

*ГОО средняя общеобразовательная школа № 80  
с углубленным изучением английского языка  
Петроградского административного района  
г. Санкт-Петербурга*



# ***Введение в комбинаторику***



Разработка уроков  
для 7 класса.

***Работа  
выполнена  
учителем  
математики  
высшей  
категории***

**Вашкевич Татьяной  
Сергеевной**



**Основная цель – развить комбинаторное мышление, сформировать умение организованного перебора упорядоченных и неупорядоченных комбинаций из двух – трех элементов.**

**В данной теме интегрируются арифметические, начальные алгебраические и геометрические знания учащихся.**

**Рассматриваются исторические комбинаторные задачи, способы составления фигурных чисел, магических и латинских квадратов, выводится формула  $n$  – го треугольного числа.**

**В ходе организованного перебора различных комбинаций элементов двух множеств обосновывается правило произведения. С его помощью решаются простейшие комбинаторные задачи.**



# Планирование уроков

- Исторические комбинаторные задачи – 1 час
- Различные комбинации из трех элементов – 2 часа
- Таблица вариантов и правило произведения – 2 часа
- Подсчет вариантов с помощью графов – 1 час

# Урок № 1.

## Тема урока: «Исторические комбинаторные задачи»



В математике существует немало задач, в которых требуется из имеющихся элементов составить различные наборы, подсчитать количество всевозможных комбинаций элементов, образованных по определенному правилу.

Такие задачи называются комбинаторными, а раздел математики, занимающийся решением этих задач, называется комбинаторикой.

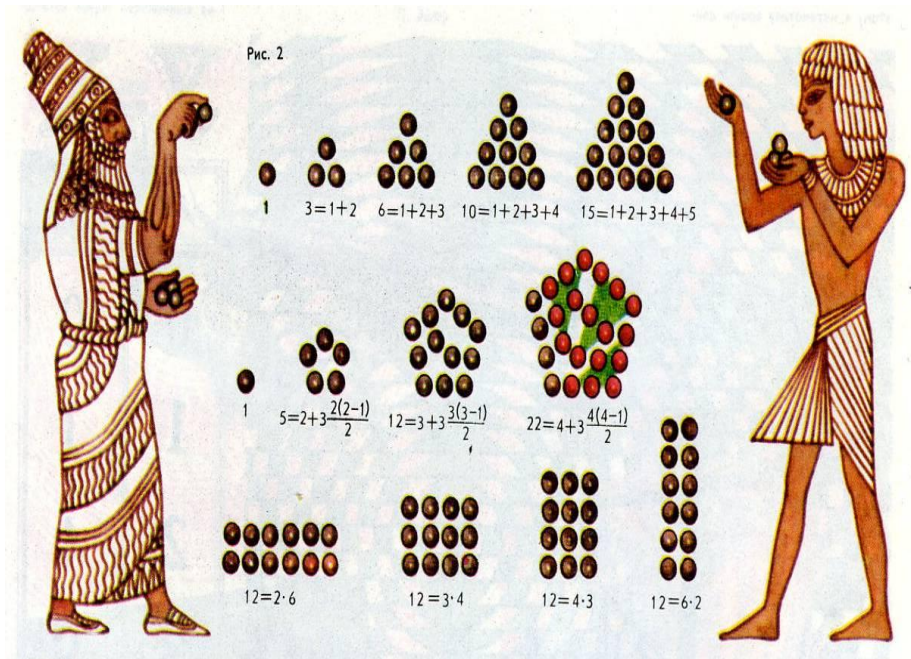
С комбинаторными задачами люди столкнулись в глубокой древности. В Древнем Китае увлекались составлением магических квадратов. В Древней Греции занимались теорией фигурных чисел.

Комбинаторные задачи возникли и в связи с такими играми, как шашки, шахматы, домино, карты, кости и т.д. Комбинаторика становится наукой лишь в 18 в. – в период, когда возникла теория вероятности.



# Фигурные числа

В древности для облегчения вычислений часто использовали камешки. При этом особое внимание уделялось числу камешков, которые можно было разложить в виде правильной фигуры.

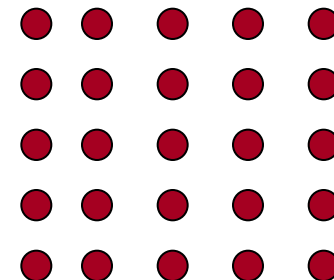
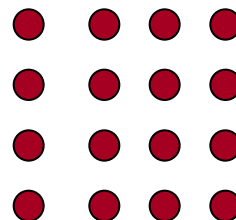
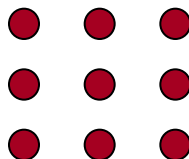
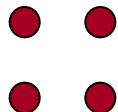




# Фигурные числа

Квадратные числа: 1,4,16,25...

1



$$2 \cdot 2 = 2^2 = 4$$

$$3 \cdot 3 = 3^2 = 9$$

$$4 \cdot 4 = 4^2 = 16$$

$$5 \cdot 5 = 5^2 = 25$$

$$N_{\text{КВ}} = n^2$$



# Фигурные числа

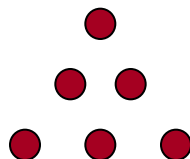
## Треугольные числа



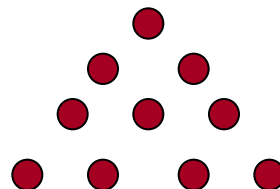
1



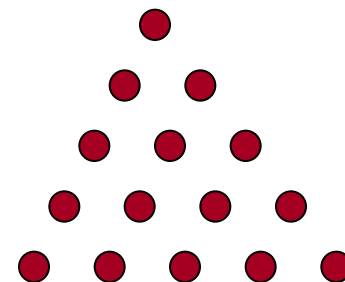
$1+2=3$



$1+2+3=5$



$1+2+3+4=10$



$1+2+3+4+5=15$

$$N_{\text{тр}} = (n(n+1))/2$$





# Фигурные числа

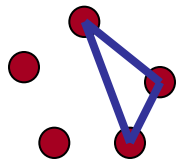
## Пятиугольные числа

$$N_{\text{пят}} = n + 3(n(n-1)/2)$$

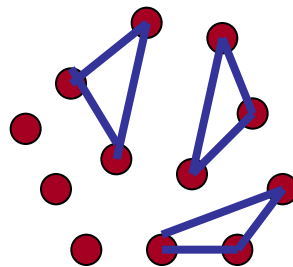
1



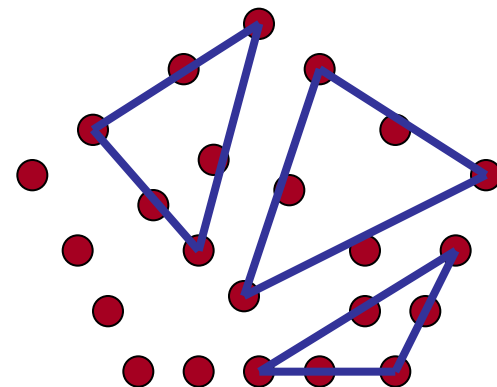
5



12



22

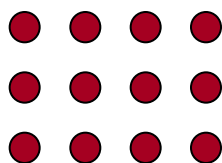
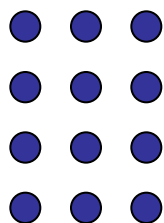
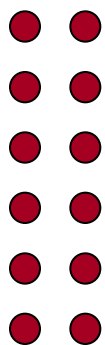




# Фигурные числа

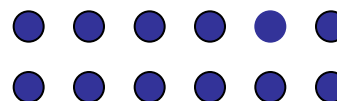
Прямоугольные числа - составные числа, которые древние представляли в виде прямоугольников.

Представления числа 12 выглядели так



12

12





# ***Фигурные числа***

**Непрямоугольные числа** – **простые числа, которые древние представляли в виде линий.**



**3**

**7**





# Магические квадраты



Рис. 71. Древнеиндийский магический квадрат.

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16



# Латинские квадраты

Латинскими квадратами называют квадраты размером  $n \times n$  клеток, в которых записаны натуральные числа от 1 до  $n$ , причем таким образом, что в каждой строке и в каждом столбце встречаются все эти числа по одному разу.

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4



# Задачи

- 1.** Посчитать число  
однобуквенных слов русского  
языка.
- 2.** Записать первые двенадцать  
квадратных чисел.
- 3.** Записать первые десять  
треугольных чисел.
- 4.** **Составить латинский квадрат.**



# Домашнее задание

1. Записать  $n$ -е по порядку кв. число, если:

1)  $n=20$ ;

2)  $n=25$       3)  $n=31$ ;

2. Записать  $n$ -е по порядку треугольное число,

если: 1)  $n=20$ ;

2)  $n=33$ ; 3)  $n=34$ ;

3. Изобразить в древних традициях всеми возможными

способами составное число: 1) 6; 2) 8; 3) 18; 4) 20;

4. Продолжить построение магического квадрата:

4	9	
	5	

	5	
4	3	

4		
9	5	





# Задачи

**1) Однобуквенных слов русского языка 11:**

**а, б, в, ж, и, к, о, с, у, э, я.**







# Задачи

2) 1, 4, 9,

16, 25, 36,

49, 64, 81,

100, 121





# Задачи

3) 1, 3, 6,

10, 15, 21,

28, 36, 45,

55.



## **Уроки № 2-3**

### **Тема урока: «Различные комбинации трех элементов»**



Нередко в жизни бывают ситуации, когда задача имеет не одно, а несколько решений, которые нужно сравнить, а может быть, и выбрать наиболее подходящее для конкретной ситуации.





# Сочетания

## Задача № 1

Три друга – Антон, Борис и Виктор – приобрели два билета на футбольный матч. Сколько существует различных вариантов посещения футбольного матча для троих друзей?



# Сочетания



Антон и Борис

Антон и Виктор



Борис и Виктор

Ответ: 3 варианта.



# Сочетания

## Вывод:

В задаче были составлены всевозможные **сочетания** из трех элементов по два: пары элементов из имеющихся трех элементов. Пары отличались друг от друга только составом элементов, а порядок расположения элементов в паре не учитывался.



# Размещения


## Задача № 2

Три друга – Антон, Борис и Виктор – приобрели два билета на футбольный матч на 1-ое и 2-ое места первого ряда стадиона. Сколько у друзей есть вариантов (способов) занять эти два места на стадионе? Записать все эти варианты.



# Размещения



	I	II	III	IV	V	VI
1-ое место	<b>A</b>	<b>Б</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>Б</b>	<b>B</b>
2-ое место	<b>Б</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>A</b>	<b>B</b>	<b>Б</b>





# Размещения

## Вывод:

В задаче из трех элементов выбирались пары элементов и фиксировался их порядок расположения в паре, т.е. все составленные пары отличались друг от друга либо составом элементов, либо их расположением в паре. В комбинаторике такие пары называют **размещениями** из трех элементов по два.



# Перестановки


## Задача № 3

Антону, Борису и Виктору повезло, и они купили 3 билета на футбол на 1-ое, 2-ое и 3-е места первого ряда стадиона. Сколькими способами могут занять мальчики эти места?



# Перестановки



	I	II	III	IV	V	VI
1-ое место	<b>А</b>	<b>Б</b>	<b>А</b>	<b>В</b>	<b>Б</b>	<b>В</b>
2-ое место	<b>Б</b>	<b>А</b>	<b>В</b>	<b>А</b>	<b>В</b>	<b>Б</b>
3 – е место	<b>В</b>	<b>В</b>	<b>Б</b>	<b>Б</b>	<b>А</b>	<b>А</b>



# Перестановки

## Вывод:

В задаче были составлены всевозможные **перестановки** из трех элементов – комбинации из трех элементов, отличающихся друг от друга порядком расположения в них элементов.



# Устные задачи

- 1) Сколько подарочных наборов можно составить:
  - а) из одного предмета;
  - б) из двух предметов,если в наличии имеются одна ваза и одна ветка сирени?
  
- 2) Сколькими способами Петя и Вова могут занять 2 места за одной двухместной партой?



# Задачи

1) Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2 и 3 при условии, что цифры в числе:

а) должны быть различными;

б) могут повторяться?



# Решение

а) Способ составления трехзначных чисел из 3 различных цифр аналогичен способу записи троек букв в задаче 3:

**123, 213, 132, 312, 231, 321.**

Получили 6 чисел.



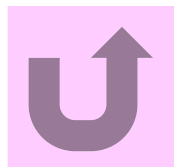


# Решение

б) Перебор вариантов можно организовать следующим образом. Выпишем все числа, начинающиеся с цифры 1 в порядке их возрастания; затем – начинающиеся с цифры 2; после чего – начинающиеся с цифры 3:

111	112	113	211	212	213	311	312	313
121	122	123	221	222	223	321	322	323
131	132	133	231	232	233	331	332	333

Получили 27 чисел.







# Задачи

§2 «Различные комбинации из трех элементов»

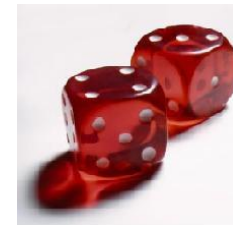
**На уроках решаются задачи  
№№ 3, 5, 7, 9, 11.**

**Домашнее задание  
№№ 2, 4, 6, 8, 10.**



**Уроки № 4 – 5**

**Тема урока: «Таблица вариантов и  
правило**



**произведения»**

**Для решения комбинаторных задач  
существуют различные средства,  
исключающие возможность «потери»  
какой – либо комбинации элементов.**

**Для подсчета числа комбинаций из двух  
элементов таким средством является  
таблица вариантов.**

# Таблица вариантов



## Задача №1.

**Записать всевозможные двузначные числа, используя при этом цифры:**

**1) 1, 2 и 3;**

**2) 0, 1, 2 и 3.**

**Подсчитать их количество  $N$ .**

Для подсчета образующихся чисел  
составим таблицу:

1 – я цифра	2 – я цифра		
	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

$$N = 3 \cdot 3 = 9$$

Для подсчета образующихся чисел  
составим таблицу:

1 – я цифра	2 – я цифра			
	0	1	2	3
1	10	11	12	13
2	20	21	22	23
3	30	31	32	33

$$N = 3 \cdot 4 = 12$$

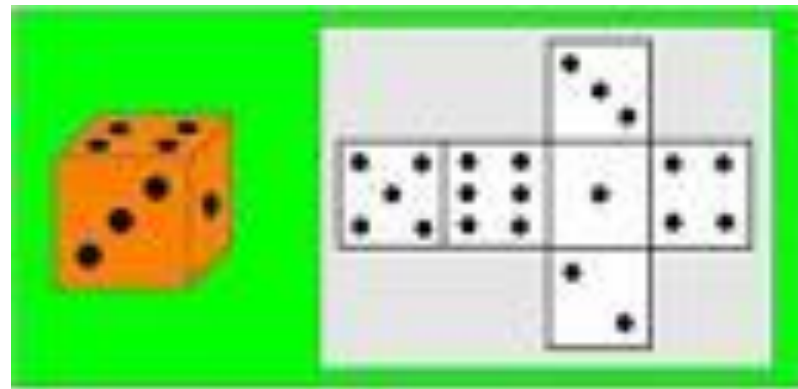
# Таблица вариантов



## Задача № 2.

**Бросаются две игральные кости.**

**Сколько различных пар очков может появиться на верхних гранях костей?**



С помощью составленной таблицы пар выпавших очков можно утверждать, что число всевозможных пар равно

$$6 \cdot 6 = 36$$

Число очков на 1 кости	Число очков на 2 кости					
	1	2	3	4	5	6
1	11	12	13	14	15	16
2	21	22	23	24	25	26
3	31	32	33	34	35	36
4	41	42	43	44	45	46
5	51	52	53	54	55	56
6	61	62	63	64	65	66



# Правило произведения.

Для решения задач, аналогичных задачам 1 и 2, необязательно каждый раз составлять таблицу вариантов. Можно пользоваться правилом, которое получило в комбинаторике название «Правило произведения»:

если существует  **$n$**  вариантов выбора первого элемента и для каждого из них есть  **$m$**  вариантов выбора второго элемента, то всего существует  **$n \cdot m$**  различных пар с выбранными первым и вторым элементами.





# Правило произведения.

## Задача № 3.

Катя и Оля приходят в магазин, где продают в любом количестве плитки шоколада трех видов. Каждая девочка покупает по одной плитке. Сколько существует способов покупки?





# Правило произведения.

## Задача № 3. (решение)

Катя может купить плитку любого из трех видов шоколада ( $n=3$ ). Оля может поступить аналогично ( $m=3$ ). Пару шоколадок для Кати и для Оли можно составить  $n \cdot m = 3 \cdot 3 = 9$  различными способами.

Ответ: 9 способов.





# Правило произведения.

## Задача № 4.

Имеются три плитки шоколада различных видов. Катя и Оля по очереди выбирают себе по одной плитке. Сколько существует различных способов выбора шоколадок для Кати и Оли?





# Правило произведения.

## Задача № 4. (решение)

Допустим первой шоколадку выбирает Катя. У нее есть 3 возможности выбора плитки ( $n=3$ ). После этого Оля может выбрать одну из двух оставшихся плиток ( $m=2$ ). Тогда способов выбрать пару шоколадок для Кати и для Оли существует  $n \cdot m = 3 \cdot 2 = 6$ .

Ответ: 6 способов.





# Правило произведения.

## Задача № 5.

Сколько существует различных двузначных кодов, составленных с помощью букв **А, Б, В, Г** и **Д**, если буквы в коде:

- 1) могут повторяться;
- 2) должны быть различными?

**А Б В Г Д**



# Правило произведения.

## Задача № 5. (решение)

1) Первой в коде может быть любая из данных букв ( $n=5$ ), а второй – также любая из пяти ( $m=5$ ). Согласно правилу произведения число всевозможных букв (с возможным их повторением в паре) равно

$$n \cdot m = 5 \cdot 5 = 25.$$



# Правило произведения.

**Задача № 5.** (решение)

2) Первой в коде может быть любая из пяти данных букв ( $n=5$ ), а второй – любая из четырех, отличных от первой ( $m=4$ ).

Согласно правилу произведения число двузначных кодов с различными буквами будет равно

$$n \cdot m = 5 \cdot 4 = 20.$$

**Ответ:** 1) 25; 2) 20.



# Задачи

§3 «Таблица вариантов и правило произведения»

**На уроках решаются задачи**

**№№ 3, 5, 7, 9, 11.**

**Домашнее задание**

**№№ 2, 4, 6, 8, 10, 12.**





## Урок № 6

# Тема урока: «Подсчет вариантов с помощью графов»



Перебрать и подсчитать всевозможные комбинации из данных элементов несложно, когда их количество невелико. Однако, когда их количество больше, например, 20, то при переборе легко упустить какую-либо из них.

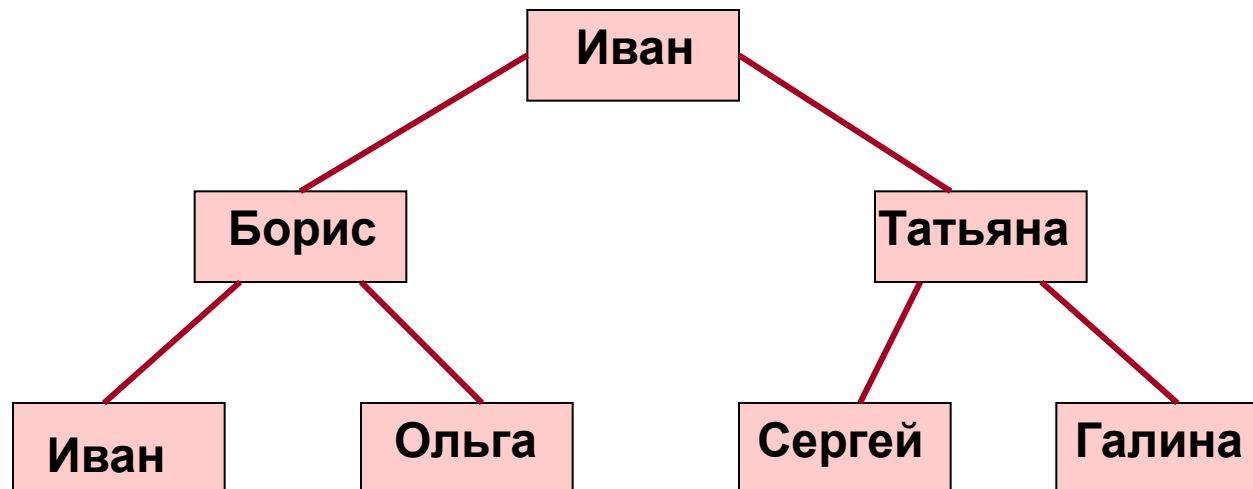
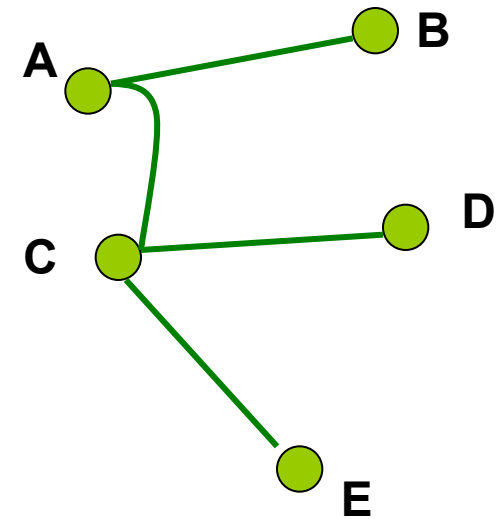
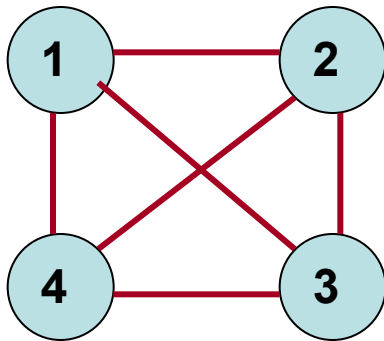
Нередко подсчет вариантов облегчают графы.

Графы – геометрические фигуры, состоящие из точек (их называют вершинами) и соединяющих их отрезков (называемых ребрами графа).

# Подсчет вариантов с помощью графов



Приведем примеры различных графов





# Полный граф

## Задача № 1

Андрей, Борис, Виктор и Григорий играли в шахматы. Каждый сыграл с каждым по одной партии. Сколько партий было сыграно?

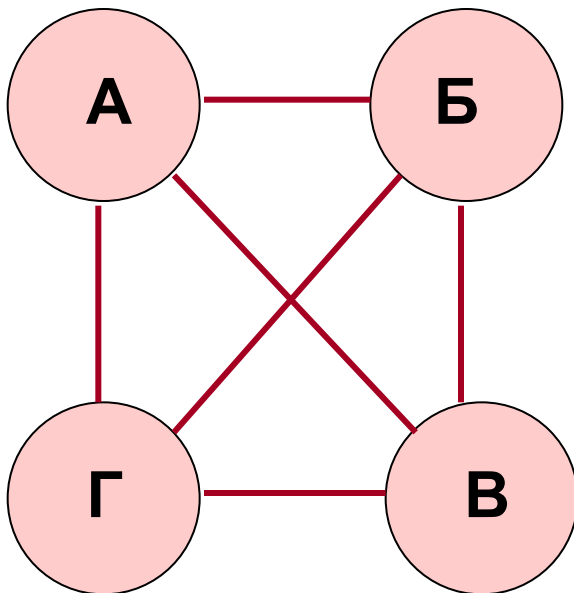


Решим задачу с помощью полного графа.

Вершины – первые буквы имен мальчиков, а отрезки-ребра обозначают шахматные партии.



# Полный граф



Из рисунка видно, что граф имеет 6 ребер, значит, и партий было сыграно 6.

Ответ: 6 партий.



# Полный граф

## Задача № 2

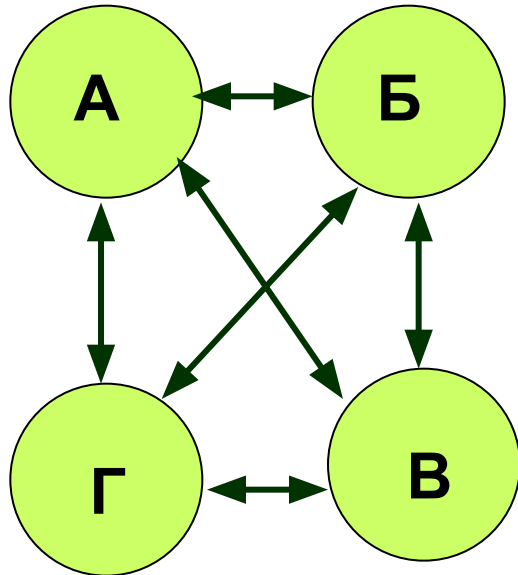


Андрей, Борис, Виктор и Григорий после возвращения из спортивного лагеря подарили на память друг другу свои фотографии. Причем каждый мальчик подарил каждому по одной фотографии. Сколько всего фотографий было подарено?





# Полный граф



С помощью стрелок на ребрах полного графа с вершинами А, Б, В и Г показан процесс обмена фотографиями.

Очевидно, что стрелок в 2 раза больше, чем ребер, т. е.  $6 \cdot 2 = 12$ . Столько же было подарено фотографий.

Ответ: 12 фотографий.



# Граф - дерево

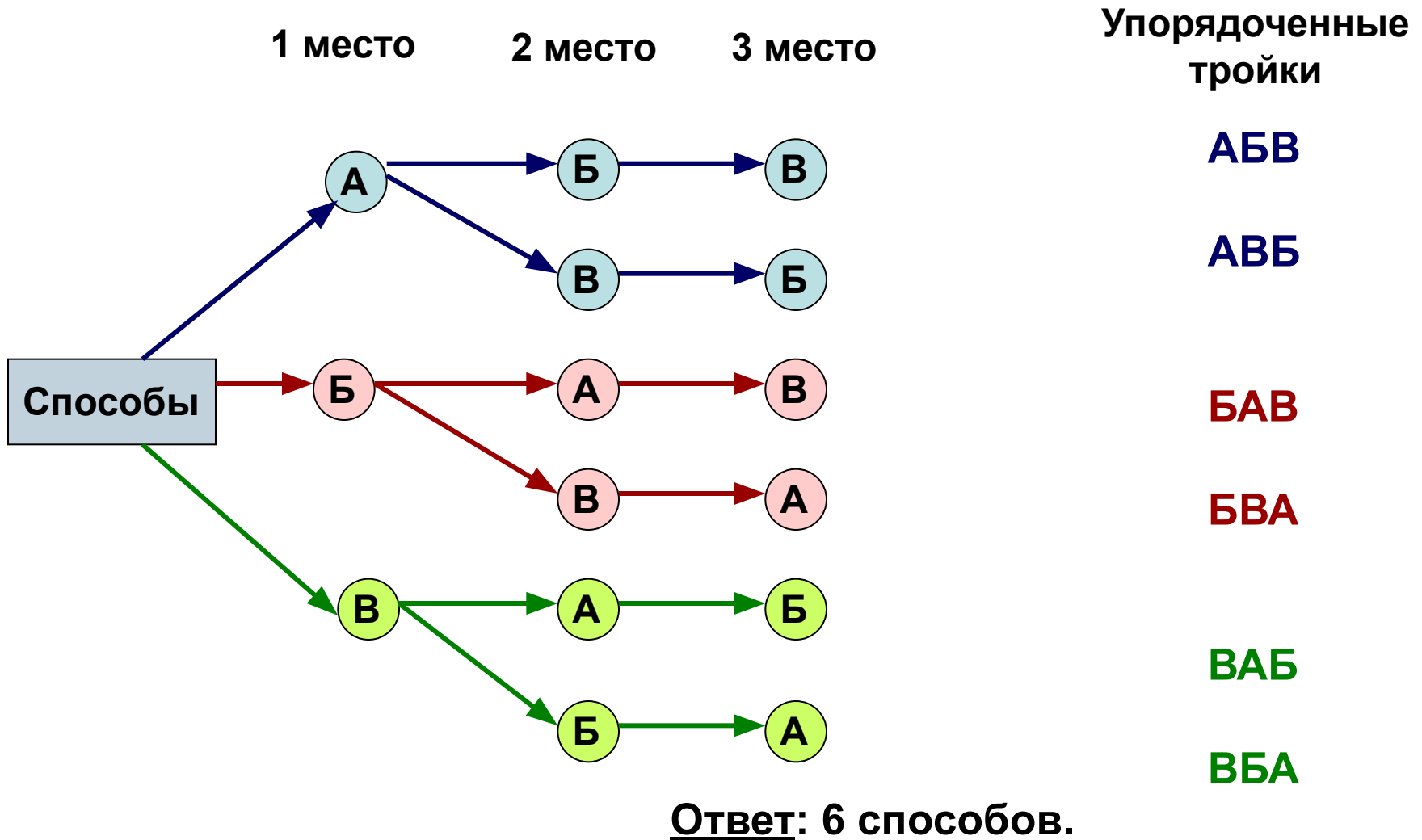
## Задача № 3

Антон, Борис и Василий купили 3 билета на футбольный матч на 1, 2 и 3-е места первого ряда. Сколькими способами они могут занять имеющиеся три места?





# Граф - дерево







# Граф - дерево

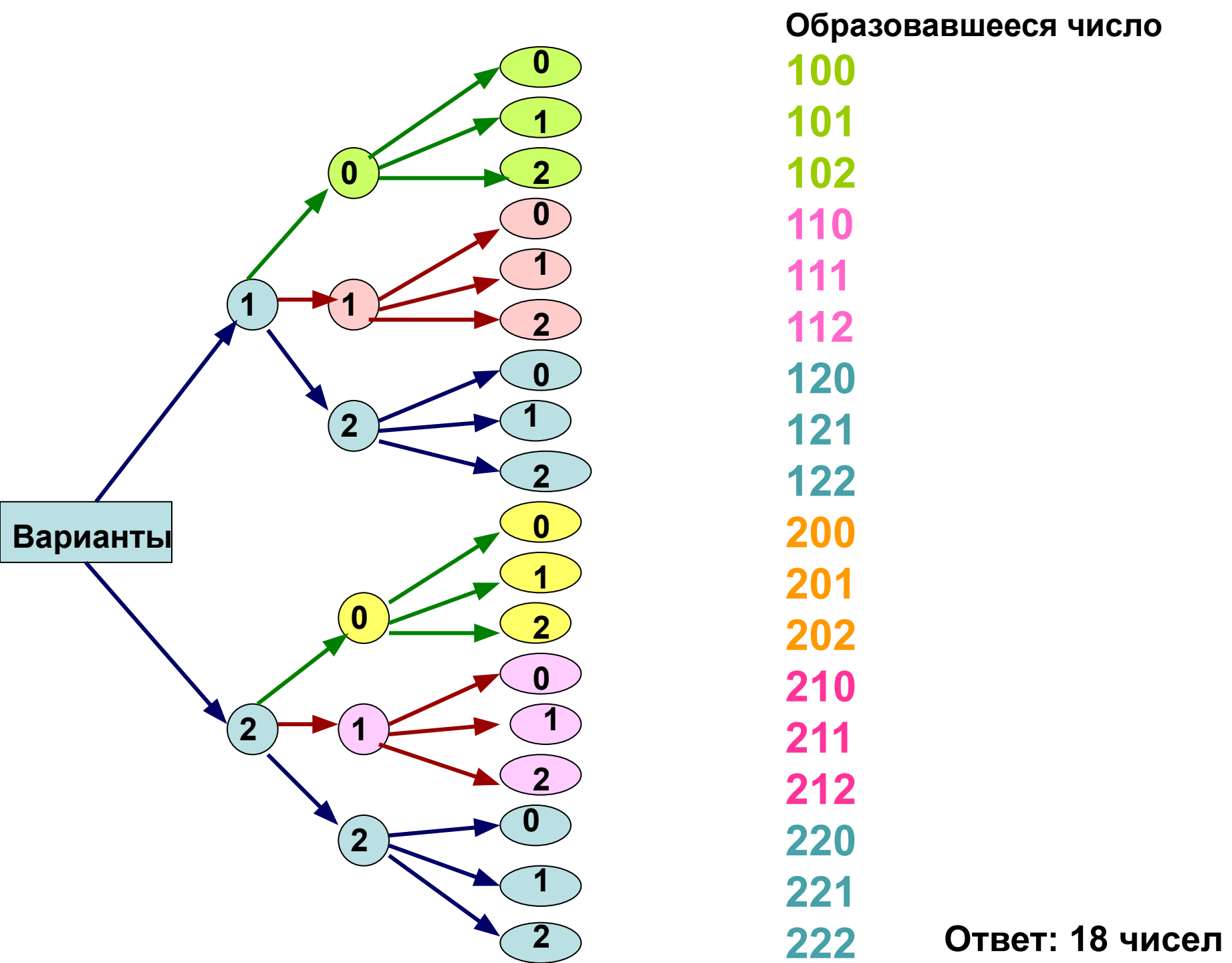
## Задача № 4

Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, если цифры в числе могут повторяться?

213      543      753                      849                      109      760

376 **213**      934 **543**      875 **753**                      **849**                      **109**      **760**  
777                      201

**376**      **934**      **875**                      **777**





# Задачи

§ 4 «Подсчет вариантов с помощью графов»

**На уроках решаются задачи  
№№ 3, 5, 7, 9, 11.**

**Домашнее задание  
№№ 2, 4, 6, 8, 10, 12.**





# Контрольная работа

## 1 вариант

- 1) С помощью цифр 7, 8 и 9 записать всевозможные двузначные числа, в которых цифры: а) должны быть разными; б) могут повторяться.
- 2) Анна, Белла и Вера купили билеты в кинотеатр на 1, 2 и 3-е места первого ряда. Перечислить все возможные способы, которыми девочки могут занять эти места.
- 3) У лесника три собаки: Астра, Вега и Гриф. На охоту лесник решил пойти с двумя собаками. Перечислить все варианты выбора лесником пары собак.



# Контрольная работа

## 2 вариант

- 1) Перечислить все двузначные числа, в записи которых используются только цифры 8, 9 и 0, если:  
а) одинаковых цифр в числах не должно быть; б) цифры в числах могут повторяться.
- 2) Из трех стаканов сока – ананасового, брусничного и виноградного – Иван решил последовательно выпить два. Перечислить все варианты, которыми это можно сделать.
- 3) У Марии 3 юбки и 5 кофт, удачно сочетающихся по цвету. Сколько различных комбинаций из юбок и кофт имеется у Марии?