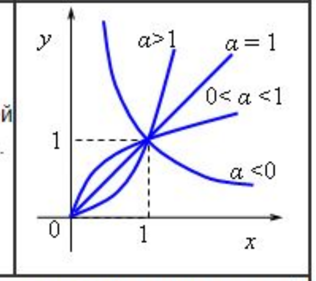
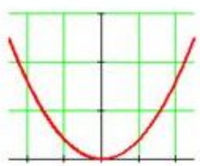
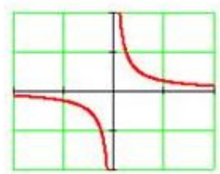
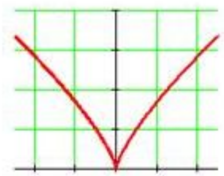
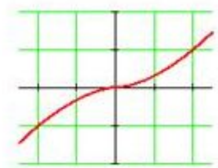
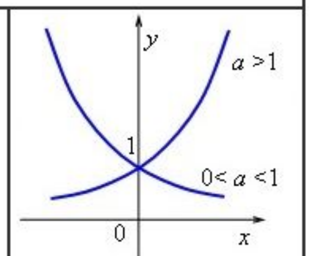
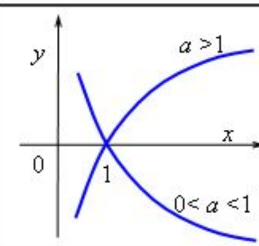
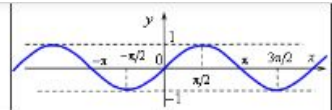
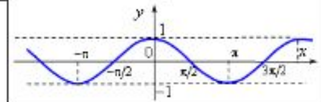
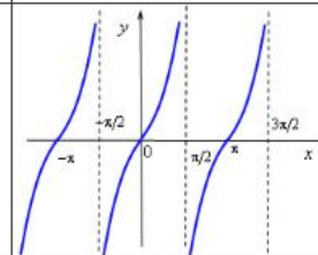
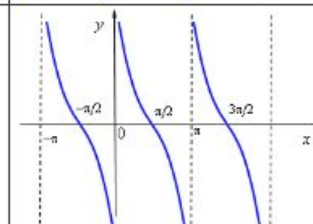
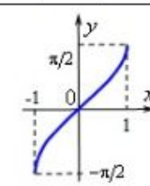
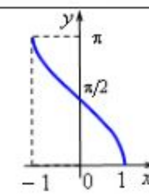
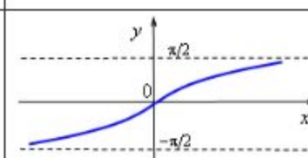
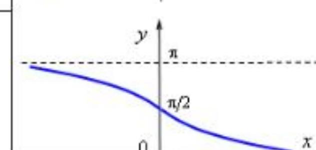
Область определения функции

- Совокупность всех значений, которые может принимать в условиях задачи аргумент x функции $f(x)$, называется *областью определения* этой функции. При этом значению x, не входящему в область определения, не соответствует никакое значение функции.
- Если функция задается формулой без указания области определения, то подразумевается, что область определения есть множество всех значений аргумента, при которых формула имеет смысл, т.е. функция принимает конечное вещественное значение.

Области определения основных элементарных функций

Для нахождения области определения сложной функции необходимо хорошо знать области определения основных элементарных функций

<table>
<tr><th>функция</th><th>формула</th><th>область определения</th><th>график</th></tr>
<tr><td>степенная</td><td>x^α</td><td>$x > 0$
- общая часть областей определения для всех значений α.</td><td>
</td></tr>
<tr><td colspan="4">Кроме положительных значений x, область определения функции содержит значение $x = 0$ при $\alpha \geq 0$, и отрицательные значения x - при α либо целых, либо дробных с нечетным знаменателем.
 $\alpha = 2$  $\alpha = -3$  $\alpha = \frac{2}{3}$  $\alpha = \frac{5}{3}$</td></tr>
<tr><td>показательная</td><td>a^x</td><td>$-\infty < x < +\infty$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>логарифмическая</td><td>$\log_a x$</td><td>$x > 0$</td><td>
</td></tr>
</table>

синус	$\sin x$	$-\infty < x < +\infty$	
косинус	$\cos x$	$-\infty < x < +\infty$	
тангенс	$\mathrm{tg}x$	$-\frac{\pi}{2} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$	
котангенс	$\mathrm{ctg}x$	$\pi k < x < \pi(k+1)$	
арксинус	$\arcsin x$	$-1 \leq x \leq 1$	
арккосинус	$\arccos x$	$-1 \leq x \leq 1$	
арктангенс	$\mathrm{arctg}x$	$-\infty < x < +\infty$	
арккотангенс	$\mathrm{arcctg}x$	$-\infty < x < +\infty$	

Примеры нахождения области определения функции (стр. 1)

Найти область определения функции

$$y(x) = \sqrt{9 - x^2} + 2$$

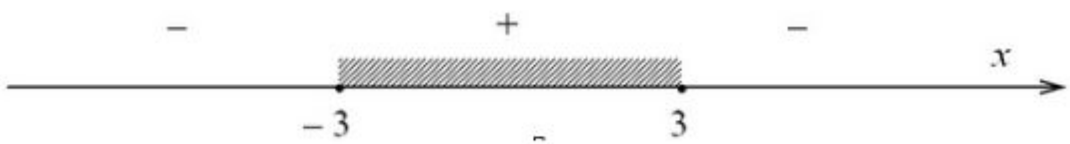
Р е ш е н и е. Формула, задающая функцию, имеет смысл при условии

$$9 - x^2 \geq 0.$$

Решим это неравенство методом интервалов. Найдем корни уравнения $9 - x^2 = 0$:

$$x = 3 \text{ и } x = -3.$$

Определим интервалы знакопостоянства выражения $9 - x^2$:



Итак, область определения данной функции есть множество $D(y) = [-3, 3]$.

Примеры нахождения области определения функции (стр.2)

Найти область определения функции

$$y(x) = \ln\left(5x - x^2\right)$$

Решение: Формула, задающая функцию, определена при условии

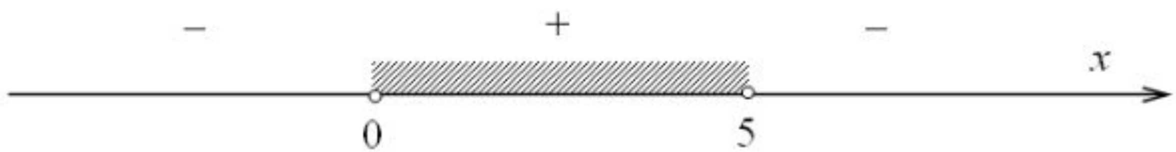
$$5x - x^2 > 0$$

(функция $\ln$ определена для положительных значений аргумента).

Решим неравенство методом интервалов. Найдем корни уравнения $x(5 - x) = 0$:

$x = 0$ и $x = 5$.

Определим интервалы знакопостоянства выражения $x(5 - x)$:



Найдем область определения данной функции:

$$D(y) = (0, 5).$$

Примеры нахождения области определения функции (стр.3)

Найти область определения функции

$$y(x) = \arcsin\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

Р е ш е н и е. Формула, задающая функцию, определена при условии

$$\left|\frac{x-1}{2}\right| \le 1$$

(аргумент функции $\arcsin$ по абсолютному значению не превосходит 1).

Решая неравенство:

$$-1 \le \frac{x-1}{2} \le 1\,,$$

$$-2 \le x-1 \le 2\,,$$

$$-1 \le x \le 3,$$

находим область определения функции $y(x)$:

$$D(y) = [-1, 3]\,.$$

Примеры нахождения области определения функции (стр.4)

Найти область определения функции

$$y(x) = \frac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt{x+2}$$

Р е ш е н и е: Формула, задающая функцию, определена при одновременном выполнении следующих условий:

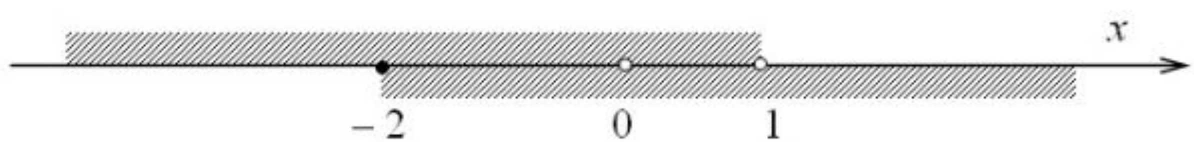
$\lg(1-x) \neq 0$ – знаменатель дроби не может быть равен нулю,

$1 - x > 0$ – аргумент функции $\lg$ положителен,

$x + 2 \geq 0$ – подкоренное выражение корня четной степени должно быть неотрицательным.

Таким образом, область определения данной функции найдем, решая систему неравенств:

$$\begin{cases} \lg(1-x) \neq 0 \\ 1 - x > 0 \\ x + 2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x \neq 1 \\ -x > -1 \\ x \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x < 1 \\ x \geq -2 \end{cases}$$



Итак, область определения данной функции есть множество:

$$D(y) = [-2, 0) \cup (0, 1).$$

Примеры нахождения области определения функции (стр.5)

Как изменится область определения при выполнении следующих преобразований (левую часть равенства считать исходной функцией)

$$\sqrt{(x-1)(x+2)} = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+2}.$$

Р е ш е н и е. Обозначим

$$y(x) = \sqrt{(x-1)(x+2)},\ g(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+2}$$

и найдем область определения обеих функций.

Функция $y(x)$ определена, когда подкоренное выражение неотрицательно:

$$(x-1)(x+2) \geq 0.$$

Решим неравенство методом интервалов. Найдем корни уравнения $(x-1)(x+2) = 0$:

$$x = 1 \text{ и } x = -2.$$

Определим интервалы знакопостоянства выражения $(x-1)(x+2)$:

Областью определения функции $y(x)$ является множество $D(y) = (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$.

Функция $g(x)$ определена, когда подкоренные выражения неотрицательны:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x+2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \geq -2 \end{cases}.$$

Таким образом, $D(g) = [1, +\infty)$ – область определения функции $g(x)$.

Видим, что $D(y) \neq D(g)$, т.е. после преобразования функции ее область определения "сузилась", следовательно, данное преобразование не является тождественным.

Очевидно, что на множестве $[1, +\infty)$, являющемся пересечением областей определения $D(y)$ и $D(g)$, функции $y(x)$ и $g(x)$ являются тождественными.

Как изменится область определения при выполнении следующих преобразований (левую часть равенства считать исходной функцией)?

$\sqrt{\frac{x^2-4}{x-1}} = \frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x-1}}$	сузилась ▾
$\lg(x-3)^2 = 2\lg(x-3)$	сузилась ▾
$10^{\lg\frac{2}{x-2}} = \frac{2}{x-2}$	расширилась ▾
$\cos x \cdot \mathrm{tg} x = \sin x$	расширилась ▾
$\frac{1}{\sqrt{x^2}} = \frac{1}{\lvert x \rvert}$	не изменилась ▾
$\frac{x^2-2x+1}{x-1} = x-1$	расширилась ▾

Найти область определения функции

$$y(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} + \frac{1}{x}$$

- $(-\infty, 1] \cup (2, +\infty)$
- $(-\infty, 0) \cup (0, 1] \cup [2, +\infty)$
- $[1, 2]$
- $[2, +\infty)$

Найти область определения функции
$y = \sqrt{x-3} + \sqrt[3]{4-x}$

- $(-\infty; 4]$
- $[3; +\infty)$
- $[3; 4]$
- $(-\infty; 3]$

Найти область определения функции

$$y(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x^2-5x+6}}$$

- $(-\infty, 1] \cup [3, +\infty)$
- $[1, 2) \cup (3, +\infty)$
- $(2, 3)$
- $[1, 2)$

Найти область определения функции

$$y(x) = \sqrt[3]{x+1} + \sqrt{\frac{x}{x^2-4}}$$

- $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$
- $(-2, 0] \cup (2, +\infty)$
- $(-1, 0] \cup (2, +\infty)$
- $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

Найти область определения функции

$$y(x) = \lg(7x - x^2 - 6)$$

- $(-\infty, 1) \cup (6, +\infty)$
- $[1, 6]$
- $(-\infty, 1] \cup [6, +\infty)$
- $(1, 6)$

Найти область определения функции

$$y(x) = \frac{1}{\ln(2-x)}$$

- $(-\infty, 1) \cup (1, 2)$
- $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
- $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- $(-\infty, 2)$

Найти область определения функции

$$y(x) = \log_2(x-1) + \frac{\sin x}{x^2-9}$$

- $[3, +\infty)$
- $(1, 3) \cup (3, +\infty)$
- $(-\infty, -3) \cup (3, +\infty)$
- $(1, +\infty)$

Найти область определения функции

$$y(x) = \arcsin \frac{x-1}{x}$$

- $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$
- $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$
- $(-\infty, 0)$
- $[\frac{1}{2}, +\infty)$

Найти область определения функции

$$y(x) = \arccos\frac{x-2}{3} + \arcsin\frac{x}{3}$$

- $[-3, -1]$
- $[-3, 5]$
- $[3, 5]$
- $[-1, 3]$

Найти область определения функции

$$y(x) = \mathrm{arctg}x + \mathrm{arcctg}\frac{1}{x}$$

- $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
- $(-1, 1)$
- $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
- $(-\infty, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, +\infty)$