

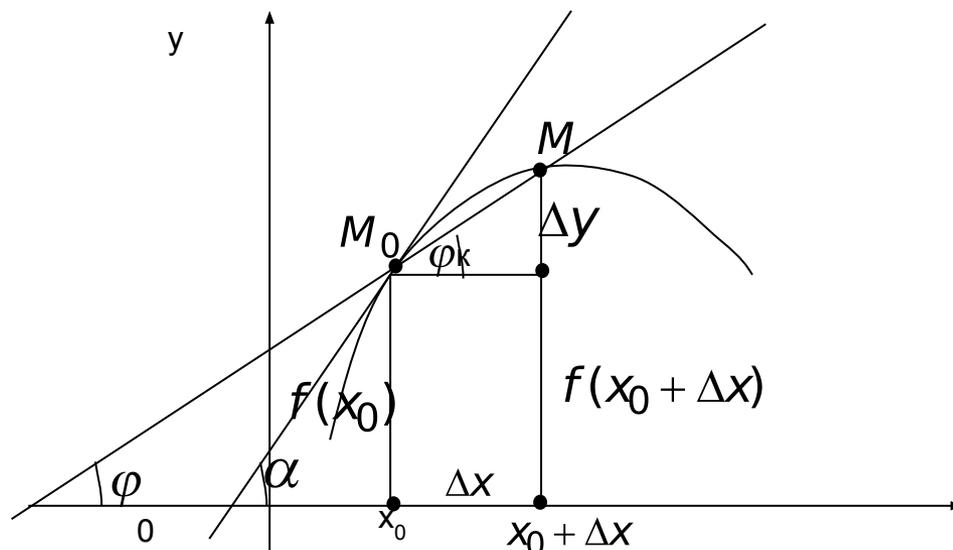
# ***Элементы дифференциального исчисления***

## **Лекция 4**

# **Дифференциальное исчисление функций одной переменной**

- 1. Производные**
- 2. Таблица производных**
- 3. Дифференциал**
- 4. Производные и дифференциалы  
высших порядков**
- 5. Некоторые теоремы о  
дифференцируемых функциях**
- 6. Применение производных к  
исследованию функций**
- 7. Общая схема исследования функции и  
построение графика**

# Производная. Задача о касательной



**Определение.** Если существует предельное положение секущей  $M_0M$  при стремлении  $M \rightarrow M_0$  вдоль по кривой, то оно называется касательной к графику функции в точке  $M_0$ .

# **Производная. Задача о касательной**

Обозначим угол наклона касательной к графику функции в точке  $M_0$   $\alpha$ .

Очевидно,  $\varphi \rightarrow \alpha$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ , а  $tg\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x}$  стремится к  $tg\alpha$

$$tg\alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} tg\varphi = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} .$$

Тогда угловой коэффициент касательной равен  $k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} .$

$$k = tg\alpha$$

# Производная. Определение

Пусть функция  $y = f(x)$  определена в интервале  $(a, b)$  и пусть точка  $x_0 \in (a, b)$ .

Рассмотрим далее точку  $x_0 + \Delta x \in (a, b)$ .

В обеих точках вычислим значения функции и разность  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ .

Эту разность будем называть

***приращением функции*** в

фиксированной точке  $x_0$  .

# Производная. Определение

Если существует конечный (или бесконечный)

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

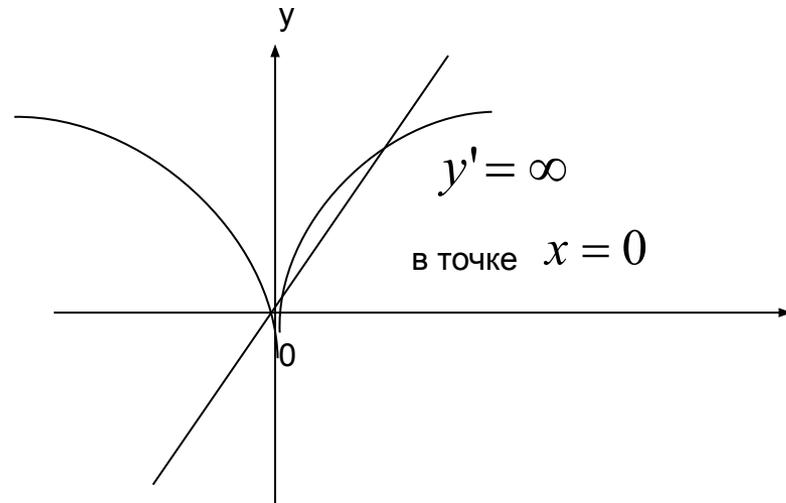
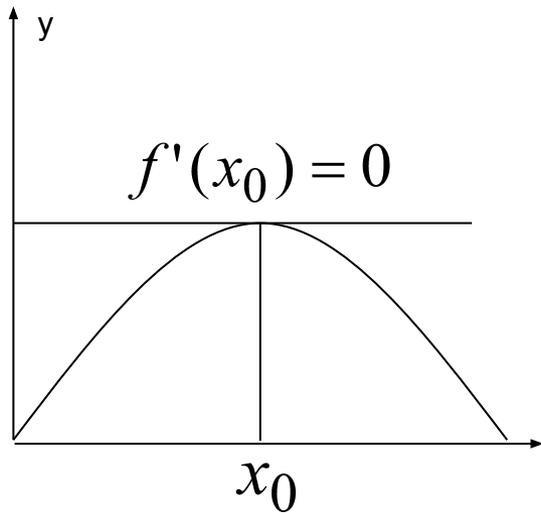
то он называется конечной (или бесконечной) производной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$  и обозначается

символами  $y'$  или  $f'(x_0)$ , т.е.

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

# Примеры

Ясно, что угловой коэффициент касательной равен производной в точке касания. Приведем примеры.



# Уравнение касательной

Касательную как прямую, проходящую через точку касания  $M_0(x_0; y_0)$ , задают уравнением  $y - y_0 = y'_0(x - x_0)$ .

Например, уравнение касательной к кривой  $y = x^2$  в точке  $(1; 2)$  имеет вид  $y - 2 = 2(x - 1)$  или  $2x - y = 0$ .

# Теоремы о производных

**Теорема 1.** Если существуют производные  $u'(x)$  и  $v'(x)$  функций  $u(x)$  и  $v(x)$ , то существуют

$$(u(x) + v(x))' = (u + v)' = u' + v';$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv';$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

# Теоремы о производных

## **Следствие.**

$(cy)' = c'y + cy' = cy'$ , так как  $c' = 0$ ,  
т.е. постоянный множитель  
выносится за знак производной.

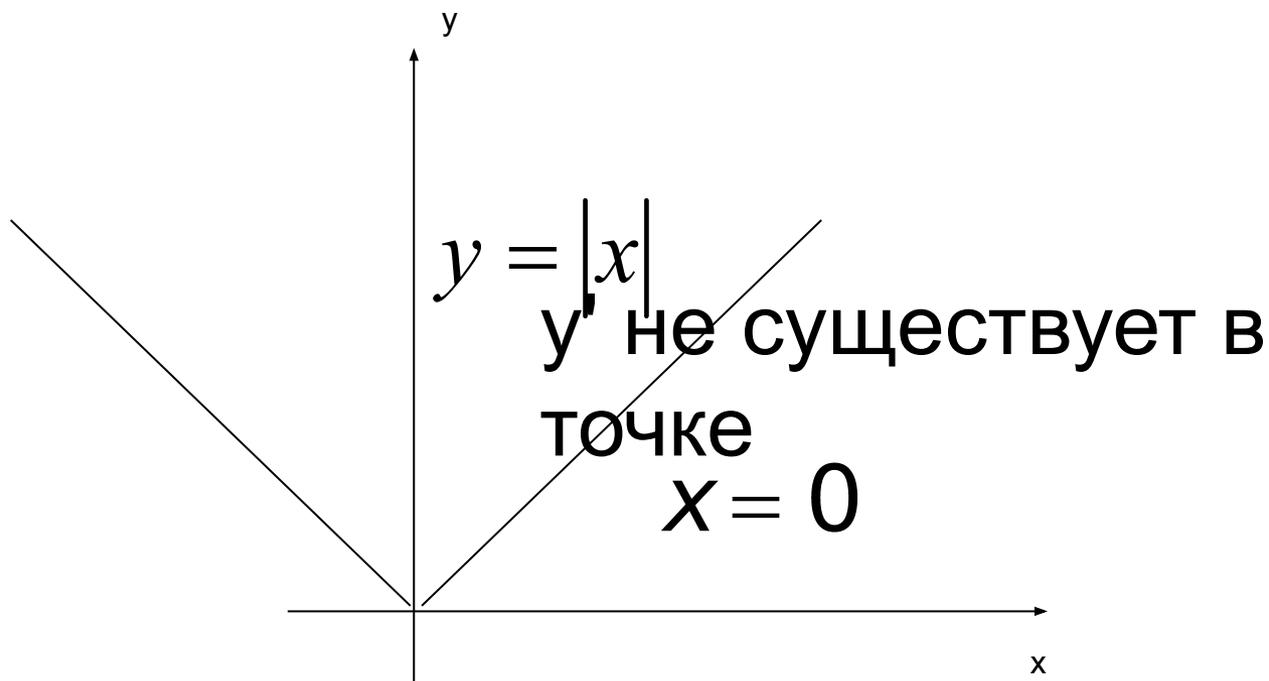
# Теоремы о производных

**Теорема 2.** Если функция в точке  $x_0$  имеет производную, то она в этой точке непрерывна.

Обратное неверно. Возможен случай, когда непрерывная функция не имеет производной в точке непрерывности.

# Теоремы о производных

Например:



# Примеры

Выведем формулы некоторых производных, применяя определение производной:

1)  $y = x^2$  имеет производную

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x ; \end{aligned}$$

## Примеры

$$2) (e^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} =$$
$$e^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

Таким же образом можно получить производные  $(\sin x)' = \cos x$ ,  $(\cos x)' = -\sin x$ , а по правилу вычисления производных сложных функций можно вычислить и другие производные.

# Производная обратной функции

**Теорема.** Пусть функция  $x=f(y)$  монотонна и дифференцируема в некотором интервале  $(a,b)$  и имеет в точке  $y$  этого интервала не равную нулю производную  $f'(y)$ . Тогда в соответствующей точке  $x$  обратная функция  $y = f^{-1}(x)$  имеет производную

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)} \quad \text{или} \quad y'_x = \frac{1}{x'_y} .$$

# Примеры

Для функции  $y = \arcsin x$  обратной является функция  $x = \sin y$ , которая в интервале  $(-\pi/2; \pi/2)$  монотонна и дифференцируема. Ее производная в этом интервале в нуль не обращается. Поэтому

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

# Примеры

$$\text{Итак, } (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Аналогично можно получить

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

# Теорема о производной сложной функции

Пусть функция  $u = u(x)$  имеет производную в точке  $x_0$ , а функция  $y = f(u)$  имеет производную в точке  $u_0 = u(x_0)$ . Тогда сложная функция  $y = f(u(x))$  имеет производную в точке  $x_0$ , причем  $y' = f'(u_0) \cdot u'(x_0)$ .

Или:  $y' = f'_u \cdot u'_x$  в произвольной точке  $x$ .

# Производная степенной функции

Справедливо тождество  $x^n = e^{n \ln x}$ .

Тогда

$$y' = (e^{n \ln x})' = e^{n \ln x} (n \ln x)' =$$

$$= \frac{n}{x} e^{n \ln x} = \frac{n}{x} x^n = nx^{n-1}, \quad (x^n)' = nx^{n-1}.$$

# Производные гиперболических функций

Гиперболическими называют функции

$$\operatorname{sh}x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}; \quad \operatorname{ch}x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

$$\operatorname{th}x = \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x}; \quad \operatorname{cth}x = \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x}.$$

# Производные гиперболических функций

Поэтому

$$(shx)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = chx.$$

$$(chx)' = shx;$$

$$(thx)' = \left(\frac{shx}{chx}\right)' = \frac{ch^2 x - sh^2 x}{ch^2 x} = \frac{1}{ch^2 x};$$

$$(cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}.$$

# Таблица производных

$$1. c' = 0,$$

$$2. (u^n)' = nu^{n-1} \cdot u',$$

$$3. (\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u',$$

$$4. \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u',$$

$$5. (a^u)' = a^u \ln a \cdot u',$$

$$6. (e^u)' = e^u \cdot u',$$

$$7. (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u',$$

$$8. (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u',$$

$$9. (\sin u)' = \cos u \cdot u',$$

$$10. (\cos u)' = -\sin u \cdot u',$$

$$11. (\operatorname{tgu})' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u',$$

$$12. (\operatorname{ctgu})' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u',$$

# Таблица производных

$$13. (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u',$$

$$(\arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} u',$$

$$(\text{arcctgu})' = -\frac{1}{1+u^2} u'.$$

$$14. (\text{shu})' = \text{chu} \cdot u'.$$

$$(\text{chu})' = \text{shu} \cdot u';$$

$$(\text{thu})' = \frac{1}{\text{ch}^2 u} u';$$

$$(\text{cthu})' = -\frac{1}{\text{sh}^2 u} u'.$$

# Лекция 5

# Дифференцируемая функция

**Определение.** Если функция  $f(x)$  в точке  $x$  имеет (конечную) производную, то она называется дифференцируемой в этой точке.

Если функция дифференцируема в каждой точке некоторого промежутка, то она называется дифференцируемой на этом промежутке.

# Дифференциал функции

**Рассмотрим пример.** Найдем приращение функции  $y = x^2$  в точке  $x_0$ .

Известно, что  $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ .

В нашем примере

$$f(x_0) = x_0^2, f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2, \text{ а}$$

приращение.

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2$$

Итак,  $\Delta y = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$ , где, как известно,  $2x_0$

является производной функции  $x^2$  в точке  $x_0$ .

# Определение дифференциала

Пусть приращение функции в точке может быть представлено в виде

$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x)$  , где  $\Delta x$  - приращение аргумента,  $A$ -величина, не зависящая от  $\Delta x$  ,  $o(\Delta x)$  -бесконечно малая более высокого порядка ,  
чем  $\Delta x$  при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

# Определение дифференциала

Тогда главная линейная относительно  $\Delta x$  часть приращения функции называется дифференциалом функции в точке и обозначается  $dy$  .

Итак, по определению  $dy = A\Delta x$  .

**Теорема.** Для того чтобы в точке  $x$  функция имела дифференциал, необходимо и достаточно, чтобы она в этой точке имела производную.

# Дифференциал функции

Приращение аргумента  $\Delta x$  в этом случае принято обозначать  $dx$  и тогда

$$dy = f'(x_0)dx, \text{ где } dx = \Delta x. \text{ В}$$

произвольной точке  $x$   $dy = f'(x)dx$ .

**Замечание.** Из последней формулы получается еще одно обозначение

$$\text{производной } f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

# Дифференциал функции

**Пример.**

$$d(\sin x) = \cos x dx;$$

$$d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx; \quad d(\ln x) = \frac{1}{x} dx;$$

$$d(x^2) = 2x dx; \quad d(x + a) = dx$$

# Дифференциал функции

Как и для производной, для дифференциала функции имеют место формулы:

**1.**  $d(u + v) = du + dv;$

**2.**  $d(uv) = vdu + udv;$

**3.**  $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2} (v \neq 0);$

**4.**  $d(cu) = cdu.$

# Инвариантность дифференциала

По правилу дифференцирования сложной функции

$$dy = y'_u u'_x dx = y'_u (u'_x dx) = y' du.$$

Здесь форма дифференциала остается неизменной, но под дифференциалом аргумента понимается не приращение этого аргумента, а его дифференциал.

# Производные высших порядков

Введем теперь понятие производной второго порядка функции  $f(x)$ .

Производную от первой производной функции  $f(x)$ , т.е.  $(y)'$  будем называть производной второго порядка (тогда  $y'$  - производная первого порядка) и будем ее обозначать  $y''$  или  $f''(x)$ . Далее

$(y'')' = y''' = f'''(x)$  - это производная третьего порядка, ... а  $(y^{(n-1)})' = y^{(n)}$  - это производная  $n$ -го порядка.

# Дифференциалы высшего порядка

Дифференциал от дифференциала данной функции называется ее дифференциалом второго порядка и обозначается  $d^2 y = d^2 f(x)$ . По определению

$$d^2 y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)dx^2.$$

$$d^2 y = f''(x)dx^2,$$

Итак,  $d^3 y = f'''(x)dx^3$  и т.д.

# Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть функция  $y$  от  $x$  задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), y = y(t), t \in (\alpha, \beta).$$

И пусть эти функции дифференцируемы. Тогда  $\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t dt}{x'_t dt} = \frac{y'_t}{x'_t}$   
Если существует вторая производная,

то

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}$$

# Пример

Найти производную функции

$$x = a(t - \sin t),$$

Имеем  $y = a(1 - \cos t).$

$$y'_x = \frac{a \sin t}{a(1 - \cos t)} = \frac{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

$$y''_{xx} = -\frac{1}{2a \sin^2 \frac{t}{2} (1 - \cos t)} = -\frac{1}{4a \sin^4 \frac{t}{2}}.$$

# Производные неявных функций

Пусть значения  $x$  и  $y$  связаны уравнением  $F(x,y)=0$ . Если функция  $y=f(x)$ , определенная на некотором промежутке, при подстановке ее вместо  $y$  в уравнение  $F(x,y)=0$  обращает это уравнение в тождество, то говорят, что это уравнение задает функцию  $y=f(x)$  неявно.

# Пример

Продифференцируем функцию

$$y = x + \ln y .$$

Имеем  $y' = 1 + \frac{1}{y} y'$  Отсюда

$$y' \left(1 - \frac{1}{y}\right) = 1, \quad y' = \frac{y}{y-1}.$$

# Продолжение

Найдем вторую производную.

Так как  $y' = \frac{y}{y-1}$ , то

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{y'(y-1) - yy'}{(y-1)^2} = \frac{y'(y-1-y)}{(y-1)^2} = \\ &= -\frac{y'}{(y-1)^2} = -\frac{y}{(y-1)^3}. \end{aligned}$$

# Логарифмическое дифференцирование

Найти производную функции  $y = (\cos x)^x$ .

Прологарифмируем обе части:

$\ln y = x \cos x$ . Теперь берем  
производную

$$\frac{y'}{y} = \cos x - x \sin x, y' = y(\cos x - x \sin x).$$

Окончательно

$$y' = (\cos x)^x (\cos x - x \sin x).$$