

Глава 9. Элементы математической статистики, комбинаторики и теории вероятностей

§52. Сочетания и размещения.

Часть I

Содержание

- [Введение](#)
- [Пример 1. Учительница подготовила к контрольной работе...](#)
 - Решения: [1.а\)](#) [1.б\)](#) [1.в\)](#) [1.г\)](#)
- [Пример 2. Известно, что \$x = 2^a 3^b 5^c\$ и \$a, b, c\$ — числа из множества \$\{0, 1, 2, 3\}\$.](#)
 - Решения: [2.а\)](#) [2.б\)](#) [2.в\)](#) [2.г\)](#)
- [Актуализация опорных знаний:](#)
 - [Определение 1. \$n!\$](#)
 - [Теорема 1 о числе перестановок \$P_n = n!\$](#)
- [Пример 3. К хозяину дома пришли гости А, Б, С, D. За круглым столом — пять разных стульев.](#)
 - Решения: [3.а\)](#) [3.б\)](#) [3.в\)](#) [3.г\)](#)
- [Пример 4. В чемпионате по футболу участвовало 7 команд.](#)
 - Решения: [1 способ](#); [2 способ](#); [3 способ](#)
- [Анализ примера 4](#)
- [Определение 2.](#) Число сочетаний из n элементов по 2
- [Пример 5. Встретились 11 футболистов и 6 хоккеистов и каждый стал по одному разу играть с каждым в шашки](#)
- [Теорема 3 и определение 3.](#) Число размещений из n элементов по 2
- [Пример 6. В классе 27 учеников. К доске нужно вызвать двоих.](#)
- [Итоги выборов двух элементов из \$n\$ данных](#)
- [Источники](#)

Введение

- Правило умножения, которое мы использовали в предыдущем параграфе, применимо не только к двум, но и к трём, четырём и т.д. испытаниям.

Пример 1

- Учительница подготовила к контрольной работе 4 примера на решение линейных неравенств, 5 текстовых задач (две на движение и три на работу) и 6 примеров на решение квадратных уравнений (в двух из них $D < 0$). В контрольной должно быть по одному на каждую из трех тем. Найти общее число:
 - а) всех возможных вариантов контрольной;
 - б) тех возможных вариантов, в которых встретится задача на движение;
 - в) тех возможных вариантов, в которых у квадратного уравнения будут корни;
 - г) тех возможных вариантов, в которых не встретятся одновременно задача на работу и квадратное уравнение, не имеющее корней.

Пример 1.а)

- Подготовлены к к.р. 4 неравенств, 5 задач (2 на движение и 3 на работу) и 6 квадратных уравнений (в 2 из них $D < 0$, а в 4 $D \geq 0$). В к.р. по одному на каждую из трех тем.

- Найти общее число:

а) всех возможных вариантов контрольной;

РЕШЕНИЕ:

а) При выборе неравенства есть 4 исхода, при выборе задачи есть 5 исходов, при выборе квадратного уравнения есть 6 исходов. По правилу умножения получаем, что число всех вариантов контрольной работы равно $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$.

ОТВЕТ: 120

08.02.2014

Пример 1.6)

- Подготовлены к к.р. 4 неравенств, 5 задач (2 на движение и 3 на работу) и 6 квадратных уравнений (в 2 из них $D < 0$, а в 4 $D \geq 0$). В к.р. по одному на каждую из трех тем.

- Найти общее число:

б) тех возможных вариантов, в которых встретится задача на движение;

РЕШЕНИЕ:

б) В предыдущем рассуждении меняется число исходов при выборе текстовой задачи: их всего два. Значит, можно составить $4 \cdot 2 \cdot 6 = 48$ вариантов такой контрольной работы.

ОТВЕТ: 48
08.02.2014

Пример 1.в)

- Подготовлены к к.р. 4 неравенств, 5 задач (2 на движение и 3 на работу) и 6 квадратных уравнений (в 2 из них $D < 0$, а в 4 $D \geq 0$). В к.р. по одному на каждую из трех тем.

- Найти общее число:

в) тех возможных вариантов, в которых у квадратного уравнения будут корни;

РЕШЕНИЕ:

в) По сравнению с пунктом а) меняется число исходов при выборе уравнения: только в четырех случаях корни есть. Значит, можно составить $4 \cdot 5 \cdot 4 = 80$ вариантов такой контрольной работы.

ОТВЕТ: 80
08.02.2014

Пример 1.г)

- Подготовлены к к.р. 4 неравенств, 5 задач (2 на движение и 3 на работу) и 6 квадратных уравнений (в 2 из них $D < 0$, а в 4 $D \geq 0$). В к.р. по одному на каждую из трех тем.
- Найти общее число: г) тех возможных вариантов, в которых не встретятся одновременно задача на работу и квадратное уравнение, не имеющее корней.

РЕШЕНИЕ: г) Из общего числа вариантов (120) мы вычтем те варианты, в которых встретятся одновременно и задача на работу, и квадратное уравнение, не имеющее корней. По сравнению с пунктом а) для них меняется число исходов при выборе текстовой задачи (3 варианта) и число исходов при выборе уравнения (только в 2 случаях корней нет). Значит, можно составить $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ варианта такой контрольной, работы, а условию задачи удовлетворяют остальные $120 - 24 = 96$ вариантов.

Ответ: а) 120: б) 48: в) 80: г) 96.

Пример 1.г)

- Подготовлены к к.р. 4 неравенств, 5 задач (2 на движение и 3 на работу) и 6 квадратных уравнений (в 2 из них $D < 0$, а в 4 $D \geq 0$). В к.р. по одному на каждую из трех тем.
- Найти общее число: г) тех возможных вариантов, в которых не встретятся одновременно задача на работу и квадратное уравнение, не имеющее корней.

РЕШЕНИЕ: г) Из общего числа вариантов (120) мы вычтем те варианты, в которых встретятся одновременно и задача на работу, и квадратное уравнение, не имеющее корней. По сравнению с пунктом а) для них меняется число исходов при выборе текстовой задачи (3 варианта) и число исходов при выборе уравнения (только в 2 случаях корней нет). Значит, можно составить $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ варианта такой контрольной, работы, а условию задачи удовлетворяют остальные $120 - 24 = 96$ вариантов.

Ответ: а) 120: б) 48: в) 80: г) 96.

Пример 2

- **Известно**, что $x = 2^a 3^b 5^c$ и a, b, c — числа из множества $\{0, 1, 2, 3\}$.
 - а) Найти наименьшее и наибольшее значения числа x .
 - б) Сколько всего таких чисел можно составить?
 - в) Сколько среди них будет четных чисел?
 - г) Сколько среди них будет чисел, оканчивающихся нулем?

Пример 2.а)

- **Известно**, что $x = 2^a 3^b 5^c$ и a, b, c — числа из множества $\{0, 1, 2, 3\}$.

а) Найти наименьшее и наибольшее значения числа x .

- б) Сколько всего таких чисел можно составить?
в) Сколько среди них будет четных чисел?
г) Сколько среди них будет чисел, оканчивающихся нулем?

- **РЕШЕНИЕ :**

а) $x_{\text{наим}} = 2^0 3^0 5^0 = 1$, когда $a=b=c=0$.

$x_{\text{наиб}} = 2^3 3^3 5^3 = 8 \cdot 27 \cdot 125 = 27000$, когда $a=b=c=3$.

Ответ: а) 1 и 27 000.

Пример 2.6)

• **Известно**, что $x = 2^a 3^b 5^c$ и a, b, c — числа из множества $\{0, 1, 2, 3\}$.

а) Найти наименьшее и наибольшее значения числа x .

б) Сколько всего таких чисел можно составить?

в) Сколько среди них будет четных чисел?

г) Сколько среди них будет чисел, оканчивающихся нулем?

• **РЕШЕНИЕ** : б) Рассмотрим три испытания: выбор числа a , выбор числа b и выбор числа c . Они независимы друг от друга, и в каждом имеется по четыре исхода. По правилу умножения получаем, что всего возможны $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$ варианта. **Ответ**: б) 64.

Пример 2.в)

• **Известно**, что $x = 2^a 3^b 5^c$ и a, b, c — числа из множества $\{0, 1, 2, 3\}$.

а) Найти наименьшее и наибольшее значения числа x .

б) Сколько всего таких чисел можно составить?

в) Сколько среди них будет четных чисел?

г) Сколько среди них будет чисел, оканчивающихся нулем?

• **РЕШЕНИЕ :**

в) Число $x = 2^a 3^b 5^c$ будет четным только в тех случаях, когда $a > 0$, т. е. когда $a \in \{1, 2, 3\}$. Значит, для выбора числа a есть три исхода. Снова применим правило умножения. Получим $4 \cdot 3 \cdot 4 = 48$ вариантов.

Ответ: в) 48

Пример 2.г)

• **Известно**, что $x = 2^a 3^b 5^c$ и a, b, c — числа из множества $\{0, 1, 2, 3\}$.

а) Найти наименьшее и наибольшее значения числа x .

б) Сколько всего таких чисел можно составить?

в) Сколько среди них будет четных чисел?

г) Сколько среди них будет чисел, оканчивающихся 0?

• **РЕШЕНИЕ** : г) Число $x = 2^a 3^b 5^c$ будет оканчиваться нулем только в тех случаях, когда среди множителей есть хотя бы одна двойка и есть хотя бы одна пятерка, т. е. когда $a \in \{1, 2, 3\}$ и $c \in \{1, 2, 3\}$. Значит, для выбора чисел a и c есть по три исхода. Снова

применим правило умножения. Получим $3 \cdot 1 \cdot 3 = 36$

вариантов. **Ответ**: а) 1 и 27 000; б) 64; в) 48; г) 36.

Актуализация опорных знаний

- В курсе алгебры 9 класса вы познакомились с понятием факториала и теоремой о перестановках. Напомним их.

Определение 1. Произведение подряд идущих первых n натуральных чисел $n!$ и называют «эн факториал»:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n$$

n	1	2	3	4	5	6	7
n!	1	1·2=2	2!·3=6	3!·4=24	4!·5=120	5!·6=720	6!·7=5040

Актуализация опорных знаний

- **Теорема 1.** n различных элементов можно расставить по одному на n различных мест ровно $n!$ способами.
- Как правило, эту теорему записывают в виде краткой формулы: $P_n = n!$
- P_n - это число перестановок из n различных из n различных элементов, оно равно $n!$.



Пример 3

- К хозяину дома пришли гости А, Б, С, D. За круглым столом — пять разных стульев.
 - а) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом?
 - б) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом, если место хозяина дома уже известно?
 - в) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом, если известно, что гостя С следует посадить рядом с гостем А?
 - г) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом, если известно, что гостя А не следует сажать рядом с гостем D?

Пример 3.а)

- К хозяину дома пришли гости А, Б, С, Д. За круглым столом — пять разных стульев.
- а) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом?

РЕШЕНИЕ: а) На 5 стульев должны сесть 5 человек (включая хозяина дома). Значит, всего способов их рассаживания: $P_5 = 5! = 120$

Ответ: 120



Пример 3.6)

- К хозяину дома пришли гости А, Б, С, Д. За круглым столом — пять разных стульев.
- б) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом, если место хозяина дома уже известно?

РЕШЕНИЕ:

б) Так как место хозяина фиксировано, то следует рассадить четырех гостей на четыре места. Это можно сделать $P_4 = 4! = 24$ способами.

Ответ: 24

Пример 3.в)

• К хозяину дома пришли гости А, Б, С, Д. За круглым столом — пять разных стульев.

в) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом, если известно, что гостя С следует посадить рядом с гостем А?

РЕШЕНИЕ:

в) Сначала выберем место для гостя А. Возможны 5 вариантов. Если место гостя А уже известно, то гостя С следует посадить или справа, или слева от А, всего 2 варианта. После того как места для А и С уже выбраны,

нужно трех человек произвольно рассадить на 3 оставшихся места: $P_3 = 3! = 6$ вариантов. Остается

Пример 3.г)

- К хозяину дома пришли гости А, Б, С, D. За круглым столом — пять разных стульев.
- г) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом, если известно, что гостя А не следует сажать рядом с гостем D?

РЕШЕНИЕ г) Решение такое же, как и в пункте в). Место для гостя D после выбора места для А можно также выбрать двумя способами: на два отдаленных от А стула.

Ответ: а) 120; б) 24; в) 60; г) 60.

Пример 4.

- В чемпионате по футболу участвовало 7 команд. Каждая команда сыграла по одной игре с каждой командой. Сколько всего было игр?



РЕШЕНИЕ: I способ

- Рассмотрим таблицу 7×7 , в которую вписаны результаты игр. В ней 49 клеток. По диагонали клетки закрашены, так как никакая команда не играет сама с собой. Если убрать диагональные клетки, то останется $7^2 - 7 = 42$ клетки. В нижней части результатов нет, потому что все они получаются отражением уже имеющихся результатов из верхней части таблицы. Поэтому количество всех проведенных игр равно половине от 42.

	1	2	3	4	5	6	7
1		3:1	0:5	2:2	0:0	1:0	1:3
2			4:3	1:0	1:0	0:0	1:1
3				1:3	1:0	1:2	0:0
4					1:1	1:1	1:4
5						1:0	0:0
6							2:2
7							

РЕШЕНИЕ: II способ

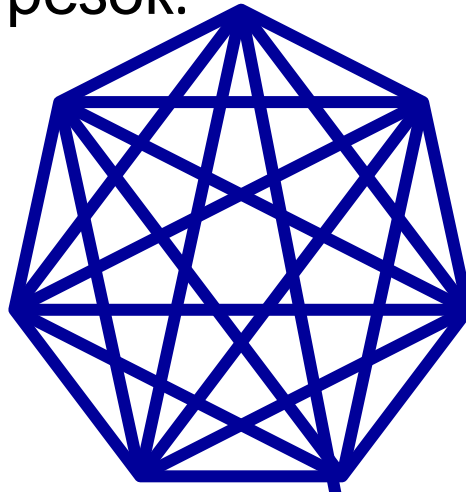
- Произвольно пронумеруем команды №1, №2, ..., №7 и посчитаем число игр поочередно. Команда №1 встречается с командами №2-7 – это 6 игр, №2 – с №3-7 – это 5 игр и т.д. Всего $6+5+4+3+2+1=21$ игр.

№ команды	№ команд	кол-во игр
1	2-7	6
2	3-7	5
3	4-7	4
4	5-7	3
5	6-7	2
6	7	1
ВСЕГО ИГР		21

РЕШЕНИЕ: III способ

- Используем геометрическую модель: 7 команд – это вершины выпуклого 7-угольника, а отрезок между двумя вершинами – это встреча двух соответствующих команд: сколько отрезков – столько игр. Из каждой вершины выходит 6 отрезков – столько игр. Получается $7 \cdot 6 = 42$ отрезков, каждый из которых посчитан дважды: и как АВ, и как ВА. Значит, $42/2 = 21$ отрезок.

ОТВЕТ: 21



Анализ примера 4

- Состав игры определен, как только мы **выбираем две** команды. Значит, количество всех игр в турнире для n команд – это в точности количество всех **выборов двух элементов из n данных** элементов. Важно при этом то, что порядок выбора не имеет значения, т.е. если выбрано две команды, то какая из них первая, а какая вторая – не существенно.
- Первую команду можно выбрать n способами, а вторую – $(n-1)$ способами. По правилу умножения получаем $n(n-1)$. Но при этом состав каждой игры посчитан дважды. Значит, число игр равно $n(n-1)/2$. Тем самым фактически доказана следующая теорема.
- **Теорема 2** (о выборе двух элементов). Если

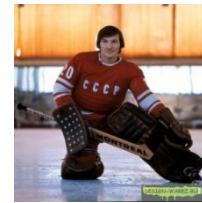
Определение 2

- Достаточно длинный словесный оборот «число всех выборов двух элементов без учета их порядка из n данных» неудобен при постоянном использовании в решении задач. Математики поступили просто: ввели новый термин и специальное обозначение.
- **Определение 2.** число всех выборов двух элементов без учета их порядка из n данных элементов называют числом сочетаний из n элементов по 2 и обозначают C_n^2 (цэ из эн по два).

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$



Пример 5.



- Встретились 11 футболистов и 6 хоккеистов и каждый стал по одному разу играть с каждым в шашки, которые они «давненько не брали в руки». Сколько встреч было:

- а) между футболистами;
- б) между хоккеистами;
- в) между футболистами и хоккеистами;
- г) всего?



РЕШЕНИЕ:

$$а) C_{11}^2 = \frac{11 \cdot 10}{2} = 55.$$

$$б) C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$$

в) Будем действовать по правилу умножения. Одно испытание – выбор футболиста, а другое испытание – выбор хоккеиста. Испытания предполагаются независимыми, и у них соответственно 11 и 6 исходов. Значит получится $11 \cdot 6 = 66$ игр.

г) Можно сложить все предыдущие ответы:

$$C_{17}^2 = \frac{17 \cdot 16}{2} = 17 \cdot 8 = 136.$$



Теорема 3 и определение 3

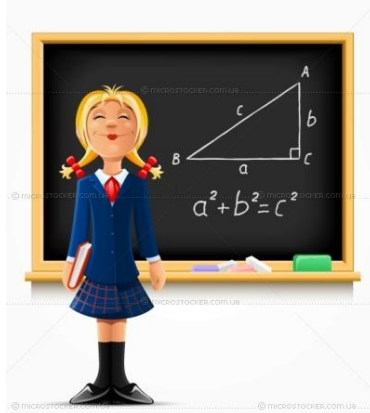
- А что получится, если мы будем учитывать порядок двух выбираемых элементов? По правилу умножения получаем следующую теорему.

Теорема 3. Если множество состоит из n элементов и требуется выбрать из них два элемента, учитывая их порядок, то такой выбор можно произвести $n(n-1)$ способами.

Доказательство: Первый по порядку элемент можно выбрать n способами. Из оставшихся $(n-1)$ элементов второй по порядку элемент можно выбрать $(n-1)$ способом. Так как два этих испытания (выбора) независимы друг от друга A_n^2 , то по правилу умножения получаем $n(n-1)$.

Пример 6

- В классе 27 учеников. К доске нужно вызвать двоих. Сколькими способами это можно сделать, если:
 - а) первый ученик должен решить задачу по алгебре, а второй — по геометрии;
 - б) они должны быстро стереть с доски?



Р е ш е н и е. В случае а) порядок важен, а в случае б) — нет.
Значит, ответы таковы:

а) $A_{27}^2 = 27 \cdot 26 = 702$;

б) $C_{27}^2 = \frac{27 \cdot 26}{2} = 351$.



Итоги выборов двух элементов

Подведем итоги для числа выборов двух элементов из n данных.

Сочетания из n элементов по 2:

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Размещения из n элементов по 2:

$$A_n^2 = n(n-1)$$

- А как будут выглядеть формулы, если в них верхний индекс 2 заменить на 3, 4, ... и вообще на произвольное число k , $1 \leq k \leq n$?
- Здесь мы переходим к основному вопросу параграфа – к выборам, состоящим из произвольного числа элементов.

Источники

- Алгебра и начала анализа, 10-11 классы, Часть 1. Учебник, 10-е изд. (Базовый уровень), А.Г.Мордкович, М., 2009
- Алгебра и начала анализа, 10-11 классы. (Базовый уровень) Методическое пособие для учителя, А.Г. Мордкович, П.В.Семенов, М., 2010
 - **Таблицы составлены в MS Word и MS Excel.**
- Интернет-ресурсы