Кафедра математики и моделирования
Старший преподаватель Г.В. Аверкова
Курс «Высшая математика»

Тема 1 «Элементы линейной и векторной алгебры»

Понятия о матрицах, действия с ними, обратная матрица, матричная запись и матричный способ решения системы линейных уравнений, ранг матрицы, эквивалентные матрицы, исследование на совместность системы линейных уравнений, решение систем методом Гаусса

Цели и задачи

- Цели:
  - Рассмотреть основные понятия по теме «Элементы линейной и векторной алгебры»
- Задачи:
  - Ввести понятия матрицы и определителя квадратной матрицы
  - Рассмотреть действия над матрицами и их свойства
  - Исследовать СЛАУ на совместность и рассмотреть различные способы решения систем

ВГУЭС

Теоретический материал

Матрицей называется прямоугольная таблица вида

$$A_{m\times n} = A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрицы одинаковой размерности называются равными, если их соответствующие элементы равны.

Матрица с одинаковым числом строк и столбцов называется квадратной.

Квадратная матрица, все диагональные элементы которой равны 1, а остальные равны нулю, называется единичной матрицей

Теоретический материал

Действия над матрицами

1. Сложение и вычитание матриц одинаковой размерности

Если $A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 7 & -4 & 3 \end{pmatrix}$, то

$A + B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 6 \\ 9 & -3 & 3 \end{pmatrix}$, и $A - B = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 2 \\ -5 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

2. Умножение матрицы любой размерности на число

$$3A = -3\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -12 \\ -3 & 3 \\ 0 & -15 \end{pmatrix}$$

Теоретический материал

Действия над матрицами

3. Транспонирование матрицы любой размерности

Если $A = A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$, то $A^T = A^T_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$

4. Умножение матриц соответствующей размерности

$$AB = \begin{pmatrix} 9 & 5 \\ 1 & 9 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 9 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 45 & 29 & 28 \\ 10 & 81 & 37 & 20 \\ 14 & 54 & 32 & 28 \end{pmatrix}$$

Теоретический материал

Определитель квадратной матрицы

Определитель матрицы второго порядка вычисляется по правилу:

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Определитель матрицы третьего порядка вычисляется по правилу:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Теоретический материал

Минором элемента квадратной матрицы порядка *n* называется определитель порядка *n-1*, полученный из определителя матрицы вычеркиванием соответствующих строки и столбца.

Алгебраическим дополнением элемента называется его минор, взятый со знаком + (плюс), если сумма номеров строки и столбца является четным числом, и со знаком – (минус) в противном случае.

Теорема. Определитель равен сумме произведений элементов любой строки на их алгебраические дополнения, т.е.

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}\ ,\ 1 \le i \le n$$

Теоретический материал

Обратная матрица

Две квадратные матрицы одинаковой размерности называются взаимно обратными, если их произведение с любым порядком множителей равно единичной матрице соответствующей размерности.

$$AB = BA = E$$

Теорема. Для любой невырожденной матрицы существует единственная обратная матрица, определяемая по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Рангом матрицы называется наивысший порядок отличного от нуля минора матрицы

Элементарные преобразования

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие ее преобразования:

- перестановка двух строк (или двух столбцов);
- умножение всех элементов строки (или столбца) на любое ненулевое число;
- прибавление ко всем элементам строки (или столбца) соответствующих элементов другой строки (другого столбца), умноженных на одно и то же число;
- транспонирование, т.е. замена каждой строки столбцом с соответствующим номером.

Теорема. При элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не меняется.

Теоретический материал

Системы линейных алгебраических уравнений

Системой *m* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными называется совокупность вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Если все свободные члены равны нулю, то система линейных алгебраических уравнений (сокращенно СЛАУ) называется однородной, в противном случае – неоднородной.

Решением СЛАУ называется совокупность значений переменных, которые при подстановке каждое уравнение системы обращают в тождество.

Теоретический материал

Исследование СЛАУ на совместность

Решить линейную систему – это значит:

1) выяснить, является ли система совместной или несовместной;
2) если система совместна, то найти множество ее решений.

Теорема (Кронекера - Капелли).
Линейная система совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы и ранг расширенной матрицы равны.

Следствие. Совместная система является определенной, если ранг матрицы системы равен числу неизвестных, и неопределенной, в противном случае.

Теоретический материал

Метод Гаусса решения систем

Данный метод последовательного исключения переменных является универсальным, и применяется для решения произвольной системы линейных алгебраических уравнений.

При методе Гаусса систему приводят к более простому виду с помощью следующих элементарных преобразований:

- изменение порядка уравнений;
- умножение уравнения на ненулевое число;
- прибавление к уравнению другого уравнения, умноженного на произвольное число.

Элементарные преобразования СЛАУ приводят к эквивалентным системам, а значит, не меняют решений исходной системы.

Теоретический материал

Матричная форма записи системы

Для системы *n* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

с введенными обозначения для матрицы системы, столбца неизвестных и столбца свободных слагаемых

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

матричная форма записи системы имеет вид: $AX = B$

Теоретический материал

Матричный способ решения систем

Данный метод применяется для решения системы *n* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными с невырожденной матрицей системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

$$\det A \neq 0.$$

Матрица-решение системы находится по формуле:

$$X = A^{-1}B$$

Ключевые понятия

- Матрица
- Определитель
- Ранг матрицы
- Обратная матрица
- Система уравнений
- Решение системы
- Метод Гуасса
- Матричный способ

Контрольные вопросы

- Определение прямоугольной и квадратной матрицы
- Определитель квадратной матрицы
- Ранг матрицы и способы его вычисления
- Единичная матрица и обратная матрица
- Система линейных алгебраических уравнений
- Решение СЛАУ. Совместная СЛАУ
- Метод Гуасса решения СЛАУ
- Матричный способ решение СЛАУ

Дополнительная литература