции принцип Дирихле почему-то объясняют на примере кроликов в клетках: если общее число кроликов больше числа клеток, в одной из клеток наверняка сидит более одного кролика. Этим принципом в неявном виде пользовался, например, Ферма в XVII веке; но широко применяться в доказательствах он стал лишь с прошлого века! Несмотря на свою простоту, это рассуждение оказалось чрезвычайно плодотворным.

С именем Дирихле связаны задача, интеграл (ввел интеграл с ядром Дирихле), принцип, характер, ряды. Лекции Дирихле имели огромное влияние на выдающихся математиков более позднего времени, в том числе на Г.Римана, Ф. Эйзенштейна, Л.Кронекера, Ю.Дедекинда.

С помощью принципа Дирихле обоснованы многие теоремы из теории чисел

Содержание Дальше

Теоретическая часть

При решении многих задач используется логический метод рассуждения — "от противного". Рассмотрим одну из его форм — принцип Дирихле.

Этот принцип утверждает, что *если множество из N элементов разбито на n непересекающихся частей, не имеющих общих элементов, где N>n то, по крайней мере, в одной части будет более одного элемента.*

Принцип назван в честь немецкого математика Дирихле (1805-1859), который успешно применял его к доказательству арифметических утверждений. Этот принцип часто является хорошим средством при доказательстве важнейших теорем в теории чисел, алгебре, геометрии.

Наиболее часто принцип Дирихле формулируется в одной из следующих форм:

Если пять “кроликов” помещены в четыре “клетки”, то в одной из клеток находятся не менее двух “кроликов”; или, другими словами, нельзя посадить пять “кроликов” в четыре клетки так, чтобы в каждой клетке находилось не более одного “кролика”.

В более общей форме этот принцип выглядит так:

Если (n+1) “кролик” помещен в n “клетках”, то имеется “клетка”, в которой находятся не менее двух “кроликов”.

Принцип Дирихле можно сформулировать так:

Если (2n+1) “кроликов” помещены в n “клетках”, то по крайней мере, в одной “клетке” находятся не менее трех “кроликов”.

Более общая форма принципа Дирихле, включающая все предыдущие, такова:

Если (kn+1) “кролик” помещен в n “клетках”, то в одной из “клеток” находятся не менее (k+1) “кролика”; или в эквивалентной форме – нельзя посадить (kn+1) “кролика” в n клеток так, чтобы в каждой “клетке” находилось не более k “кроликов”.

Дальше

В литературе этот принцип также встречается под названиями: "принцип ящиков и объектов", "принцип коробок и предметов", "принцип зайцев и клеток".

Если мы хотим применить принцип Дирихле при решении конкретной задачи, то нам предстоит разобраться, что в ней — "клетки", а что — "зайцы". Это обычно является самым трудным этапом в доказательстве. Заметим, что в роли “зайцев” могут выступать различные предметы и математические объекты - числа, отрезки, места в таблице и т. д.

Несмотря на совершенную очевидность этого принципа, его применение является весьма эффективным методом решения задач, дающим во многих случаях наиболее простое и изящное решение. Однако во всех этих задачах часто нелегко догадаться, что считать "зайцем", что - "клеткой", и как использовать наличие двух "зайцев", попавших в одну "клетку". С помощью принципа Дирихле обычно доказывается существование некоторого объекта, не указывая, вообще говоря, алгоритм его нахождения или построения. Это даёт так называемое неконструктивное доказательство - мы не можем сказать, в какой именно клетке сидят два “зайца”, а знаем только, что такая “клетка” есть.

Приводимые ниже теоремы и задачи показывают, что природа "зайцев" и "клеток" в различных задачах может сильно отличаться друг от друга.

Принцип Дирихле можно сформулировать в виде различных утверждений.

Дальше

У1. Если в n клетках сидят не более n-1 «кроликов», то есть пустая клетка.

Также доказывается от противного (как и все последующие пункты): если пустой клетки нет, то в каждой клетке сидит хотя бы 1 «кролик». Тогда ««кроликов» не меньше, чем клеток?! Значит, пустая клетка есть.

У2. Если в n клетках сидят n + 1 «кроликов», то есть *клетка, в которой не менее 2-х* «кроликов». Действительно, если не в каждой клетке сидит ровно 1 «кролик», то либо (а) есть пустая клетка, либо (б) есть клетка, в которой не менее 2-х ««кроликов». В случае (а) у нас n ««кроликов» оказываются рассаженными в n-1 клеток, поэтому, по принципу Дирихле, есть *и клетка*, в которой *не менее 2-х* «кроликов» ч.т.д. В случае (б) у нас не более n-2 оставшихся «кроликов» оказываются рассаженными в n-1 клеток, следовательно, по п.1, есть *и пустая клетка* .

У3. Если в n клетках сидят *не более nk-1* «кроликов», то в какой-то из клеток сидят *не более k-1* «кроликов». Действительно, если в каждой клетке сидит не менее k+1 «кролика», то во всех клетках сидит не менее n(k+1) «кроликов», а их хотя бы на 1 меньше?!

У4. Если в n клетках сидят *не менее n k+1* «кроликов», то в какой-то из клеток сидят *не менее k+1* «кроликов». Действительно, если в каждой клетке сидит не более k-1 ««кролик»а», то во всех клетках сидит не более n(k-1) ««кроликов», а их хотя бы на 1 больше?!

Дальше

У5. Непрерывный принцип Дирихле. Как правило, этот принцип применяется для нескольких чисел и их суммы. В общем виде для чисел он выглядит следующим образом:
"Если сумма n чисел больше S, то по крайней мере одно из этих чисел больше S/n".

По-другому его можно сформулировать так:
"Если среднее арифметическое нескольких чисел больше a, то хотя бы одно из этих чисел больше a"; или в терминах "зайцев":
"Если n ««кролик»ов» съели m кг травы, то какой-то «кролик» съел не меньше m/n кг травы".

У6. "Если сумма n чисел меньше S, то по крайней мере одно из этих чисел меньше S/n".

У7. "Среди $p + 1$ целых чисел найдутся два числа, дающие при делении на p один и тот же остаток".

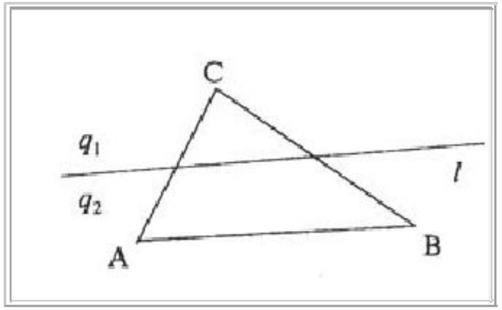
При делении с остатком на p может встретиться конечное число различных остатков: 0, 1, 2, . . . , p-1. Они то и играют здесь роль "клеток", а сами целые числа являются "зайцами". Так как чисел ("зайцев") больше, чем остатков ("клеток"), то хотя бы два числа "сидят в одной клетке", т.е. имеют одинаковые остатки при делении на p. Рассмотрим классические примеры.

Содержание Дальше

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Задача 1. Доказать, что если прямая l, расположенная в плоскости треугольника ABC, не проходит ни через одну из его вершин, то она не может пересечь все три стороны треугольника.

Решение



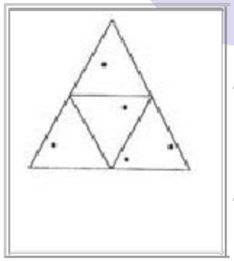
Полуплоскости, на которые прямая l разбивает плоскость треугольника ABC, обозначим через q_1 и q_2; эти полуплоскости будем считать открытыми (то есть не содержащими точек прямой l). Вершины рассматриваемого треугольника (точки A, B, C) будут "зайцами", а полуплоскости q_1 и q_2 - "клетками". Каждый "заяц" попадает в какую-нибудь "клетку" (ведь прямая l не проходит ни через одну из точек A, B, C). Так как "зайцев" три, а "клеток" только две, то найдутся два "зайца", попавшие в одну "клетку"; иначе говоря, найдутся такие две вершины треугольника ABC, которые принадлежат одной полуплоскости.

Пусть, скажем, точки A и B находятся в одной полуплоскости, то есть лежат по одну сторону от прямой l. Тогда отрезок AB не пересекается с l. Итак, в треугольнике ABC нашлась сторона, которая не пересекается с прямой l.

Дальше

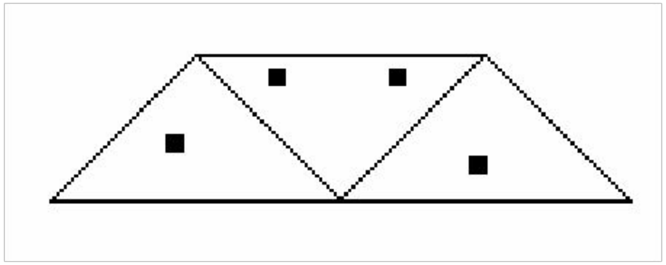
Задача 2. Внутри равностороннего треугольника со стороной 1 расположено 5 точек. Доказать, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше 0,5.

Решение



Средние линии правильного треугольника со стороной 1 разбивают его на четыре правильных треугольничка со стороной 0,5. Назовём их "клетками", а точки будем считать "зайцами". По принципу Дирихле из пяти точек хотя бы две окажутся в одном из четырёх треугольничков. Расстояние между этими точками меньше 0,5, поскольку точки не лежат в вершинах треугольничков. (Здесь использована известная лемма о том, что длина отрезка, расположенного внутри треугольника, меньше длины его наибольшей стороны.)

Задача 3. Внутри равнобедренной трапеции со стороной 2 расположено 4 точек. Доказать, что расстояние между некоторыми двумя из них меньше 1.

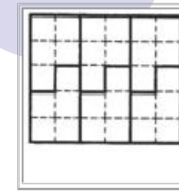


Решение. Разобьем трапецию со стороной 2 на три треугольника со стороной 1. Назовем их «клетками», а точки – «зайцами». По принципу Дирихле из четырех точек хотя бы две окажутся в одном из трех треугольников. Расстояние между этими точками меньше 1, поскольку точки не лежат в вершинах треугольников.

Дальше

Задача 4 . В прямоугольнике 5×6 закрашено 19 клеток. Докажите, что в нём можно выбрать квадрат 2×2, в котором закрашено не менее трёх клеток.

Решение



Разделим прямоугольник на 6 частей по 5 клеток. Согласно принципу Дирихле в одной из этих частей будет закрашено не менее 4 клеток. Тогда в квадрате 2×2, содержащемся в этой части, закрашено либо 3, либо 4 клетки. Это и будет искомый квадрат.

Задача 5. В единичный квадрат бросили 33 точки. Доказать, что какие-то три из них можно накрыть кругом радиуса $\frac{1}{6}$.

Решение. Разобьём данный квадрат на 16 одинаковых квадратиков ("клеток") со стороной $\frac{1}{4}$. В один из них попадёт не менее трёх точек ("зайцев"). Окружность, описанная около квадратика со стороной $\frac{1}{4}$, имеет радиус $\sqrt{\frac{1}{32}} > \sqrt{\frac{1}{36}} = \frac{1}{6}$, поэтому этот квадратик можно накрыть кругом радиуса $\frac{1}{6}$.

Задача 6. В ковре размером 3х3м Коля проделал 8 дырок. Докажите, что из него можно вырезать коврик размером 1х1м, не содержащий внутри себя дырок. (Дырки можно считать точечными).

В данной задаче необходимо применить другую формулировку принципа Дирихле: «Пусть в n “клетках” сидят m “зайцев”, причём n>m. Тогда найдётся хотя бы одна пустая “клетка”». Посмотрим, как эту формулировку принципа Дирихле можно применить при решении данной задачи.

Решение. Здесь дырки будут “зайцами”. Разрежем ковёр на 9 ковриков размерами 1х1м. Так как ковриков – “клеток” - 9, а дырок- “зайцев” - 8, то найдётся хотя бы одна “клетка”, в которой не будет “зайцев”, то есть найдётся коврик без дырок внутри.

Содержание

Дальше

ЗАДАЧИ НА ПАРЫ

Задача1. В классе мальчиков больше чем девочек. Доказать, что хотя бы за одной партой сидят два мальчика, если число учащихся в классе чётное и за каждой партой сидит два ученика.

Решение. Число занятых парт равно половине числа учащихся, будем считать, что число “кроликов” равно числу мальчиков, число клеток равно числу парт, “кроликов” больше чем “клеток”, значит есть “клетка” в которой сидит не менее двух “кроликов”. Значит есть парта за которой сидят два мальчика.

Задача 2. В танцевальном кружке 16 детей, девочек больше чем мальчиков. Доказать, что при исполнении вальса какие то две девочки будут танцевать вместе.

Решение. Число пар – число “клеток”, число девочек – число “кроликов”, так как, “кроликов” больше чем клеток, значит есть клетка в которой сидит не менее двух “кроликов”. Значит есть пара в которой танцуют две девочки,

Задача 3. На планете в звездой системе Тау Кита суша занимает больше половины площади. Доказать, что таукитяне смогут прорыть прямой туннель через центр планеты так, чтобы он соединял сушу с сушей..

Решение. Будем считать “кроликами” точки суши, а клетками - пары диаметрально противоположных точек планеты. Количество “кроликов” в данном случае - это площадь суши, а количество “клеток” - *половина* площади планеты. Поскольку площадь суши больше половины площади планеты, то "кроликов" больше, чем “клеток". Тогда есть клетка, в которой сидит не менее двух “кроликов”, т.е. пара противоположных точек, обе из которых - суша. Эти точки и надо соединить туннелем.

Дальше

Задача 4 . За круглым столом сидят 100 человек, причем более половины из них - рыцари. Доказать, что какие-то два рыцаря сидят напротив друг друга

Решение. Будем считать “кроликами” рыцарей, а “клетками” - пары диаметрально противоположных мест за столом. “Клеток” тогда ровно половина от числа мест за столом (т.е. 50), а “кроликов” - строго больше. Тогда есть “клетка”, в которой сидит не менее двух “кроликов”, т.е. пара противоположных мест, за которыми сидят два рыцаря. Они и есть искомые.

Задача 5. На планете Земля океан занимает больше половины площади поверхности. Докажите, что в мировом океане можно указать две диаметрально противоположные точки.

Решение. Будем считать “кроликами” точки океана, а “клетками” - пары диаметрально противоположных точек планеты. Количество “кроликов” в данном случае - это площадь океана, а количество “клеток” - ***половина*** площади планеты. Поскольку площадь океана больше половины площади планеты, то “кроликов” больше, чем “клеток”. Тогда есть “клетка”, в которой сидит не менее двух “кроликов”, т.е. пара противоположных точек, обе из которых - океан.

Содержание Дальше

ЗАДАЧИ НА ЗНАКОМСТВА, ДАТЫ РОЖДЕНИЙ

Задача 1. В доме живут 40 учеников. Существует ли такой месяц в году, когда хотя бы 4 ученика празднуют свой день рождения.

Решение. Пусть "коробками" будут месяцы, а "предметами" - ученики. Распределяем, "предметы" по "коробкам" в зависимости от месяца рождения. Так как число месяцев, то есть, "коробок", равно 12, а число учеников, то есть, "предметов" $40 = 12 \cdot 3+4$, согласно принципу Дирихле существует "коробка" (месяц) с по крайней мере $3+1=4$ "предметами" (учениками).

Задача 2. В школе 400 учеников. Докажите, что хотя бы двое из них родились в один день года.

Решение. Всего в году 365 дней. Назовём дни "коробками", а учеников "кроликами", тогда в некоторой коробке сидят не меньше двух "кроликов". Значит хотя бы два ученика родились в один день.

Задача 3. В классе 34 ученика. Можно ли утверждать, что среди них найдутся хотя бы два ученика, фамилии которых начинаются с одной буквы?

Решение. В алфавите 33 буквы, значит "клеток" (число букв) больше, чем "зайцев" (число учеников), поэтому найдется хотя бы одна "клетка" в которой два "зайца". Найдутся хотя бы два ученика фамилии которых начинаются с одной буквы.

Дальше

Задача 4. В хвойном лесу растут 800000 елей. На каждой ели - не более 500000 иголок. Доказать, что существуют хотя бы две ели с одинаковым числом иголок.

Решение. Число “клеток” – 500000 (на каждой ели может быть от 1 иголки до 500000 иголок, 800000 ели – число “кроликов”, так как, “кроликов” больше чем клеток, значит есть клетка в которой сидит не менее двух “кроликов”. Значит существуют хотя бы две ели с одинаковым числом иголок.

Задача5. В походе участвовало 22 человек, каждому из которых было от 24 до 30 полных лет (на данный день). Докажите, что найдутся четыре человека, родившихся в один год.

Решение. Различных годов рождения может быть 7, будем считать их “клетками”, 22 участников похода - “кроликами”, "кроликов” больше, чем “клеток". Если (3·7+1) “кролик” помещен в 7 “клетках”, то в одной из “клеток” находятся не менее (3+1) “кролика”, значит найдутся четыре человека, родившихся в один год.

Задача 6 . В классе 25 человек. Известно, что среди любых трёх из них есть двое друзей. Докажите, что есть ученик, у которого не менее 12 друзей.

Решение. Выберем любых двух учеников класса, которые не дружат между собой. (Если таких нет, то все ученики класса дружат между собой, значит, у каждого имеется 24 друга, и задача решена.) Из оставшихся 23 учеников каждый дружит с одним из этих двух, иначе мы имели бы тройку учеников, среди которых не было бы друзей. Тогда у одного из выбранных двух учеников не менее 12 друзей. (23 "зайца" рассажены в двух "клетках".)

Содержание Дальше

ЗАДАЧИ НА СРЕДНЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ

Задача 1. 7 учеников за олимпиадные задания набрали 114 баллов. Докажите, что среди них есть ученик, набравший более 16 баллов.

Решение. Число "клеток" –7(число учеников), число "кроликов"-114 (количество баллов), так как, "кроликов" больше чем клеток, значит есть клетка в которой сидит не менее 17 "кроликов", $16 \cdot 7+2=114$.

Задача 2. В 3"А" классе учится 25 школьников, знающих (всего) 102 стихотворения. Докажите, что найдется школьник, знающий не менее пяти стихотворений.

Решение. Число "клеток" –25(число школьников), число "кроликов"-102(число стихотворений), так как, "кроликов" больше чем клеток, значит есть клетка в которой сидит не менее 5 "кроликов", $25 \cdot 4+2=102$.

Задача 3. В городе Формалюнске 15 школ. В них обучается 6005 школьников. В концертном зале городского Дворца Культуры 400 мест. Доказать, что найдется школа, ученики которой не поместятся в этот зал.

Решение. Число "клеток" –5(число школ), число "кроликов"-6005(число школьников), так как, "кроликов" больше чем "клеток", значит есть клетка в которой сидит не менее 401 "кроликов", $15 \cdot 400+5=6005$. Найдётся школа в которой 401 ученик.

Дальше

Задача 4. На олимпиаде 10 школьников решили в сумме 35 задач, причем среди них были решившие ровно одну, ровно две и ровно три задачи. Доказать, что кто-то из них решил не менее 5 задач.

Решение. (Стандартное соображение: если известно, что какие-то объекты есть, то есть хотя бы по одному экземпляру, который можно выделить и рассмотреть !) Возьмем одного школьника, решившего ровно одну задачу, одного, решившего ровно две и одного, решившего ровно три. Эти трое решили в сумме 6 задач. Остается еще 7 школьников, решивших в сумме 29 задач. Если взять *задачи* в качестве *««кролик»ов»* и *школьников* в качестве *клеток*, то получается в точности утверждение п.3 при n=7, k=5 ч.т.д.

Решение. Число "клеток" –25(число школьников), число "кроликов"-102(число стихотворений), так как, "кроликов" больше чем клеток, значит есть клетка в которой сидит не менее 5 "кроликов", $25\cdot4+2=102$.

Задача 5. Пятеро программистов получили на всех зарплату – 60000 рублей. Каждый из них хочет купить себе новый компьютер за

15000 рублей. Докажите, что кому-то из них не удастся купить компьютер.

Решение. Воспользуемся утверждением п.5 для n=5, S=62000. Тогда понятно, что зарплата одного из программистов не более S/n=12400 рублей. Зарплаты не хватит на покупку компьютера.

Содержание Дальше

ЗАДАЧИ НА ДЕЛИМОСТЬ

Задача 1. Доказать, что среди шести целых чисел найдутся два числа, разность которых делится на 5.

Решение. Рассмотрим 5 коробок, пронумерованных 0,1,2,3,4, - цифрами, представляющими собой остатки от деления на 5. Распределим в эти коробки шесть произвольных целых чисел в соответсвии с остатком от деления на 5, то есть, в одну и ту же коробку помещаем числа, имеющие одинаковый остаток от деления на 5. Поскольку чисел ("предметов") больше, чем остатков ("коробок"), согласно принципу Дирихле, существует одна "коробка", содержащая более одного предмета. То есть, существуют (по крайней мере) два числа, помещенные в одну и ту же "коробку". Следовательно, существуют два числа с одинаковым остатком от деления на 5. Тогда, разность этих чисел делится на 5. Пусть это будут $A = 5a + r$ и $B = 5b + r$. Тогда их разность делится на 5,

$$A - B = 5(a - b).$$

Задача 2. Дано 11 различных целых чисел. Доказать, что из них можно выбрать два числа, разность которых делится на 10.

Решение. По крайней мере два числа из 11 дают одинаковый остаток при делении на 10 (принцип Дирихле). Пусть это будут $A = 10a + r$ и $B = 10b + r$. Тогда их разность делится на 10: $A - B = 10(a - b)$.

Дальше

Задача 3. Дано n+1 различных натуральных чисел. Доказать, что из них можно выбрать два числа A и B, разность которых делится на n.

Решение. По крайней мере два числа из n+1 чисел дают одинаковый остаток при делении на n (принцип Дирихле). Пусть это будут A = na + r и B = nb + r. Тогда их разность делится на n: A - B = n(a - b).

Задача 4. Докажите, что среди 20 различных натуральных чисел найдутся хотя бы два числа A и B такие что, число $A^2 - B^2$ делится на 19.

Решение. По крайней мере два числа из 20 чисел дают одинаковый остаток при делении на n (принцип Дирихле). Пусть это будут A = 19a + r и B =19b + r. Тогда их разность делится на 19: A - B = n(a - b), значит и $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ делится на19.

Задача 5. Дано n+1 различных натуральных чисел. Доказать, что из них можно выбрать два числа A и B такие что, число $A^2 - B^2$ делится на n.

Решение. По крайней мере два числа из n+1 чисел дают одинаковый остаток при делении на n (принцип Дирихле). Пусть это будут A = na + r и B = nb + r. Тогда их разность делится на n: A - B = n(a - b), значит и $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$ делится на n.

Содержание Дальше

ЗАДАЧИ НА КОМБИНАТОРИКУ

Задача 1. В мешке лежат шарики 2-х разных цветов (много белых и много черных). Какое наименьшее количество шариков надо на ощупь вынуть из мешка, чтобы среди них заведомо оказались два одного цвета.

Решение: 3 шарика. Это - просто применение принципа Дирихле: «кроликами» будут взятые шарики, а клетками - черный и белый цвета. Клеток две, поэтому если ««кроликов» хотя бы три, то какие-то два попадут в одну клетку (будет 2 одноцветных шарика). С другой стороны, взять два шарика мало, потому что они могут быть двух разных цветов.

Задача 2. В коробке лежат 10 красных карандашей, 8 синих, 8 зеленых. Наугад (произвольно) из коробки вынимают n карандашей. Определить наименьшее число карандашей, которые необходимо вынуть, чтобы среди них было не менее 4 карандашей одного цвета;

Решение. Пусть вынули 10 карандашей. Так как у нас всего 3 цвета, согласно принципу Дирихле (карандаши будут "предметами", а цвета - "коробками"), по крайней мере 4 карандаша будут одинакового цвета.

Докажем, что $n = 10$ является наименьшим числом. С этой целью покажем ситуацию, при которой условия задачи не выполняются. Например, когда вынуто по 3 карандаша каждого цвета (9 карандашей). Отметим, что эта ситуация возможна, так как в коробке находится не менее 3 карандашей каждого цвета.

Дальше

Задача 3. В коробке лежат шарики 4-х разных цветов (много белых, много черных, много синих, много красных). Какое наименьшее количество шариков надо наощупь вынуть из мешка, чтобы среди них заведомо оказались два одного цвета?

Решение. Применяя принцип Дирихле, возьмем за «кроликов» шары, а за «клетки» - черный, белый, синий, красный цвета. Клеток 4, поэтому если кроликов, хотя бы 5, то какие-то два попадут в одну клетку (будет 2 одноцветных шарика). С другой стороны, взять четыре шарика мало, потому что они могут быть четырех разных цветов.

Задача 4. Укажите какое наименьшее число карт надо наугад взять из колоды, чтобы среди них заведомо оказались две одной масти.

Решение: 5 карт. «Кроликами» будут взятые карты, а «клетками» - масти карт, их четыре. Клеток 4, поэтому если ««кроликов» хотя бы 5, то какие-то две попадут в одну клетку (будет 2 карты одинаковой масти).

*Задача 5.*На карточках написаны числа от1 до 20. Карточки перевернули и перемешалию. Сколько карточек нужно открыть , чтобы на них были написаны два числа одинаковой чётности.

Решение: 3 карточки. «Кроликами» будут взятые карточки, а «клетками» - чётность и нечётность, их две. «Клеток» 2, поэтому если ««кроликов» хотя бы 3, то какие-то два попадут в одну «клетку» (будет 2 карточки с числами одинаковой чётности.

Содержание Дальше

ЗАДАЧИ НА ТЕОРИЮ ЧИСЕЛ

Задача 1. Доказать, что для любого натурального числа $n \geq 1$, существует натуральное число, состоящее из цифр 0 и 5, делящееся на n.

Решение. Рассмотрим натуральные числа

$$a_1 = 50,\ a_2 = 5050,\ \ldots,\ a_n = \underbrace{5050\ldots50}_{n \text{ раз}}$$

и распределим эти "предметы" в "коробки" пронумерованные 0,1,...,n-1 (цифрами, представляющими собой остатки от деления на n). В коробку s помещаем число a_k, которое имеет остаток от деления на n, равный s.

Если в коробке с номером 0 находится один "предмет" (то есть, одно число), тогда задача решена. В противном случае n "предметов" находятся в n-1 "коробках". Согласно прицнипу Дирихле, существуют два "предмета" (числа), находящиеся в одной и той же коробке. То есть, существуют два числа, имеющие одинаковый остаток от деления на n. Их разность будет делится на n, и как легко заметить, разность чисел, состоящих из цифр 0 и 5, также будет числом, состоящим из 0 и 5.

Содержание

Дальше

Задача 2.. В строку выписано 5 натуральных чисел: a_1, a_2, a_3, a_4, a_5. Докажите, что либо одно из них делится на 5, либо сумма нескольких рядом стоящих чисел делится на 5.

Решение. Рассмотрим 5 чисел:

a_1

$a_1 + a_2$

$a_1 + a_2 + a_3$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4$

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5$

Если одно из них делиться на 5, то всё в порядке, утверждение справедливо. В противном случае при делении на 5 они дают в остатке одно их четырёх чисел: 1, 2, 3, 4. По принципу Дирихле остатки, по крайней мере, двух из выписанных чисел совпадают, так как их 5. Следовательно, их разность делиться на 5. Но разность эта – одно из чисел данных в задаче или сумма нескольких из них, стоящих рядом.

Задача 3. Доказать, что число N^5 оканчивается на ту же цифру, что число N.

<u>*Решение.*</u> (основано на свойствах делимости, теореме о делимости с остатком)

Заметим, что N^5 и N будет заканчиваться на одну и ту же цифру в том и только том случае, когда $N^5 - N$ будут делится на 10, поэтому переформулируем задачу: доказать, что $N^5 - N \vdots 10$.

1. Разность $N^5 - N$ представим в виде произведения сомножителей: $N^5 - N = N(N^4 - 1) = N(N^2 - 1)(N^2 + 1) = N(N-1)(N+1)(N^2+1)$

2. Число 10 тоже разложим на множители 10 = 2*5, причем числа 2 и 5 - взаимно простые. Поэтому, если мы докажем, что $N^5 - N$ делится на 2 и на 5, тем самым мы докажем утверждение.

3. Рассмотрим произведение $N(N-1)$ - произведение двух последовательных чисел, следовательно, одно из них – четное, то есть делится на два, а значит, (св.9), $N(N-1) \vdots 2 \Rightarrow N(N-1)(N+1)(N^2+1) N^5 - N \vdots 2$.

4. Докажем, что один из сомножителей числа $N^5 - N = N(N-1)(N+1)(N^2+1)$ делится на 5 согласно <u>утверждению 1,</u> число N может быть представлено как $N = 5q$ или $N = 5q+1$ или $N = 5q+2$ или $N = 5q+3$ или $N = 5q+4$.

Рассмотрим каждый из этих случаев отдельно:

Если $N = 5q \Rightarrow N \vdots 5 \Rightarrow N(N-1)(N+1)(N^2+1) = N^5 - N \vdots 5$

Если $N = 5q+1 \Rightarrow N-1 = 5q+1-1 = 5q \vdots 5 \Rightarrow N(N-1)(N+1)(N^2+1) = N^5 - N \vdots 5$

Если $N = 5q+2 \Rightarrow (N^2+1) = (5q+2)^2+1 = 25q^2+20q+4+1 = 5(5q^2+4q+1) \vdots 5 \Rightarrow$

$N(N-1)(N+1)(N^2+1) = N^5 - N \vdots 5$

Если $N = 5q+3 \Rightarrow N^2+1 = (5q+3)^2+1 = 25q^2+30q+9+1 = 5(5q^2+6q+2) \vdots 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow N(N-1)(N+1)(N^2+1) = N^5 - N \vdots 5$

Таким образом, мы получили, что каково бы ни было натуральное число N, $N^5 - N \vdots 5$

5. Так как $N^5 - N \vdots 2$ и $N^5 - N \vdots 5$, то $N^5 - N \vdots 10 \Leftrightarrow N^5$ *и* N оканчиваются на одну и ту же цифру.

Содержание

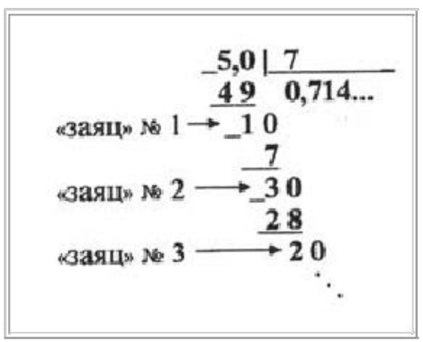
Дальше

ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ В ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Следующую теорему часто используют в школьном курсе алгебры, но доказательство не рассматривают. Его очень просто получить с помощью принципа Дирихле.

Теорема **.** *Пусть p, q - натуральные числа, p < q. Если обыкновенную дробь p/q обратить в десятичную, то получится либо конечная, либо бесконечная периодическая десятичная дробь, причём длина периода не превосходит q-1.*

<u>*Доказательство*</u> Будем делить *p* на *q* "уголком" и следить за остатками. Если на каком-то шаге остаток будет нулевым, то получится конечная дробь. Если же все остатки будут отличны от нуля, то рациональное число *p*/*q* запишется в виде бесконечной десятичной дроби.



[Содержание](#)

[Дальше](#)

Докажем, что она будет периодической. Каждый раз при нахождении очередной цифры частного будет получаться в остатке одно из чисел 1, 2, ..., q-1. Эти возможные значения остатков мы и будем считать "клетками", так что всего имеется q-1 "клеток". "Зайцами" же будут остатки, которые получаются в действительности при выполнении деления. Рассмотрим первых q "зайцев". Так как их на 1 больше, чем число "клеток", то какие-то два "зайца" попадут в одну "клетку". Другими словами, не позже, чем через q - 1 шагов начнут повторяться остатки, а вслед за этим - и цифры в частном. Действительно, если на некотором шаге повторился остаток, то, приписав как обычно к нему 0, мы получим то же число, что было прежде, а, значит, снесём в частное ту же самую цифру, что и раньше; поэтому наши действия начнут повторяться. Таким образом, получится *периодическая* десятичная дробь с периодом длиной не более q - 1.

Многочлен Эйлера. С давних пор математиков интересовал вопрос о существовании функций $f(k)$, значениями которых при всех натуральных k являлись бы только простые числа. Известны функции, которые принимают подряд много простых значений. Например, Эйлер указал интересный многочлен $x^2 - x + 41$, который при всех целых x от -39 до 40 включительно принимает только простые значения (т.е. при $x = 0, \pm1, \pm2, \ldots, \pm39, 40$). Однако при $x = 41$ и $x = 42$ значения этого многочлена будут уже составными числами. В общем случае многочлен с целыми коэффициентами не может при всех натуральных значениях аргумента принимать только простые значения.

Теорема. Любой многочлен с целыми коэффициентами (отличный от константы) при некотором натуральном значении аргумента принимает значение, представляющее собой составное число .

Содержание Дальше

Доказательство Пусть $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, где все a_i - целые числа. Предположим, что при некотором k значение многочлена $f(x)$ - простое число, т.е. $f(k) = p$, где p - простое. Многочлен степени n принимает одно и то же значение не более чем в n точках. (Действительно, если $f(x) = y_0$ более чем в n точках $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, то многочлен $g(x) = f(x)-y_0$ имеет корни $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, а, как известно, любой многочлен не может иметь более n действительных корней.) Покажем, что найдётся такое целое t, что $f(k+pt)$ отлично от 0 и p. Нам поможет принцип Дирихле. Будем считать значени многочлена (в натуральных точках) "клетками", а натуральные числа вида $k+pt$ "зайцами". Натуральное число $N = k+pt$ будем помещать в "клетку", соответствующую значению многочлена $f(N)$. Согласно высказанному выше утверждению, в "клетке" не может поместитьс больше n "зайцев". Так как "зайцев" много, то это значит, что $f(k + pt)$ не может принимать только значени 0 и p при различных целых t, т.е. найдётся "заяц" $k+pt$, который не попадёт ни в "клетку" 0, ни в "клетку" p. Итак, при некотором t имеем: $f(k + pt) \neq 0$ и $f(k + pt) \neq p$. Разлагая $f(k + pt)$ по степеням pt (используя бином Ньютона), получим

$$f(k+pt) = f(k) + c_1pt + c_2(pt)^2 + \ldots + c_n(pt)^n,$$

где все c_i - некоторые целые числа. Поскольку $f(k) = p$, из предыдущего равенства получаем, что $f(k + pt)$ делится на p, причём $f(k + pt) \neq 0$ и $f(k + pt) \neq p$, так что $f(k + pt)$ - составное число. Теорема доказана.

Содержание

Дальше

Следующая теорема, сформулированная П. Ферма, является одним из самых фундаментальных фактов в теории делимости целых чисел и находит широкое применение как в теоретических исследованиях, так и в арифметических приложениях.

Малая теорема Ферма. Если p - простое число, a - целое число, не делящееся на p, то a^{p-1} при делении на p даёт остаток 1, т. е.

$$a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p).$$

<u>*Доказательство.*</u> Каждое из p - 1 чисел a, 2a, . . ., (p-1)a ("зайцев") даёт при делении на p ненулевой остаток (ведь a не делится на p):

$$a = k_1 p + r_1,$$

$$2a = k_2 p + r_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(p-1)a = k_{p-1} p + r_{p-1}.$$

Содержание

Дальше

Если число различных встречающихся здесь остатков ("клеток") меньше p - 1, то среди них найдутся по крайней мере два одинаковых ("в клетке по крайней мере два зайца"). Но это невозможно, так как при $r_n = r_m$ число $(n\text{-}m)a = (k_n\text{-}k_m)p$ делится на p, что противоречиво, ибо $|n\text{-}m| < p$ и a взаимно просто с p. Значит, все остатки $r_1, \ldots, r_{p-1}$ между собой различны и образуют перестановку чисел $1, 2, \ldots, p - 1$. Перемножая все предыдущие равенства, получаем

$$(p\text{-}1)!\, a^{p-1} = N \cdot p + r_1 r_2 \cdot \ldots \cdot r_{p-1} = Np + (p\text{-}1)!,$$

где N - некоторое целое число. Следовательно, $(p\text{-}1)! \cdot (a^{p-1}\text{-}1)$ делится на p, а тогда и $a^{p-1} - 1$ делится на p. Теорема доказана.

Следствие. Если p - простое число, то при любом целом a разность $a^p - a$ делится на p.

Содержание   Дальше

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреев А.А., Горелов Г.Н., Люлев А.И., Савин А.И. "Принцип Дирихле", Самара "Пифагор", 1997г

2. И. Л. Бабинская. Задачи математических олимпиад. М.: Наука, 1975.

3. Д. Х. Муштари. Подготовка к математическим олимпиадам: задачи, темы, методы. Казанский ун-т, 1990.

4. В. В. Прасолов. Задачи по планиметрии. Ч. 2. М.: Наука, 1991.

5. В. Г. Болтянский. Шесть зайцев в пяти клетках. // Ж-л «КВАНТ», 1977,No2.

6. А. А. Леман. Сборник задач московских математических олимпиад. Под ред. В.Г. Болтянского. М.: Просвещение, 1965.

7. Ю. Ф. Фоминых. Принцип Дирихле. // Ж-л «Математика в школе», 1996, No3.

Содержание

Дальше