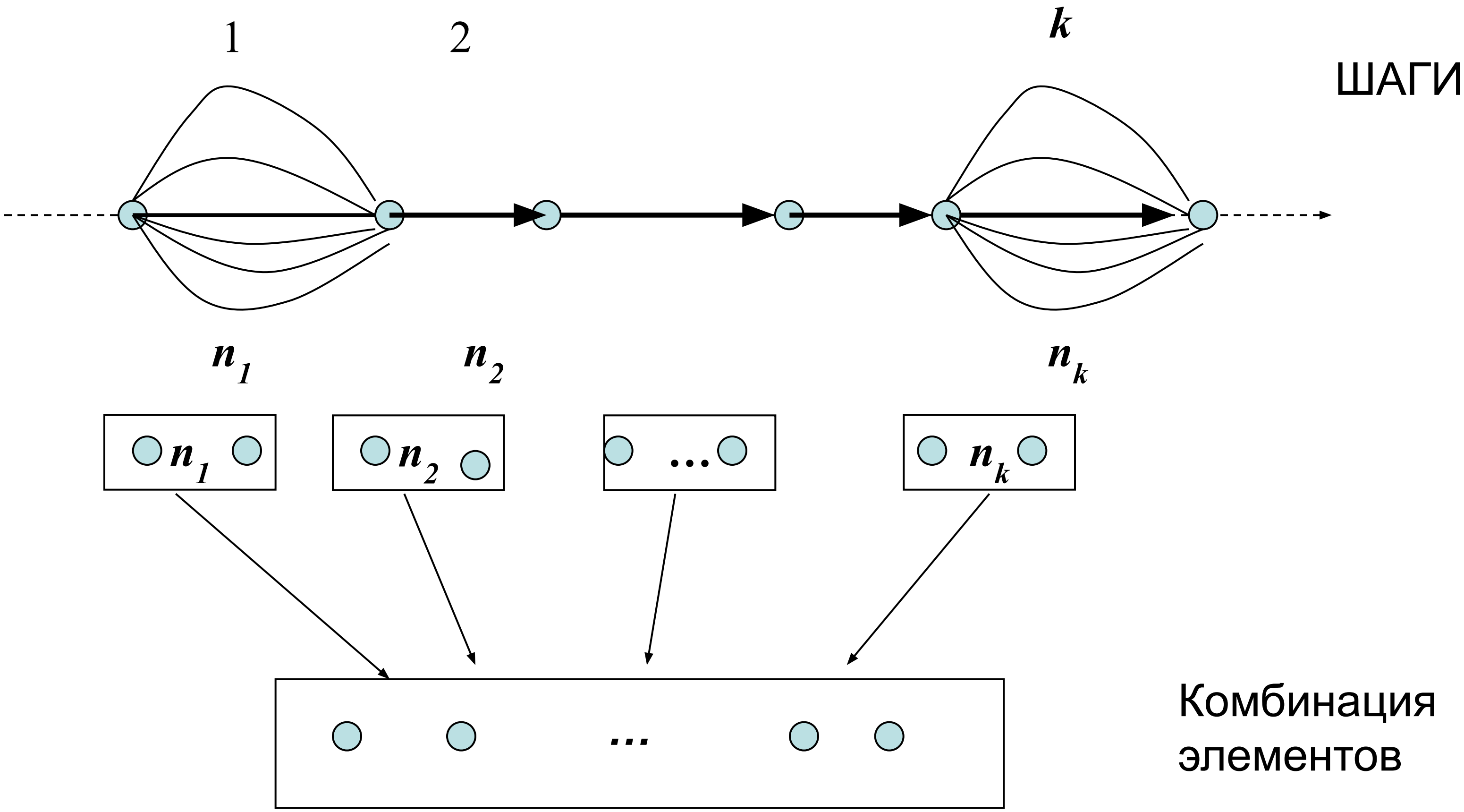
Элементы комбинаторики

Принцип произведения комбинаций



$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

Принцип произведения комбинаций

- Пусть имеется k групп элементов, причем i-я группа содержит n_i элементов, $1 \le i \le k$.
- Выберем из каждой группы по одному элементу. Тогда общее число N способов, которыми можно произвести такой выбор, равняется

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$$

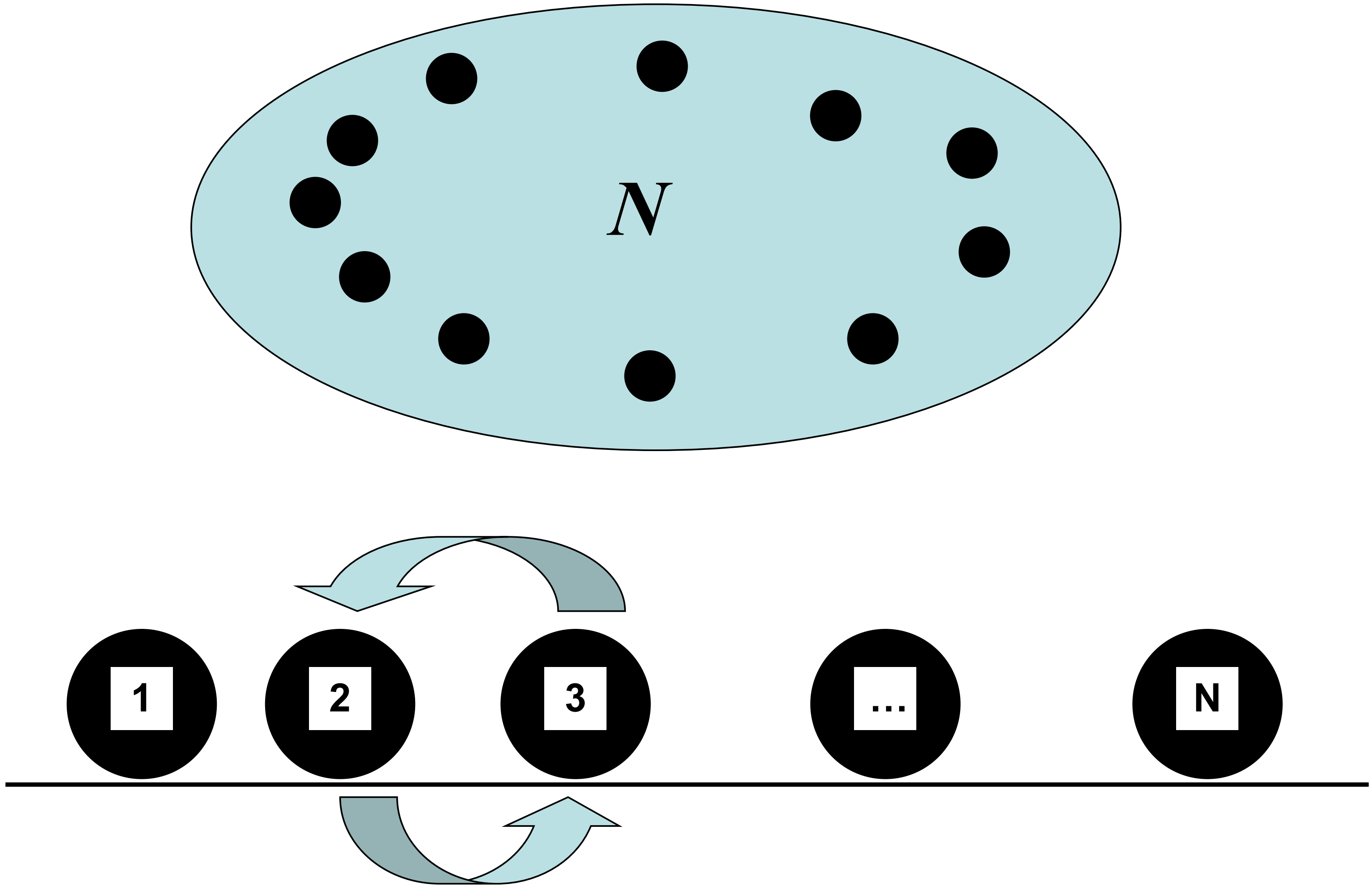
Виды комбинаций

Перестановки

Размещения

Сочетания

Перестановки: комбинации (соединения) из одних и тех же элементов, отличающиеся порядком



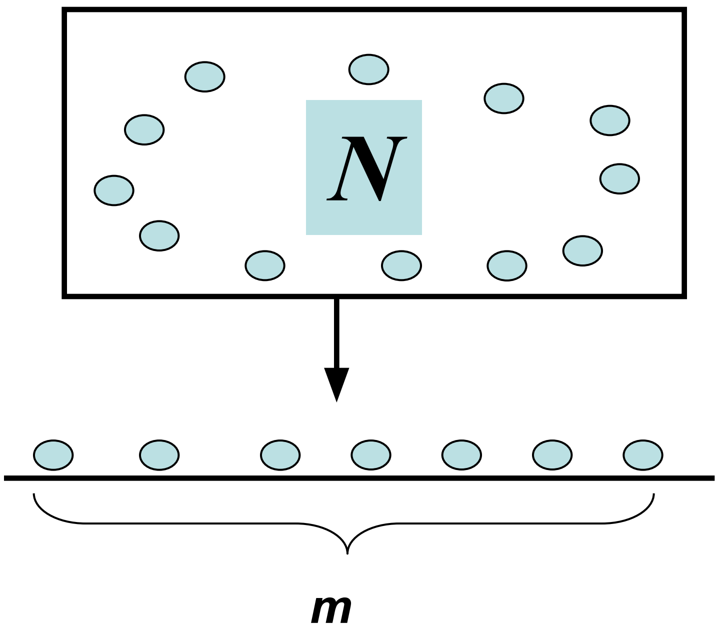
Подсчитаем число перестановок.

Используем принцип произведения комбинаций:

$$P_N = N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot (N-3) \ldots \cdot 1 = N!$$

Размещения из *N* элементов по *m* элементов

- – упорядоченные подмножества из ***m*** элементов, отличающиеся как составом, так и порядком следования элементов



$$A_N^m = N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdots (N-m+1) = \frac{N!}{(N-m)!}$$

Сочетания из *N* элементов по *m* элементов

- – неупорядоченные подмножества из *m* элементов, отличающиеся только составом элементов.
- Если в каждом сочетании произвести все возможные $m!$ перестановок, то мы получим все размещения.
- Число размещений A_N^m и число сочетаний C_N^m

Связаны соотношением:

$$A_N^m = m! \cdot C_N^m$$

Отсюда имеем:

$$C_N^m = \frac{A_N^m}{m!} = \frac{N!}{m!(N-m)!}$$

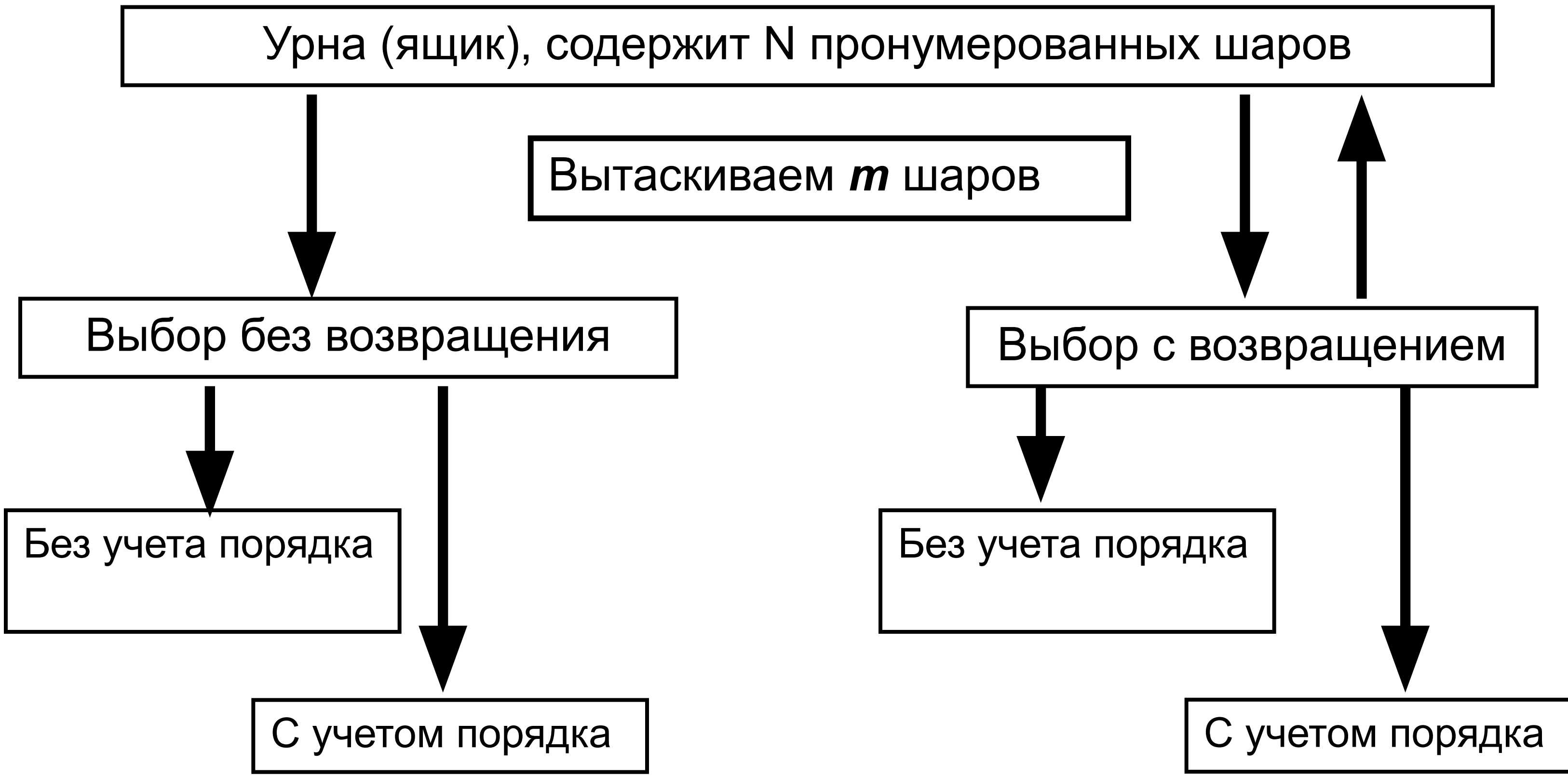
Основное свойство сочетаний

$$C_N^m = \frac{A_N^m}{m!} = \frac{N!}{m!(N-m)!} = C_N^{N-m}$$

- Образование сочетаний связано с задачей разбиения множества *N* элементов на два подмножества так, что одно из них содержит *m* элементов, а другое – оставшиеся (*N*-*m*) элементов и является простейшим случаем более общей задачи о разбиении множества на *k* неупорядоченных подмножеств, содержащих $n_1, n_2, \dots, n_k$ элементов, причем $n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$.
- Число таких комбинаций равно

$$\binom{N}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots n_k!}, n_1 + n_2 + \dots + n_k = N$$

«Урновые» схемы проведения случайных экспериментов



- Выбор без возвращения с учетом порядка

$$A_N^m = N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdots (N-m+1) = \frac{N!}{(N-m)!}$$

- Выбор без возвращения без учета порядка

$$C_N^m = \frac{A_N^m}{m!} = \frac{N!}{m!(N-m)!}$$

- Выбор с возвращением с учетом порядка

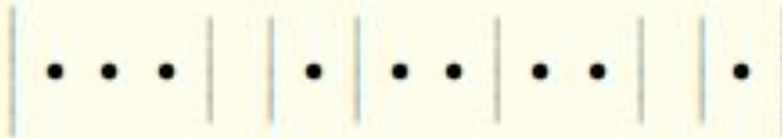
Общее количество выборок :

$$N^m = \underbrace{N \cdot N \cdot N \ldots N}_{\boldsymbol{m} \text{ раз}}$$

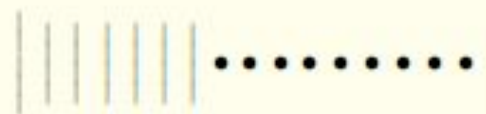
•Выбор с возвращением без учета порядка

Два
из
двух

с учетом порядка	без учета порядка
(1,1)	(1,1)
(2,2)	(2,2)
(1,2)	(1,2)
(2,1)	



И еще один:



$$C_{N+m-1}^{m} = C_{N+m-1}^{N-1}$$