ГОУ средняя общеобразовательная школа № 80 с углубленным изучением английского языка Петроградского административного района г. Санкт-Петербурга

Введение в комбинаторику

Разработка уроков для7класса.

Работа выполнена учителем математики высшей категории

Вашкевич Татьяной Сергеевной

Основная цель – *развить комбинаторное мышление, сформировать умение организованного перебора упорядоченных и неупорядоченных комбинаций из двух – трех элементов.*

- **В данной теме интегрируются арифметические, начальные алгебраические и геометрические знания учащихся.**
- **Рассматриваются исторические комбинаторные задачи, способы составления фигурных чисел, магических и латинских квадратов, выводится формула n – го треугольного числа.**
- **В ходе организованного перебора различных комбинаций элементов двух множеств обосновывается правило произведения. С его помощью решаются простейшие комбинаторные задачи.**

Планирование уроков

- Исторические комбинаторные задачи – 1 час
- Различные комбинации из трех элементов – 2 часа
- Таблица вариантов и правило произведения- 2 часа
- Подсчет вариантов с помощью графов – 1 час

Урок № 1.
Тема урока: «Исторические комбинаторные задачи»

В математике существует немало задач, в которых требуется из имеющихся элементов составить различные наборы, подсчитать количество всевозможных комбинаций элементов, образованных по определенному правилу.

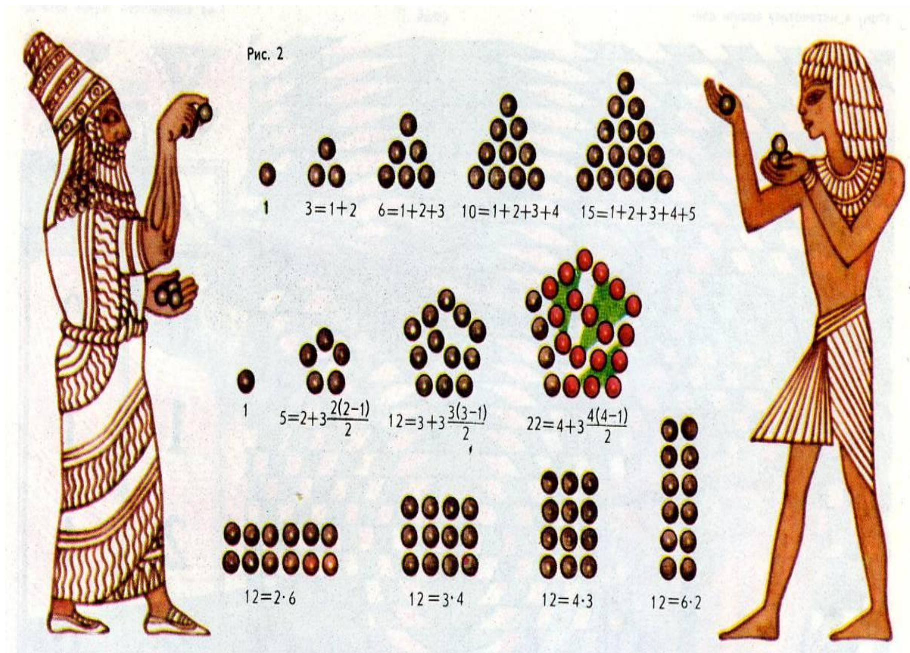
Такие задачи называются ***комбинаторными***, а раздел математики, занимающийся решением этих задач, называется ***комбинаторикой***.

С комбинаторными задачами люди столкнулись в глубокой древности. В Древнем Китае увлекались составлением магических квадратов. В Древней Греции занимались теорией фигурных чисел.

Комбинаторные задачи возникли и в связи с такими играми, как шашки, шахматы, домино, карты, кости и т.д. Комбинаторика становится наукой лишь в 18 в. – в период, когда возникла теория вероятности.

Фигурные числа

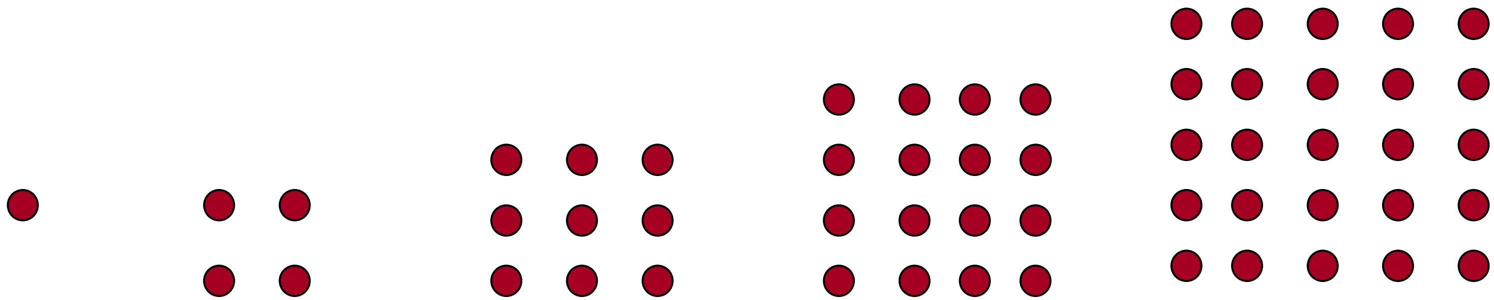
В древности для облегчения вычислений часто использовали камешки. При этом особое внимание уделялось числу камешков, которые можно было разложить в виде правильной фигуры.



Фигурные числа

<u>Квадратные числа:</u> 1,4,16,25…

1

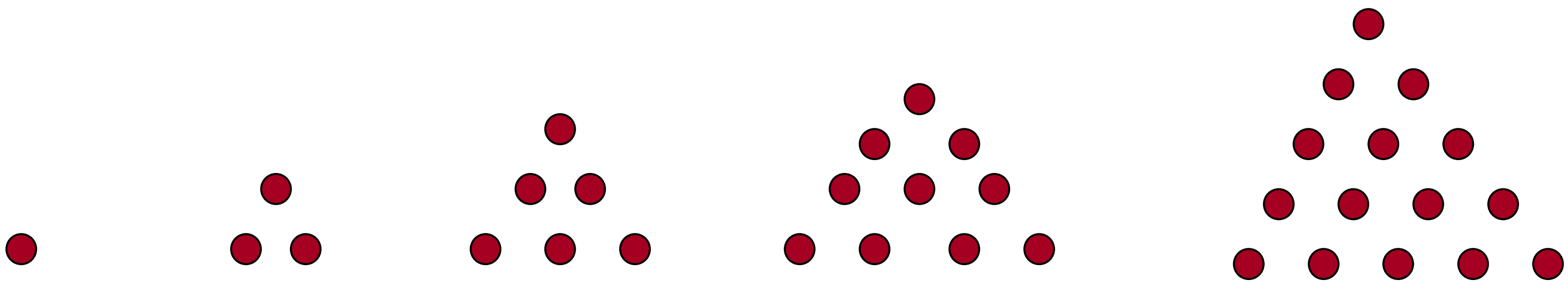


2*2=2 =4 **3*3=3 =9** **4*4=4 =16** **5*5=5 =25**

$$N_{кв} = n^2$$

Фигурные числа

<u>Треугольные числа</u>



1 1+2=3 1+2+3=5 1+2+3+4=10 1+2+3+4+5=15

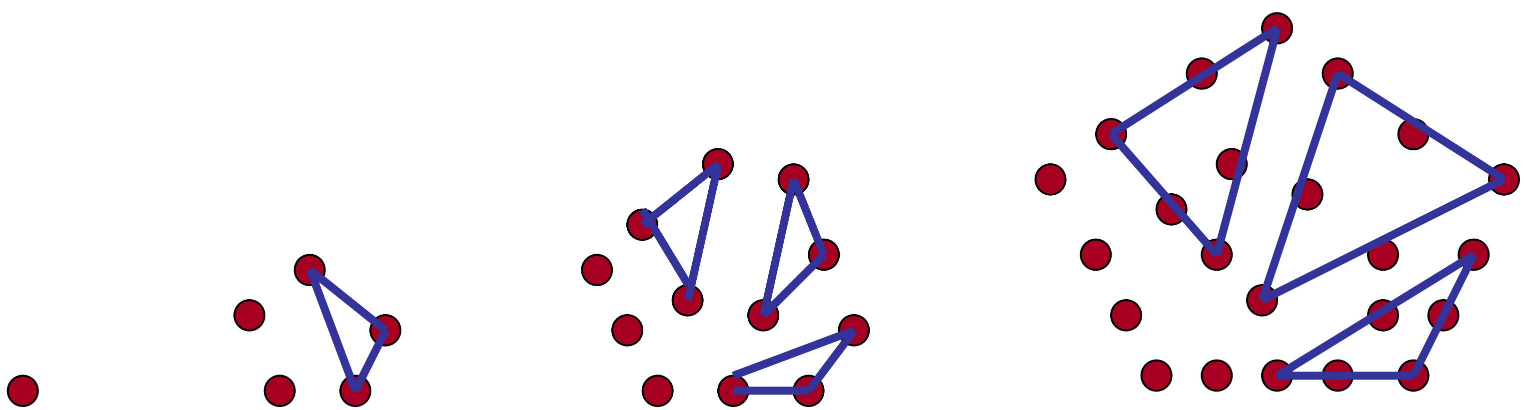
$N_{тр} = (n(n+1))/ 2$

Фигурные числа

<u>Пятиугольные числа</u>

$$N_{пят} = n + 3(n(n-1)/2)$$

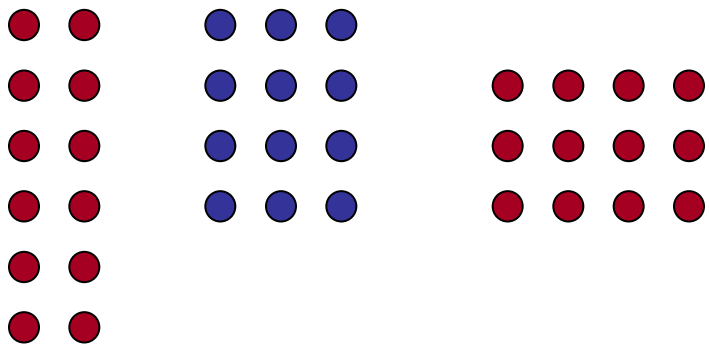
1 5 12 22



Фигурные числа

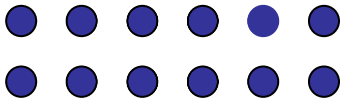
<u>Прямоугольные числа-</u> составные числа, которые древние представляли в виде прямоугольников.

Представления числа 12 выглядели так



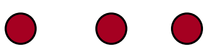
12

12



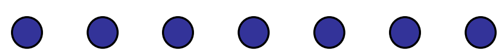
Фигурные числа

__Непрямоугольные числа__ – простые числа, которые древние представляли в виде линий.



7

3



Магические квадраты

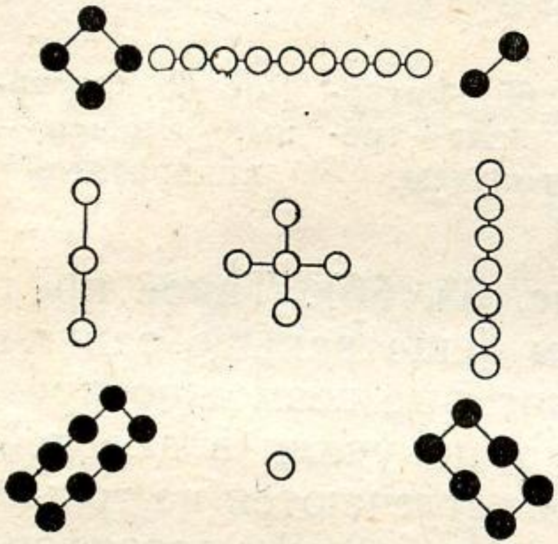


Рис. 69. Девятиклеточный старинный магический квадрат.

1	14	15	4
12	7	6	9
8	11	10	5
13	2	3	16

Рис. 71. Древнеиндийский магический квадрат.

Латинские квадраты

Латинскими квадратами называют квадраты размером n x n клеток, в которых записаны натуральные числа от 1 до n, причем таким образом, что в каждой строке и в каждом столбце встречаются все эти числа по одному разу.

1	2	3	4	5
2	3	4	5	1
3	4	5	1	2
4	5	1	2	3
5	1	2	3	4

Задачи

1. Посчитать число однобуквенных слов русского языка.
2. Записать первые двенадцать квадратных чисел.
3. Записать первые десять треугольных чисел.
4. Составить латинский квадрат.

Домашнее задание

1. Записать *n*- е по порядку кв. число, если:
   1) *n* =20;
   2) *n* =25 3) *n* =31;
2. Записать *n*- е по порядку треугольное число, если: 1) n=20;
   2) n=33; 3) n=34;
3. Изобразить в древних традициях всеми возможными способами составное число: 1) 6; 2) 8; 3) 18; 4) 20;
4. Продолжить построение магического квадрата:

4	9	
	5	

	5	
4	3	

4		
9	5	

Задачи

1) Однобуквенных слов русского языка 11:

а, б, в, ж, и, к, о, с, у, э, я.

Задачи

2) **1, 4, 9,**

16,25, 36,

49, 64, 81,

100, 121

Задачи

3) **1, 3, 6,**

10, 15, 21,

28, 36, 45,

55.

Уроки № 2-3

Тема урока: «Различные комбинац

трех элементо»

Нередко в жизни бывают ситуации, когда задача имеет не одно, а несколько решений, которые нужно сравнить, а может быть, и выбрать наиболее подходящее для конкретной ситуации.

Сочетания

Задача № 1

Три друга – Антон, Борис и Виктор – приобрели два билета на футбольный матч. Сколько существует различных вариантов посещения футбольного матча для троих друзей?

Сочетания

Антон и Борис

Антон и Виктор

Борис и Виктор

Ответ: 3 варианта.

Сочетания

Вывод:

В задаче были составлены всевозможные **сочетания** из трех элементов по два: пары элементов из имеющихся трех элементов. Пары отличались друг от друга только составом элементов, а порядок расположения элементов в паре не учитывался.

Размещения

Задача № 2

Три друга – Антон, Борис и Виктор – приобрели два билета на футбольный матч на 1-ое и 2-ое места первого ряда стадиона. Сколько у друзей есть вариантов (способов) занять эти два места на стадионе? Записать все эти варианты.

Размещения

	I	II	III	IV	V	VI
1-ое место	А	Б	А	В	Б	В
2-ое место	Б	А	В	А	В	Б

Размещения

Вывод:

В задаче из трех элементов выбирались пары элементов и фиксировался их порядок расположения в паре, т.е. все составленные пары отличались друг от друга либо составом элементов, либо их расположением в паре. В комбинаторике такие пары называют **размещениями** из трех элементов по два.

Перестановки

Задача № 3

Антону, Борису и Виктору повезло, и они купили 3 билета на футбол на 1-ое, 2-ое и 3-е места первого ряда стадиона. Сколькими способами могут занять мальчики эти места?

Перестановки

	I	II	III	IV	V	VI
1-ое место	А	Б	А	В	Б	В
2-ое место	Б	А	В	А	В	Б
3 – е место	В	В	Б	Б	А	А

Перестановки

Вывод:

В задаче были составлены всевозможные **перестановки** из трех элементов – комбинации из трех элементов, отличающихся друг от друга порядком расположения в них элементов.

Устные задачи

1) Сколько подарочных наборов можно составить:

а) из одного предмета;

б) из двух предметов,

если в наличии имеются одна ваза и одна ветка сирени?

2) Сколькими способами Петя и Вова могут занять 2 места за одной двухместной партой?

Задачи

1) Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 1, 2 и 3 при условии, что цифры в числе:

а) должны быть различными;

б) могут повторяться?

Решение

а) Способ составления трехзначных чисел из 3 различных цифр аналогичен способу записи троек букв в задаче 3:

123, 213, 132, 312, 231, 321.

Получили 6 чисел.

Решение

б) Перебор вариантов можно организовать следующим образом. Выпишем все числа, начинающиеся с цифры 1 в порядке их возрастания; затем – начинающиеся с цифры 2; после чего – начинающиеся с цифры 3:

111	112	113	211	212	213	311	312	313
121	122	123	221	222	223	321	322	323
131	132	133	231	232	233	331	332	333

Получили 27 чисел.

Задачи

§2 «Различные комбинации из трех элементов»

На уроках решаются задачи

№№ 3, 5, 7, 9, 11.

Домашнее задание

№№ 2, 4, 6, 8, 10.

Уроки № 4 – 5
Тема урока: «Таблица вариантов и правило произведения»

Для решения комбинаторных задач существуют различные средства, исключающие возможность «потери» какой – либо комбинации элементов.

Для подсчета числа комбинаций из двух элементов таким средством является таблица вариантов.

Таблица вариантов

Задача №1.

Записать всевозможные двузначные числа, используя пр этом цифры:

1) 1, 2 и 3;

2) 0, 1, 2 и 3.

Подсчитать их количество N.

Для подсчета образующихся чисел составим таблицу:

1 – я цифра	2 – я цифра		
	1	2	3
1	11	12	13
2	21	22	23
3	31	32	33

$N = 3 \cdot 3 = 9$

Для подсчета образующихся чисел составим таблицу:

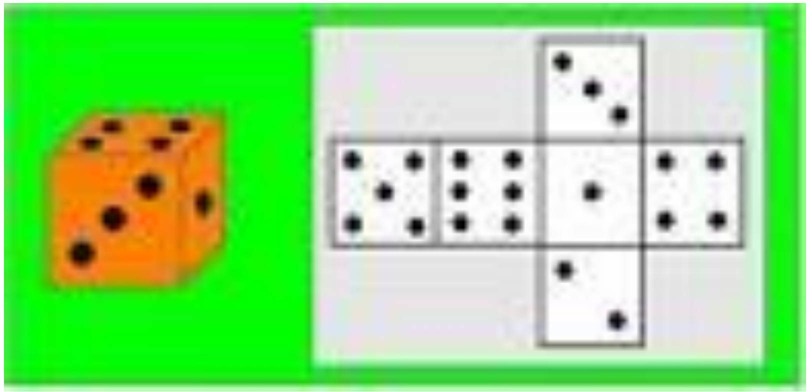
1 – я цифра	2 – я цифра			
	0	1	2	3
1	10	11	12	13
2	20	21	22	23
3	30	31	32	33

$N = 3 \cdot 4 = 12$

Таблица вариантов

Задача № 2.

Бросаются две игральные кости. Сколько различных пар очков может появиться на верхних гранях костей?



С помощью составленной таблицы пар выпавших очков можно утверждать, что число всевозможных пар равно

6·6 = 36

Число очков на 1 кости	Число очков на 2 кости					
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
2	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**
3	**31**	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**
4	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**
5	**51**	**52**	**53**	**54**	**55**	**56**
6	**61**	**62**	**63**	**64**	**65**	**66**

Правило произведения.

Для решения задач, аналогичных задачам 1 и 2, необязательно каждый раз составлять таблицу вариантов. Можно пользоваться правилом, которое получило в комбинаторике название «Правило произведения»:

если существует **n** вариантов выбора первого элемента и для каждого из них есть **m** вариантов выбора второго элемента, то всего существует **n·m** различных пар с выбранными первым и вторым элементами.

Правило произведения.

<u>Задача № 3.</u>

Катя и Оля приходят в магазин, где продают в любом количестве плитки шоколада трех видов. Каждая девочка покупает по одной плитке. Сколько существует способов покупки?

Правило произведения.

Задача № 3. (решение)

Катя может купить плитку любого из трех видов шоколада (n=3). Оля может поступить аналогично (m=3). Пару шоколадок для Кати и для Оли можно составить n·m=3·3=9 различными способами.

Ответ: 9 способов.

Правило произведения.

<u>Задача № 4.</u>

Имеются три плитки шоколада различных видов. Катя и Оля по очереди выбирают себе по одной плитке. Сколько существует различных способов выбора шоколадок для Кати и Оли?

Правило произведения.

Задача № 4. (решение)

Допустим первой шоколадку выбирает Катя. У нее есть 3 возможности выбора плитки (n=3). После этого Оля может выбрать одну из двух оставшихся плиток (m=2). Тогда способов выбрать пару шоколадок для Кати и для Оли существует $n \cdot m = 3 \cdot 2 = 6$.

Ответ: 6 способов.

Правило произведения.

<u>Задача № 5.</u>

Сколько существует различных двузначных кодов, составленных с помощью букв А, Б, В, Г и Д, если буквы в коде:

1) могут повторяться;

2) должны быть различными?

А Б В Г Д

Правило произведения.

Задача № 5. (решение)

1) Первой в коде может быть любая из данных букв (n=5), а второй – также любая из пяти (m=5). Согласно правилу произведения число всевозможных букв (с возможным их повторением в паре) равно

$$n \cdot m = 5 \cdot 5 = 25.$$

Правило произведения.

Задача № 5. (решение)

2) Первой в коде может быть любая из пяти данных букв (n=5), а второй – любая из четырех, отличных от первой (m=4). Согласно правилу произведения число двузначных кодов с различными буквами будет равно

$$n \cdot m = 5 \cdot 4 = 20.$$

Ответ: 1) 25; 2) 20.

Задачи

§3 «Таблица вариантов и правило произведения»

На уроках решаются задачи

№№ 3, 5, 7, 9, 11.

Домашнее задание

№№ 2, 4, 6, 8, 10, 12.

Урок № 6
Тема урока: «Подсчет вариантов с помощью графов»

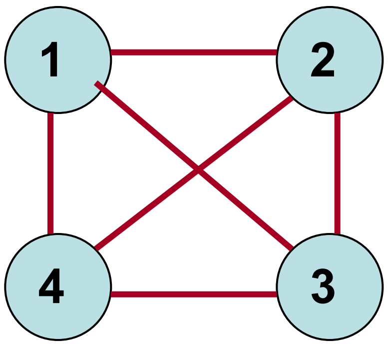
Перебрать и подсчитать всевозможные комбинации из данных элементов несложно, когда их количество невелико. Однако, когда их количество больше, например, 20, то при переборе легко упустить какую-либо из них.

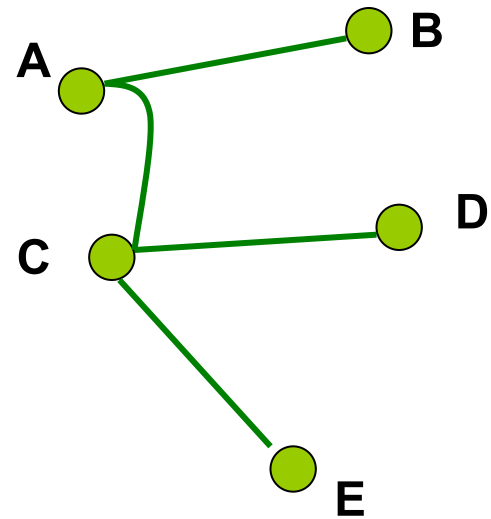
Нередко подсчет вариантов облегчают графы.

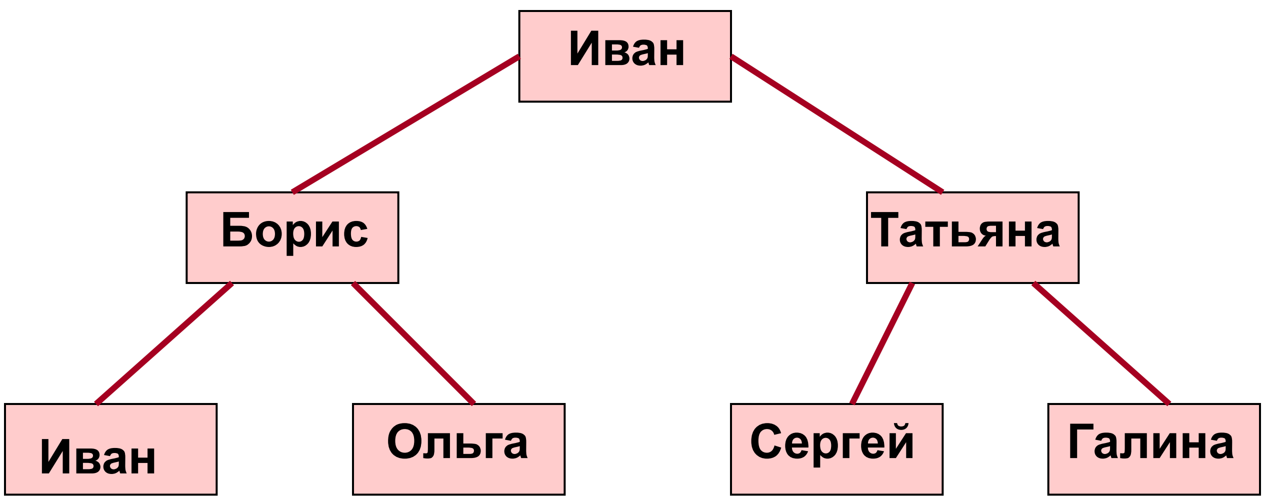
Графы – геометрические фигуры, состоящие из точек (их называют вершинами) и соединяющих их отрезков (называемых ребрами графа).

Подсчет вариантов с помощью графов

Приведем примеры различных графов







Полный граф

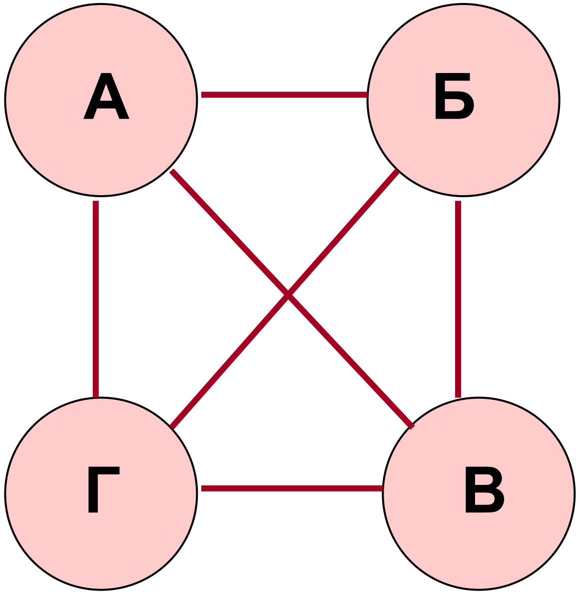
Задача № 1

Андрей, Борис, Виктор и Григорий играли в шахматы. Каждый сыграл с каждым по одной партии. Сколько партий было сыграно?

Решим задачу с помощью полного графа.

Вершины – первые буквы имен мальчиков, а отрезки-ребра обозначают шахматные партии.

Полный граф



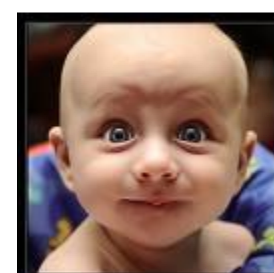
Из рисунка видно, что граф имеет 6 ребер, значит, и партий было сыграно 6.

<u>Ответ:</u> 6 партий.

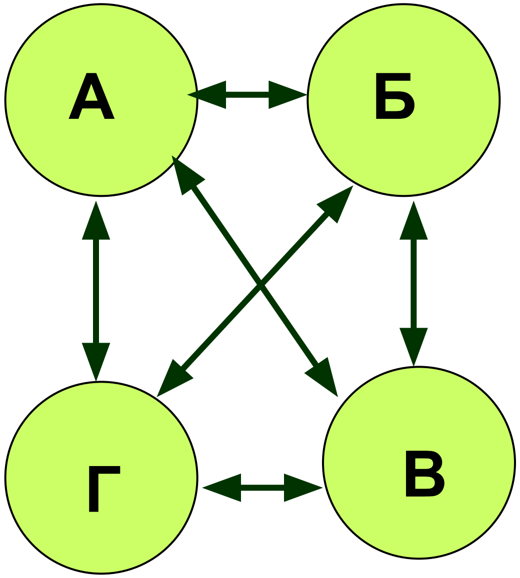
Полный граф

<u>Задача № 2</u>

Андрей, Борис, Виктор и Григорий после возвращения из спортивного лагеря подарили на память друг другу свои фотографии. Причем каждый мальчик подарил каждому по одной фотографии. Сколько всего фотографий было подарено?



Полный граф



С помощью стрелок на ребрах полного графа с вершинами А, Б, В и Г показан процесс обмена фотографиями. Очевидно, что стрелок в 2 раза больше, чем ребер, т. е. 6·2=12. Столько же было подарено фотографий.

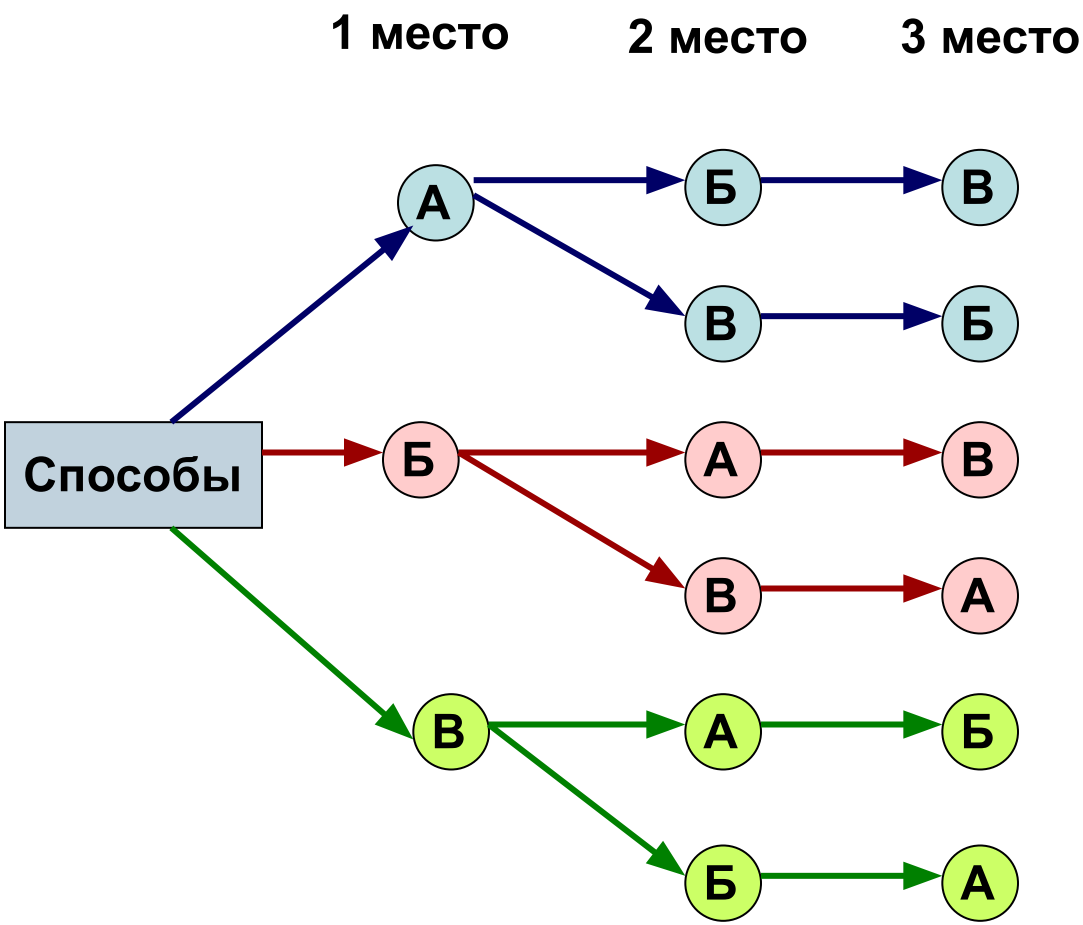
<u>Ответ</u>: 12 фотографий.

Граф - дерево

Задача № 3

Антон, Борис и Василий купили 3 билета на футбольный матч на 1, 2 и 3-е места первого ряда. Сколькими способами они могут занять имеющиеся три места?

Граф - дерево



Упорядоченные тройки

АБВ

АВБ

БАВ

БВА

ВАБ

ВБА

<u>Ответ</u>: 6 способов.

Граф – дерево

Задача № 4

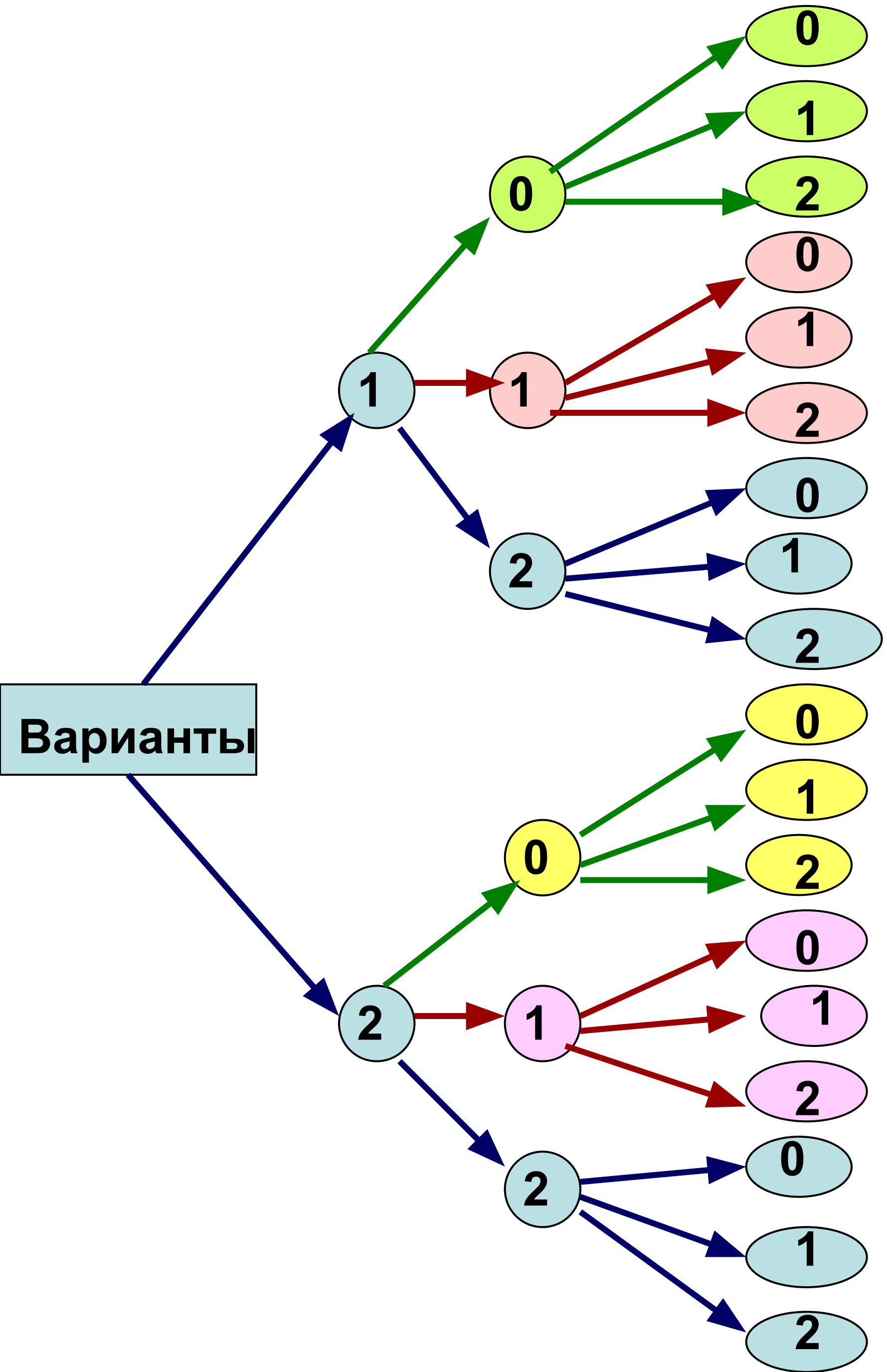
Сколько различных трехзначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 2, если цифры в числе могут повторяться?

213 543 753 849 109 760

213 543 753 849 109 760

376 934 875 777 201

376 934 875 777



Образовавшееся число

100
101
102
110
111
112
120
121
122
200
201
202
210
211
212
220
221
222

Ответ: 18 чисел

Задачи

§ 4 «Подсчет вариантов с помощью графов»

На уроках решаются задачи

№№ 3, 5, 7, 9, 11.

Домашнее задание

№№ 2, 4, 6, 8, 10, 12.

Контрольная работа

1 вариант

1) С помощью цифр 7, 8 и 9 записать всевозможные двузначные числа, в которых цифры: а) должны быть разными; б) могут повторяться.
2) Анна, Белла и Вера купили билеты в кинотеатр на 1, 2 и 3-е места первого ряда. Перечислить все возможные способы, которыми девочки могут занять эти места.
3) У лесника три собаки: Астра, Вега и Гриф. На охоту лесник решил пойти с двумя собаками. Перечислить все варианты выбора лесником пары собак.

Контрольная работа

<u>2 вариант</u>

1) Перечислить все двузначные числа, в записи которых используются только цифры 8, 9 и 0, если: а) одинаковых цифр в числах не должно быть; б) цифры в числах могут повторяться.
2) Из трех стаканов сока – ананасового, брусничного и виноградного – Иван решил последовательно выпить два. Перечислить все варианты, которыми это можно сделать.
3) У Марии 3 юбки и 5 кофт, удачно сочетающихся по цвету. Сколько различных комбинаций из юбок и кофт имеется у Марии?