ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- *Генеральная совокупность* – совокупность всех объектов, подлежащих изучению.
- *Выборочная совокупность* (*выборка*) – часть объектов генеральной совокупности, отобранных для исследования.
- *Объем совокупности* (генеральной или выборочной) – число объектов этой совокупности.
- Генеральная совокупность может содержать конечное или бесконечное число элементов. Выборка всегда содержит конечное число элементов.

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

- Для того чтобы по данным выборки можно было достаточно уверенно судить об интересующем исследователя признаке генеральной совокупности, выборка должна быть *репрезентативной* (представительной). Репрезентативность выборки обеспечивается случайностью отбора ее элементов.

Статистическое распределение

Пусть из генеральной совокупности извлечена выборка объема n, причем значение x_1 наблюдалось n_1 раз, x_2 – n_2 раз, …, x_k – n_k раз. Наблюдаемые значения x_i называются *вариантами*. Последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, называется *вариационным рядом*. Число n_i называется *частотой* варианты x_i, а отношение $\omega_i = \frac{n_i}{n}$ называется *относительной частотой* варианты x_i.

Статистическим распределением выборки называется перечень вариант вариационного ряда и соответствующих им частот (или относительных частот).

Статистическое распределение

Статистическое распределение обычно задают в виде таблицы частот (или таблицы относительных частот).

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

$n_1 + n_2 + ... + n_k = n$

x_i	x_1	x_2	...	x_k
ω_i	ω_1	ω_2	...	ω_k

$\omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_k = 1$

Пример

Пример В результате исследования получена выборка: 2, 5, 0, 1, 6, 3, 0, 1, 5, 4, 0, 3, 3, 2, 1, 4, 0, 0, 2, 3, 6, 0, 3, 0, 1. Найти распределение частот и распределение относительных частот.

Объем этой выборки $n = 25$.

Запишем вариационный ряд, выбрав различные значения и расположив их в порядке возрастания, получим: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Заметим, что число 0 встретилось в выборке 7 раз, число 1 – 4 раза, число 2 – 3 раза, число 3 – 5 раз, числа 4, 5 и 6 – по 2 раза.

Продолжение примера

Следовательно, распределение частот имеет вид:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
n_i	7	4	3	5	2	2	2

Сделаем проверку: сумма частот должна быть равна объему выборки. Действительно, $7+4+3+5+2+2+2=25$.

x_i	0	1	2	3	4	5	6
ω_i	0,28	0,16	0,12	0,2	0,08	0,08	0,08

Выполним проверку: сумма относительных частот должна быть равна 1. Действительно, $0{,}28+0{,}16+0{,}12+0{,}2+0{,}08+0{,}08+0{,}08=1$.

Большие выборки

В случае большого объема выборки $(n > 40)$ статистическое распределение принято задавать в виде *интервальной таблицы частот*. Длина частичного интервала находится по формуле Стерджеса:

$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 1{,}4 \ln n}$, где $x_{\max}, x_{\min}$ - максимальное и минимальное значения в выборке, n – объем выборки.

Для простоты вычислений полученное значение h принято округлять (например, если все числа в выборке целые, то h также удобно округлить до целого числа).

Пример

Пример 3. В результате исследования получена выборка: 75, 76, 51, 40, 81, 72, 54, 53, 66, 44, 130, 100, 110, 113, 103, 112, 99, 114, 122, 115, 68 ,111, 92, 124, 145, 118, 140, 117, 133, 120, 85, 88, 87, 94, 77, 146, 111, 102, 96, 81, 111, 92, 103, 98, 102, 80, 108, 82, 88, 129. Задать статистическое распределение выборки в виде интервальной таблицы частот и интервальной таблицы относительных частот.

В данном случае $x_{\min} = 40, x_{\max} = 146, n = 50$, следовательно, длина частичного интервала равна

$$h = \frac{146 - 40}{1 + 1{,}4 \ln 50} \approx 16{,}366 \approx 16 .$$

Продолжение примера

В качестве начала первого интервала берется число $a_1 = x_{\min}$.

Если a_i - начало i-го интервала, то $a_{i+1} = a_i + h$.

Значит $a_1 = 40, a_2 = a_1 + h = 40 + 16 = 56, a_3 = a_2 + h = 56 + 16 = 72$ и т.д.

Полученные интервалы перечисляются во второй строке интервальной таблицы частот.

В третьей строке таблицы указываются частоты(относительные частоты) интервалов. Под частотой n_i интервала понимается количество значений в выборке, принадлежащих данному интервалу.

Номер интервала	1	2	3	4	5	6	7
$[a_i; a_{i+1})$	$[40;56)$	$[56;72)$	$[72;88)$	$[88;104)$	$[104;120)$	$[120;136)$	$[136;152)$
n_i	5	2	10	13	11	6	3

Проверка: $n_1 + n_2 + \ldots + n_7 = 5 + 2 + 10 + 13 + 11 + 6 + 3 = 50$.

Продолжение примера

Для построения интервальной таблицы относительных частот нужно найти для каждого интервала его относительную частоту по формуле $\omega_i = \frac{n_i}{n}$. Эта таблица будет иметь следующий вид:

Номер интервала	1	2	3	4	5	6	7
$[a_i; a_{i+1})$	$[40;56)$	$[56;72)$	$[72;88)$	$[88;104)$	$[104;120)$	$[120;136)$	$[136;152)$
ω_i	0,1	0,04	0,2	0,26	0,22	0,12	0,06

Проверка: $\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_7 = 0{,}1 + 0{,}04 + 0{,}2 + 0{,}26 + 0{,}22 + 0{,}12 + 0{,}06 = 1$.

Графическое изображение

Полигоном частот называется ломаная, отрезки которой последовательно соединяют точки $(x_1;n_1),(x_2;n_2),...,(x_k;n_k)$, где x_i – варианты выборки, n_i – соответствующие им частоты.

Полигоном относительных частот называется ломаная, отрезки которой последовательно соединяют точки $(x_1;\omega_1),(x_2;\omega_2),...,(x_k;\omega_k)$, где x_i – варианты выборки, ω_i – соответствующие им относительные частоты.

Гистограммой частот (*относительных частот*) называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, а высоты равны отношению $\frac{n_i}{h}$ $(\frac{\omega_i}{h})$.

Графическое изображение

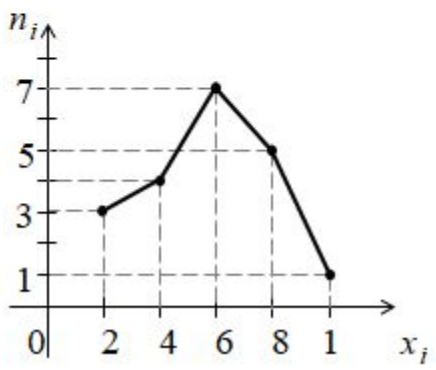
Площадь гистограммы частот равна объему выборки n. Площадь гистограммы относительных частот равна 1.

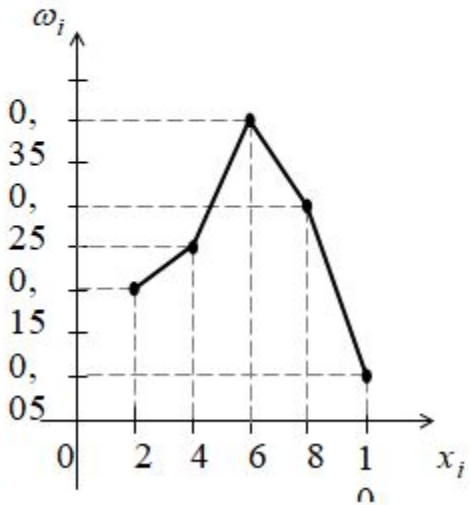
Гистограмма служит только для изображения статистического распределения, заданного в виде интервальной таблицы. Полигон можно изобразить для статистического распределения, заданного любым способом. Если статистическое распределение выборки задано в виде интервальной таблицы, то при построении полигона в качестве вариант x_i берут середины интервалов, а в качестве частот n_i (относительных частот ω_i) берут частоты (относительные частоты) соответствующих интервалов.

Пример (полигон)

x_i	2	4	6	8	10
n_i	3	4	7	5	1

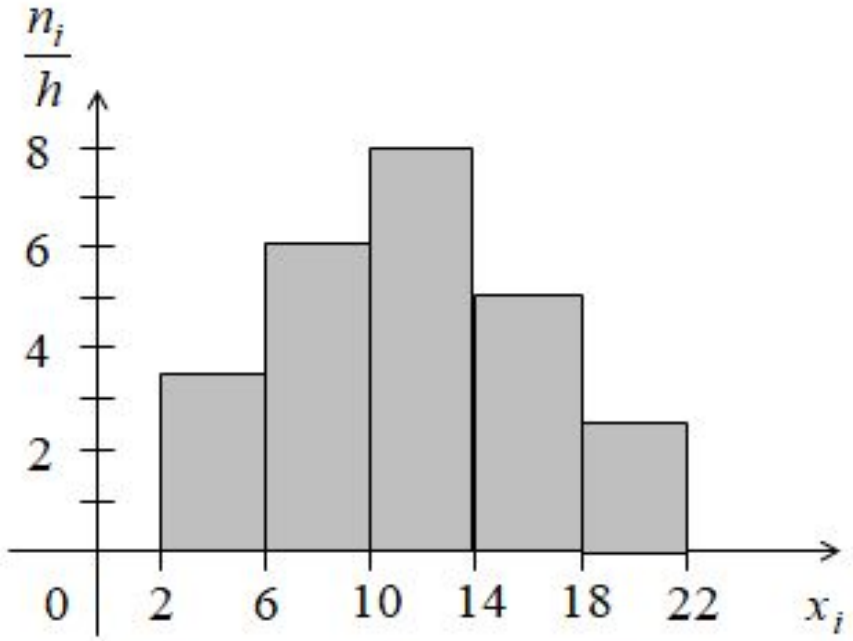
x_i	2	4	6	8	10
ω_i	0,15	0,2	0,35	0,25	0,05





Пример (гистограмма)

Номер интервала	1	2	3	4	5
$[a_i; a_{i+1})$	$[2;6)$	$[6;10)$	$[10;14)$	$[14;18)$	$[18;22)$
n_i	14	24	32	20	10



Эмпирическая функция распределения

Эмпирической функцией распределения (функцией распределения выборки) называется функция $F^*(x)$, которая определяет для каждого значения x относительную частоту события $X < x$:

$F^*(x) = \frac{n_x}{n}$, где n_x – число выборочных значений, меньших x; n – объем выборки.

Если изучаемый количественный признак X является дискретным, то график функции $F^*(x)$ имеет ступенчатый вид, а если X является непрерывным, то график $F^*(x)$ представляет собой непрерывную линию.

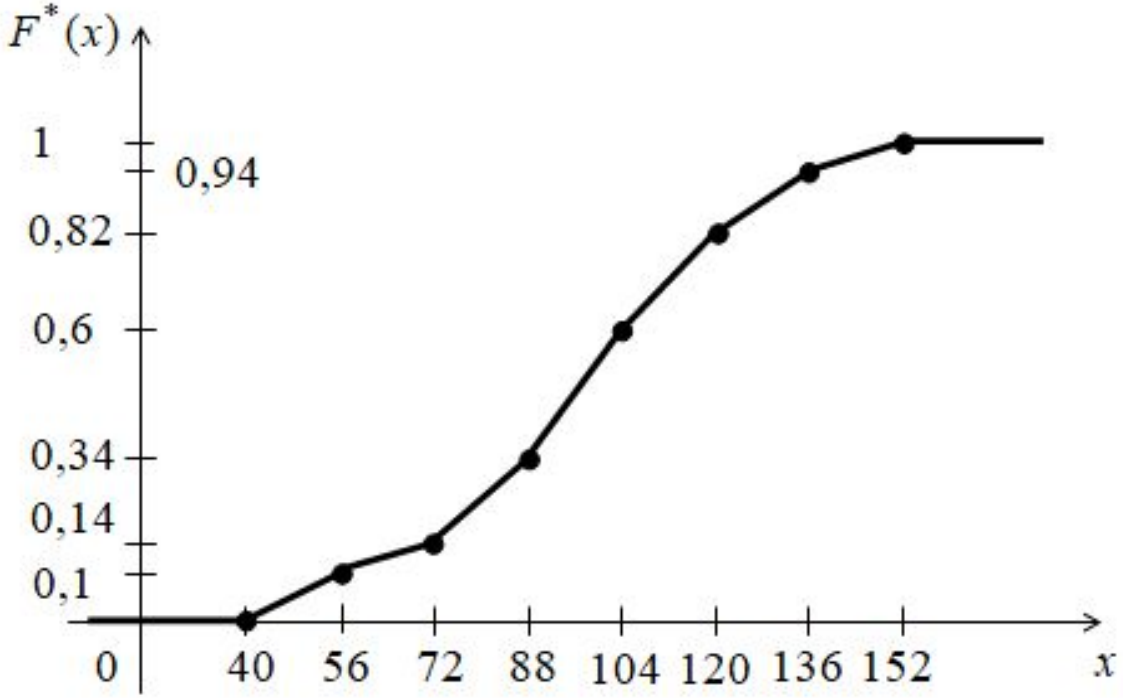
Задача

Пример . Статистическое распределение выборки задано в виде интервальной таблицы частот. Считая, что изучаемый количественный признак является непрерывным, найти эмпирическую функцию распределения и построить ее график.

Номер интервала	1	2	3	4	5	6	7
$[a_i;a_{i+1})$	$[40;56)$	$[56;72)$	$[72;88)$	$[88;104)$	$[104;120)$	$[120;136)$	$[136;152)$
n_i	5	2	10	13	11	6	3

Таблица и график для эмпирической функции распределения

x	40	56	72	88	104	120	136	152
$F^*(x)$	0	0,1	0,14	0,34	0,6	0,82	0,94	1



Точечные статистические оценки числовых характеристик случайной величины

Пусть для изучения генеральной совокупности относительно количественного признака X извлечена выборка объема n и известно статистическое распределение выборки:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Точечные статистические оценки числовых характеристик случайной величины

Выборочной средней называется число $\bar{x}_B = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i}{n}$.

Выборочной дисперсией называется число $D_B = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot (x_i - \bar{x}_B)^2}{n}$.

Выборочным средним квадратическим отклонением называется число $\sigma_B = \sqrt{D_B}$.

Для вычисления выборочной дисперсии удобно использовать формулу $D_B = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i^2}{n} - \left(\dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i}{n} \right)^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot x_i^2}{n} - (\bar{x}_B)^2$.

Точечные статистические оценки числовых характеристик случайной величины

Исправленной выборочной дисперсией называется число

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i \cdot (x_i - \bar{x}_B)^2}{n-1}.$$

Исправленным выборочным средним квадратическим отклонением s называется число, равное квадратному корню из исправленной дисперсии s^2.

На практике при малом объеме выборки ($n < 30$) пользуются исправленной выборочной дисперсией s^2. При достаточно большом объеме выборки n числа D_B и s^2 различаются мало, поэтому для оценки генеральной дисперсии можно использовать как s^2, так и D_B.

Чем больше объем выборки n, тем более верными будут точечные оценки математического ожидания и генеральной дисперсии.

Пример

Пример . Найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение, если статистическое распределение выборки задано в виде интервальной таблицы частот:

$[a_i;a_{i+1})$	$[40;56)$	$[56;72)$	$[72;88)$	$[88;104)$	$[104;120)$	$[120;136)$	$[136;152)$
n_i	5	2	10	13	11	6	3

Составим вспомогательную расчетную таблицу. Числа третьего столбца этой таблицы получаются в результате умножения чисел первого и второго столбцов, а числа четвертого столбца – умножения чисел первого и третьего столбцов.

Пример

Середины интервалов x_i	Частоты n_i	$n_i \cdot x_i$	$n_i \cdot x_i^2$
48	5	240	11520
64	2	128	8192
80	10	800	64000
96	13	1248	119808
112	11	1232	137984
128	6	768	98304
144	3	432	62208
Сумма	50	4848	502016

Пример

Используя сумму, найденную в третьем столбце таблицы, вычислим выборочную среднюю:

$$\bar{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{7} n_i \cdot x_i}{n} = \frac{4848}{50} = 96{,}96 .$$

Используя сумму значений четвертого столбца, найдем выборочную дисперсию:

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{7} n_i \cdot x_i^2}{n} - (\bar{x}_B)^2 = \frac{502016}{50} - (96{,}96)^2 \approx 639{,}08 .$$

Тогда выборочное среднее квадратическое отклонение

$$\sigma_B = \sqrt{D_B} = \sqrt{639{,}08} \approx 25{,}28 .$$

Мода и медиана

Выборочной модой M_0 называется варианта, которая имеет наибольшую частоту.

Пусть дана выборка объема n. Запишем элементы выборки в порядке возрастания: $x_1, x_2, ..., x_n$. Если в этой выборке нечетное число элементов, то *выборочной медианой* M_e называется значение x_i, стоящее в центре ряда. Если в выборке четное число элементов, то есть $n = 2k$, то *выборочной медианой* M_e называется среднее арифметическое двух значений, стоящих в центре ряда, то есть $M_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$.

Интервальные оценки числовых характеристик случайной величины

При выборке малого объема точечная оценка может значительно отличаться от оцениваемого параметра. Так, выборочная средняя $\bar{x}_B$, найденная по выборке малого объема, может значительно отличаться от генеральной средней, то есть от математического ожидания случайной величины X. Это приведет к тому, что исследователь получит неверную информацию об изучаемой генеральной совокупности. Поэтому при небольших объемах выборки используются интервальные оценки числовых характеристик случайной величины.

Интервальная оценка математического ожидания

Интервальной оценкой (с надежностью γ) математического ожидания a нормально распределенного количественного признака X по выборочной средней $\bar{x}_B$ при *неизвестном среднем квадратическом отклонении* генеральной совокупности (и объеме выборки $n < 30$) является доверительный интервал:

$$\bar{x}_B - \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}}$$, где

$\delta = \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}}$ – точность оценки; s – исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение; n – объем выборки; t_γ – находят по специальной таблице (приложение 3) по заданным n и γ.

Интервальная оценка математического ожидания

Точность оценки δ определяет «широту» доверительного интервала. Надежность оценки γ – это вероятность того, что неизвестное математическое ожидание a действительно находится в найденном доверительном интервале. Обычно надежность γ задается заранее, причем в качестве γ берут близкое к 1 число (чаще всего 0,95; 0,99; 0,999). При этом точность оценки зависит от заданной надежности: чем больше надежность, тем шире доверительный интервал (то есть тем «меньше» точность), и наоборот.

Пример

Пример . Случайная величина X распределена нормально. По выборке объема $n = 20$ найдены выборочная средняя $\bar{x}_B = 15{,}4$ и исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение $s = 0{,}9$. Оценить неизвестное математическое ожидание при помощи доверительного интервала с надежностью 0,95.

В данном случае $\bar{x}_B - \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + \frac{t_\gamma \cdot s}{\sqrt{n}}$.

Используя таблицу значений t_γ, зная $\gamma = 0{,}95$ и $n = 20$, найдем $t_\gamma = 2{,}093$.

Значит, точность оценки $\delta = \frac{2{,}093 \cdot 0{,}9}{\sqrt{20}} \approx 0{,}421$.

Таким образом, доверительный интервал для математического ожидания можно записать в виде:

$15{,}4 - 0{,}421 < a < 15{,}4 + 0{,}421$ или $14{,}979 < a < 15{,}821$.

Интервальная оценка среднего квадратического отклонения

Интервальной оценкой (с надежностью γ) среднего квадратического отклонения σ нормально распределенного количественного признака X по исправленному выборочному среднему квадратическому отклонению s служит доверительный интервал:

$s \cdot (1-q) < \sigma < s \cdot (1+q)$, если $q < 1$,

$0 < \sigma < s \cdot (1+q)$, если $q > 1$,

где q находят по специальной таблице (приложение 4) по заданным n и γ.

Пример

Пример . Используя условие примера 2, найти доверительный интервал для оценки неизвестного среднего квадратического отклонения случайной величины X.

Так как $n = 20$ и $\gamma = 0{,}95$, то по таблице значений q найдем $q = 0{,}37 < 1$.

Тогда искомый доверительный интервал будет иметь вид:

$0{,}9 \cdot (1 - 0{,}37) < \sigma < 0{,}9 \cdot (1 + 0{,}37)$.

Окончательно получаем: $0{,}567 < \sigma < 1{,}233$.

Таким образом, с вероятностью $\gamma = 0{,}95$ можно утверждать, что неизвестное среднее квадратическое отклонение σ заключено в интервале $(0{,}567; 1{,}233)$.