

***Елементи теорії  
визначників***

# *План*

- *Визначники*
- *Мінори*
- *Алгебраїчні доповнення*

# **Визначники**

**Визначником (детермінантом) порядку  $n$  називається число, одержане в результаті певних обчислень квадратичної матриці того ж порядку.**

**Позначається  $\Delta$  або  $\det A$ .**

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

***На відміну від матриці визначник обмежується справа та зліва одинарною лінією.***

**Щоб знайти визначник другого  
порядку,  
множимо елементи головної діагоналі  
та  
віднімаємо добуток елементів  
побічної  
діагоналі:**

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Приклад:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 22 \end{vmatrix} = 3 \cdot 22 - 1(-4) = 70.$$

# Метод трикутників

*Щоб знайти визначник третього порядку, будемо шість добутків таким чином:*

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

## Приклад:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot 5 + 2 \cdot (-3) \cdot (-2) + (-3) \cdot 3 \cdot 6 -$$
$$-(-2) \cdot 5 \cdot 6 - (-3) \cdot 3 \cdot 4 - 2 \cdot (-3) \cdot 5 = 100 + 12 - 54 + 60 + 36 + 30 = 184.$$



# Властивості визначників

1. Значення визначника  
незмінюється,

якщо всі його рядки замінити  
відповідними стовбцями. Така  
операція називається

транспонуванням

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**2. Перестановка двох рядків визначника рівносильна множенню його на -1.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

**3. Якщо визначник має два однакових рядки, або стовпці, то він дорівнює нулю.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

**4. Якщо всі елементи якого-небудь рядка, або стовпця визначника містять спільний множник, то його можна винести за знак визначника.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

**5. Якщо всі елементи деякого рядка, або стовпця визначника дорівнюють нулю, то сам визначник дорівнює нулю.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

**6. Якщо відповідні елементи двох рядків визначника пропорційні, то визначник дорівнює нулю.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

**7. Якщо до елементів деякого рядка визначника додати відповідні елементи іншого рядка, помножені на довільний спільний множник, то значення визначника при цьому не зміниться.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{23} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + ka_{33} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

**8. Якщо кожен елемент деякого рядка визначника є сумою двох доданків, то визначник може бути зображений у вигляді суми двох визначників, у яких один у згаданому рядку має перші з заданих доданків, а інші другі; елементи, що знаходяться на решті місць у всіх трьох визначниках одні й ті самі.**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

# Мінори

**Означення.**

**Мінором  $M_{ik}$ , що відповідає елементу  $a_{ik}$  матриці, називається визначник, який відповідає матриці, утвореній з матриці викреслюванням  $i$ -го рядка та  $k$ -го стовпця.**

# Алгебраїчні доповнення

*Означення. Алгебраїчним доповненням  $A_{ik}$ , що відповідає елементу  $a_{ik}$  матриці, називається відповідний мінор, взятий зі знаком “+”, якщо сума його індексів парна, і зі знаком “-”, якщо сума його індексів непарна.*

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \cdot M_{ik} .$$

Приклад: Дано матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 6 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Обчислити мінори  $M_{12}$  і  $M_{22}$  та алгебраїчні доповнення  $A_{12}$  і  $A_{22}$ .

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 18 = -8; \quad M_{22} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 20 - (-12) = 32;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot (2 \cdot 5 - 3 \cdot 6) = -(10 - 18) = 8;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^4 \cdot (4 \cdot 5 - 6 \cdot (-2)) = 20 - (-12) = 32.$$



# Алгебраїчні доповнення:

## теорема

Теорема 1. Значення визначника  $n$ -го порядку, що визначає матрицю, дорівнює сумі добутків елементів довільного рядка або довільного стовпця на відповідні алгебраїчні доповнення.

Для визначника

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

виконуються такі

рівності:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$$

$$\Delta = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$$

$$\Delta = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$$

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$\Delta = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$$

$$\Delta = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$$

**Приклад: Обчислити визначник  
розкладаючи**

**його за елементами третього рядка:**

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -7 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -11 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -7 & 5 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-11) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} =$$
$$= 4 \cdot 1 \cdot (-7 \cdot 3 - 5 \cdot (-2)) + 2 \cdot (-1) \cdot (3 \cdot 3 - 5 \cdot 1) + (-11) \cdot 1 \cdot (3 \cdot (-2) - (-7) \cdot 1) = -44 -$$
$$-8 - 11 = 63.$$

**Теорема 2. Сума добутків елементів  
будь-якого рядка або стовпця  
визначника на алгебраїчні доповнення  
відповідних елементів іншого рядка, чи  
стовпця дорівнюють нулю.**

$$\Delta = a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = -a_{11}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) +$$
$$+ a_{12}(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}) - a_{13}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) = 0.$$

# Действия над матрицами

## ● Нахождение обратной матрицы

**Обратной матрицей** по отношению к данной невырожденной квадратной матрице  $A$   $n$ -ного порядка, называется матрица, которая, будучи умноженной как слева, так и справа на данную матрицу, дает единичную матрицу.

Обратная матрица обозначается символом  $A^{-1}$ . Таким образом, согласно определению:  $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ .

$$A \rightarrow \det A \neq 0 \rightarrow A^T \rightarrow A^+ \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^+$$

Транспонированная матрица  
Получается из матрицы  $A$  путем замены каждого элемента матрицы  $A^T$  на его соответствующими столбцами

Присоединенная матрица  
Получается путем замены каждого элемента матрицы  $A^T$  на его алгебраическое дополнение

Если определитель матрицы равен нулю, то обратная матрица не существует