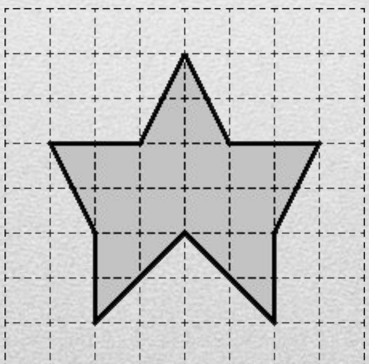
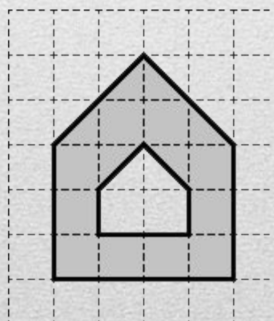
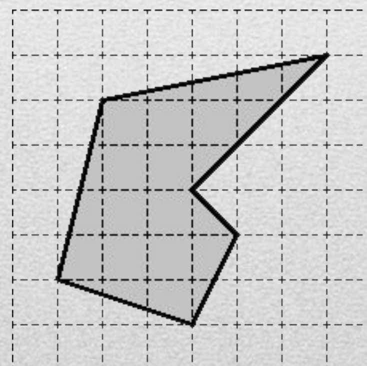
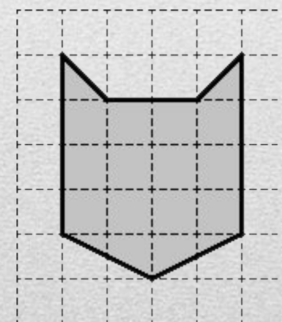
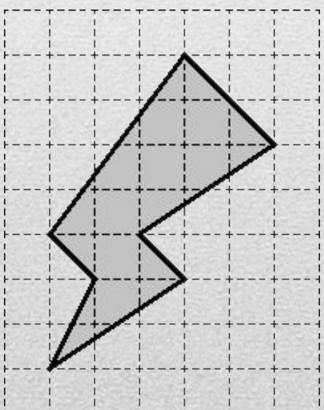
# Элементы планиметрии

B5
B8

**Планиметрия** – это

- от латинского ***planum*** — «плоскость»,
- от древне-греческого **μετρεω** — «измеряю»
- **раздел евклидовой геометрии**, изучающий двумерные (одноплоскостные) фигуры (т.е. фигуры, которые можно расположить в пределах одной плоскости).

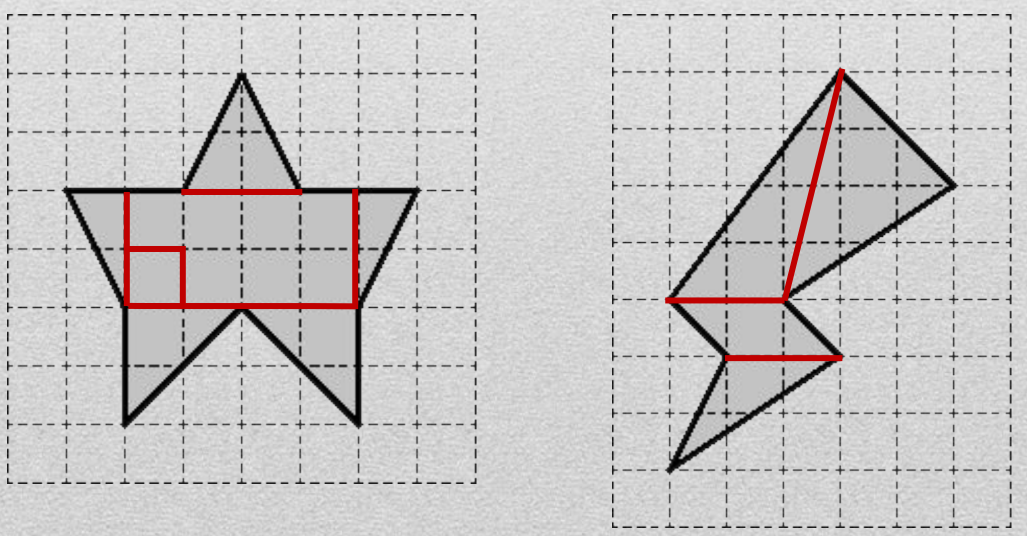
# Элементы планиметрии

## Площади

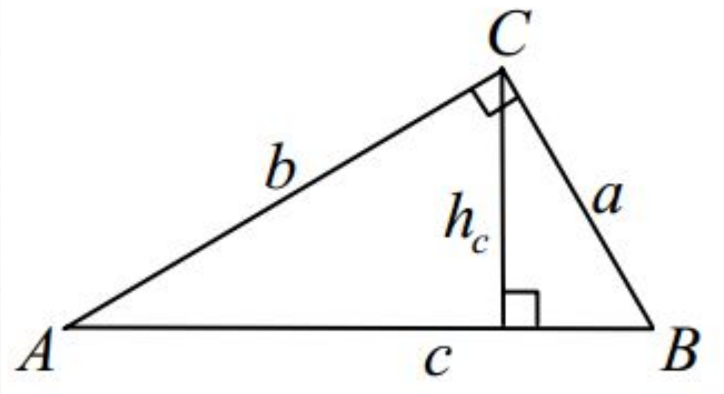
# Площади плоских фигур

- **Площадь плоской фигуры** – это аддитивная числовая характеристика фигуры, целиком принадлежащей одной плоскости.
- **Аддитивность** (от латинского additivus – прибавляемый) – свойство величин, состоящее в том, что значение величины, соответствующее целому объекту, равно сумме объемов составляющих его частей.
- Аддитивность площади означает, что площадь фигуры равна сумме площадей её частей, если этих частей конечное число.



# Прямоугольный треугольник

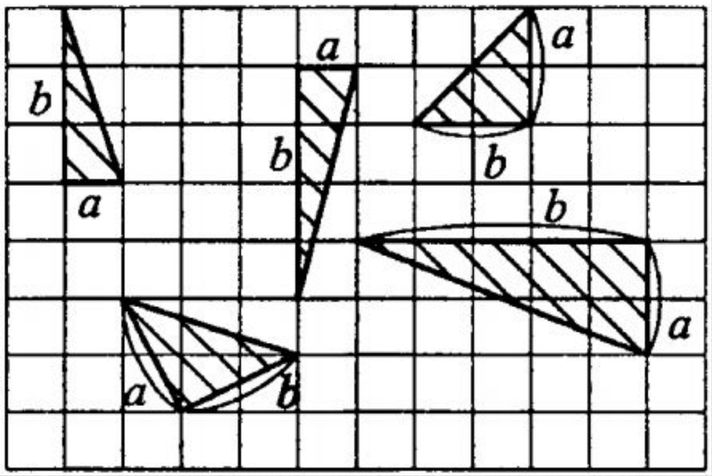
В прямоугольном треугольнике есть прямой угол, равный $90^0$. Сторона напротив прямого угла называется **гипотенузой**. Две прилежащие к прямому углу стороны называют **катетами**.




- **Теорема Пифагора** – одна из основополагающих теорем евклидовой геометрии, устанавливающая соотношение между сторонами прямоугольного треугольника.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

- **Теорема Пифагора :** в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы ($c$) равен сумме квадратов катетов ($a$ и $b$).

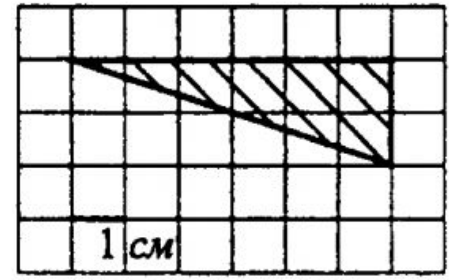



- **Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов:**

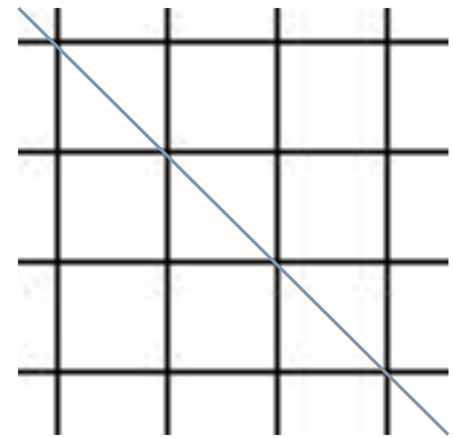
$$S = \frac{ab}{2}$$

# Примеры задач

1. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

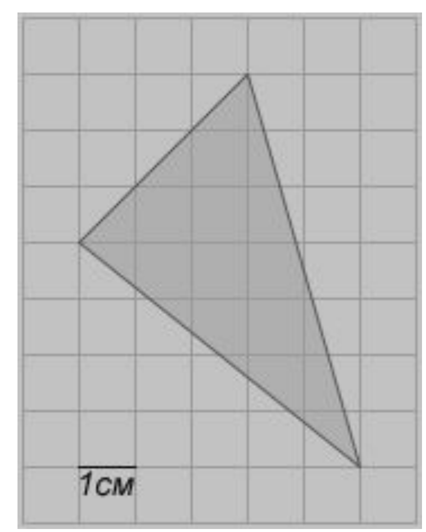



2. Найдите диагональ квадрата 1 см × 1 см; 2 см × 2 см; 3 см × 3 см.



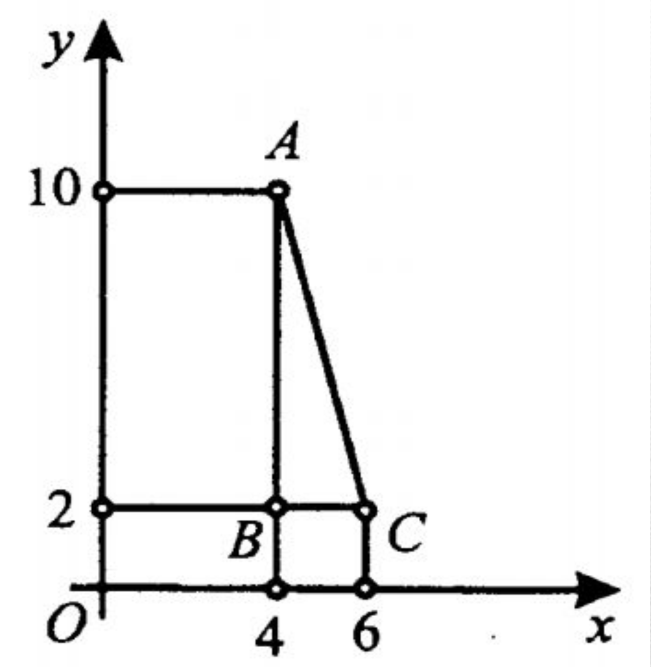
•

3. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



# Прямоугольный треугольник

- Любая точка на координатной плоскости характеризуется двумя числами – **координатами**: абсциссой и ординатой.
- Если у двух точек одинаковые абсциссы или одинаковые ординаты, то соответствующие отрезки параллельны осям координат. В таких случаях длину отрезка можно найти, если вычесть различающиеся координаты точек.



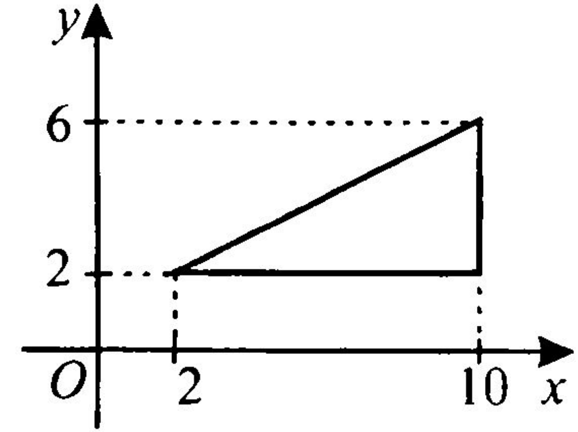

A(4;10), B(4; 2), C(6;2)

- Например: AB || Oy, а значит AB = 10 – 2 = 8
  BC || Ox, а значит BC = 6 – 4 = 2

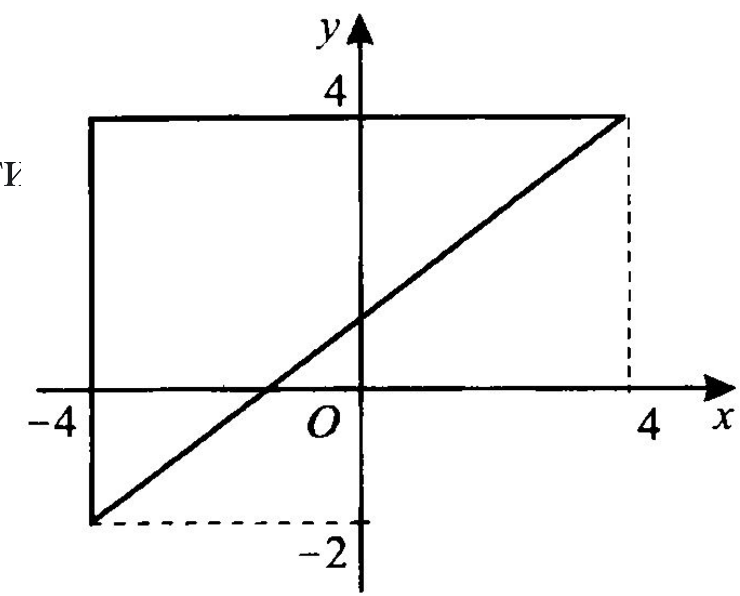
AC можно найти по теореме Пифагора, рассмотрев ΔABC

# Примеры задач

1. Найдите площадь треугольника, изображённого на координатной плоскости.




2. Найдите площадь треугольника, изображённого на координатной плоскости.

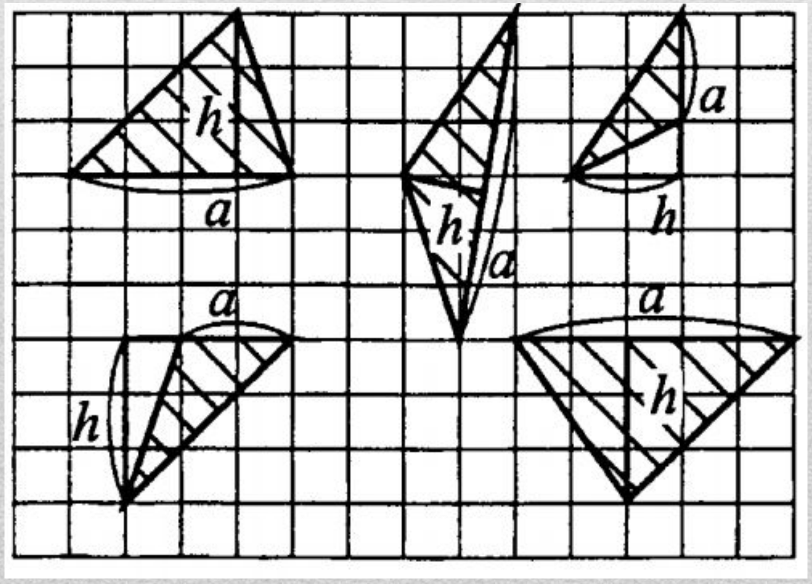


# Площадь произвольного треугольника

- **Площадь произвольного треугольника равна половине произведения длины его стороны (a) на высоту (h), проведенную к этой стороне:**

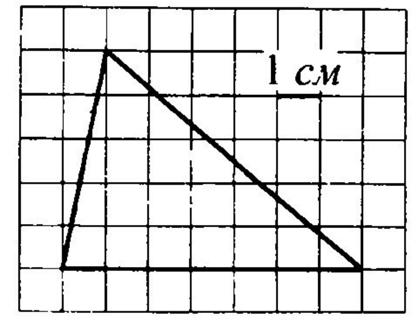
$$\boxed{S = \frac{ah}{2}}$$

- Как правило, в качестве высоты и основания удобно брать те стороны, которые  проходят по линиям клеточной бумаги (или же проходит параллельно осям координат).

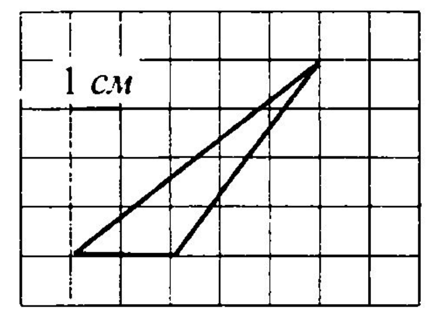


# Примеры задач

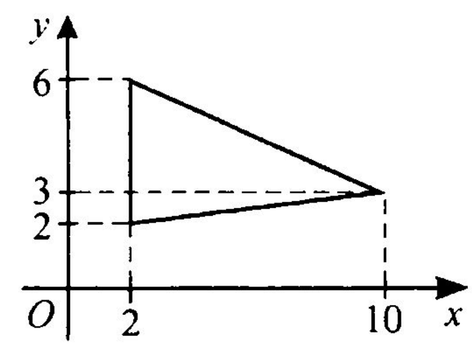
1. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.




2. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

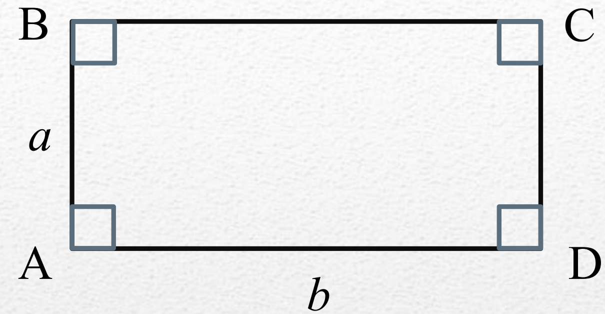



3. Найдите площадь треугольника, изображённого на координатной плоскости.



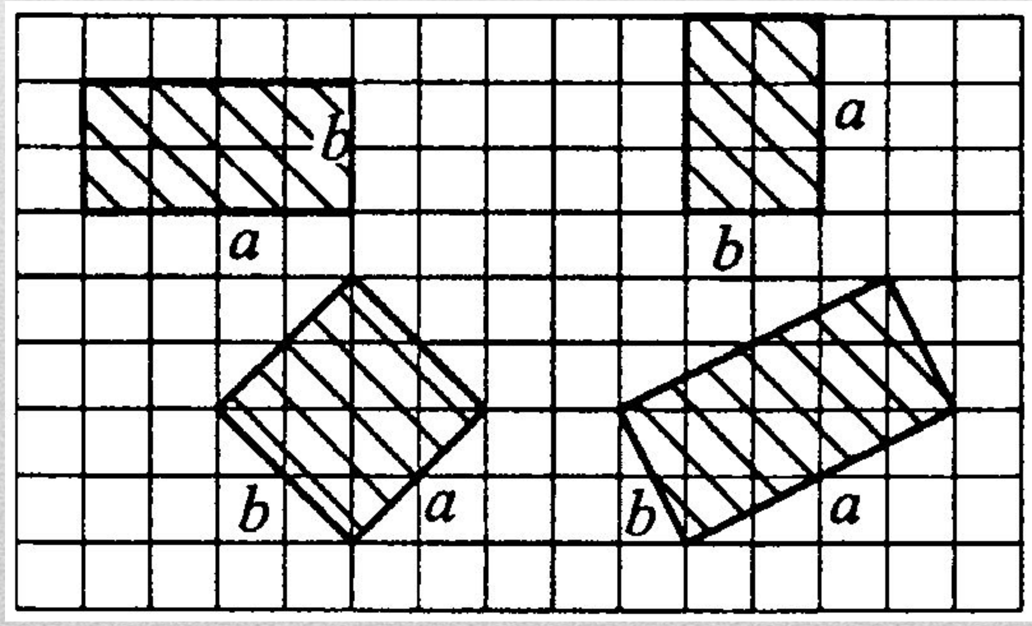
# Площадь прямоугольника (квадрата)

- **Прямоугольник** – четырёхугольник, у которого все углы прямые (равны 90 градусам). Противоположные стороны прямоугольника попарно равны.




- **Площадь прямоугольника** равна произведению его смежных сторон:

$$\boldsymbol{S = ab}$$



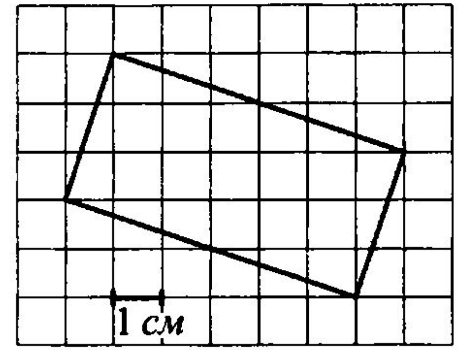

! **Прямоугольник**, все стороны которого равны, называется **квадратом**.

! **Площадь квадрата** равна квадрату его стороны:

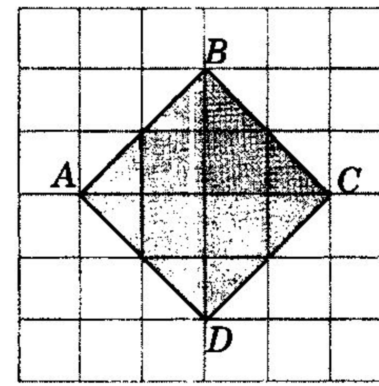
$$\boldsymbol{S = a^2}$$

# Примеры задач

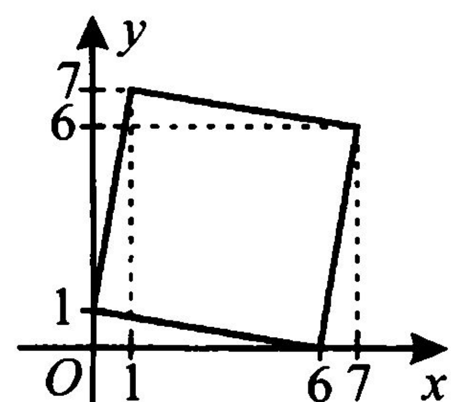
1. Найдите площадь прямоугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.




2. Найдите площадь квадрата, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



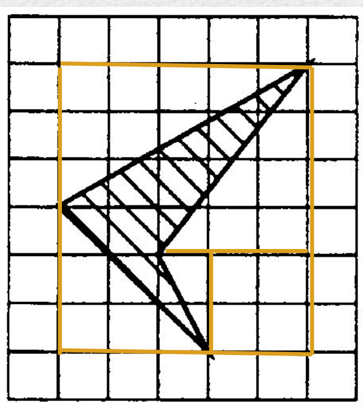

3. Найдите площадь фигуры, изображённой на координатной плоскости.

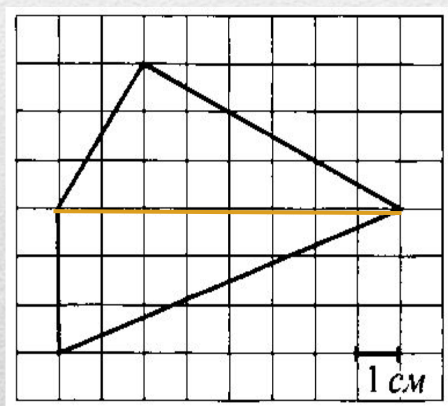


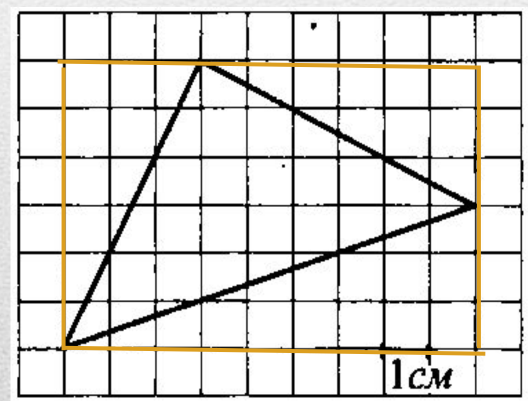
# Площадь произвольного многоугольника

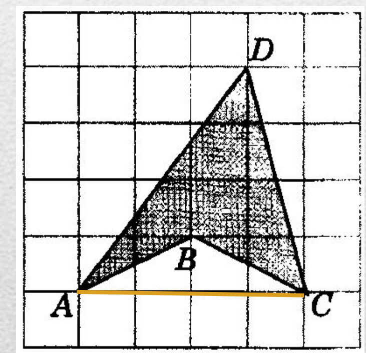
- Для нахождения площади произвольного многоугольника необходимо **разбить** фигуру на треугольники и прямоугольники ИЛИ **достроить** до треугольника или прямоугольника.

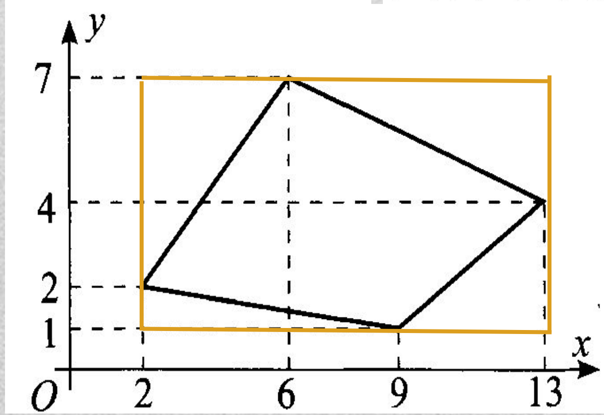
## Примеры произвольных многоугольников:

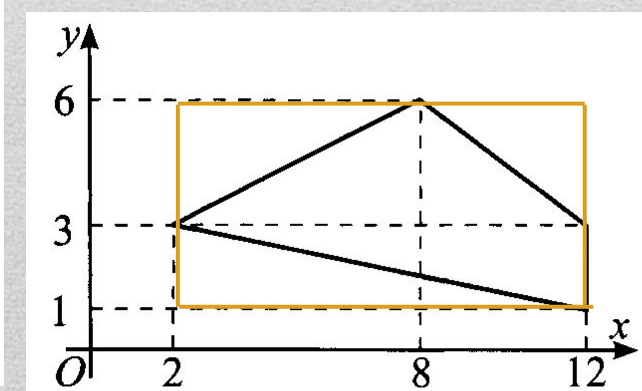


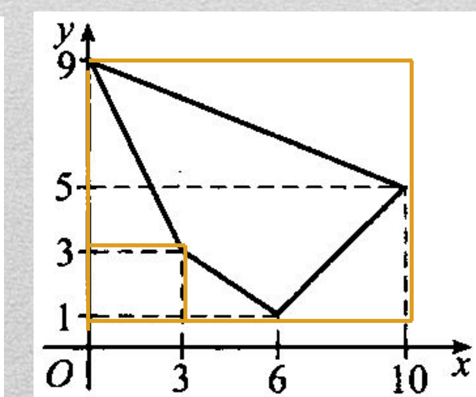


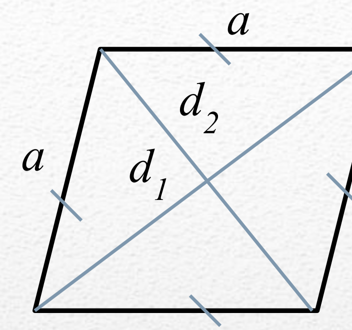



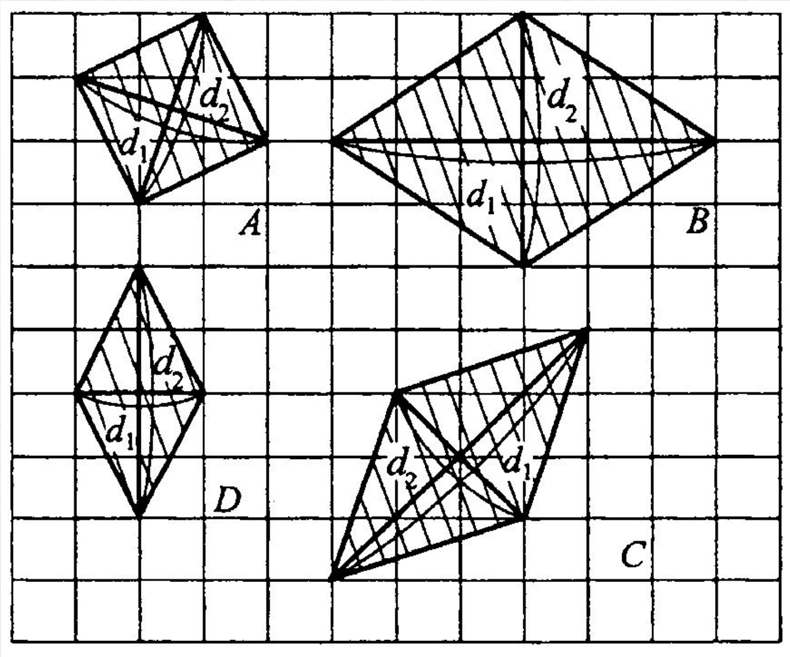
# Площадь ромба

- **Ромб** – это четырехугольник, у которого все стороны равны. В ромбе диагонали взаимно перпендикулярны и делятся пополам точкой пересечения.




- **Площадь ромба** равна половине произведения его диагоналей:

$$S = \frac{d_1 d_2}{2}$$

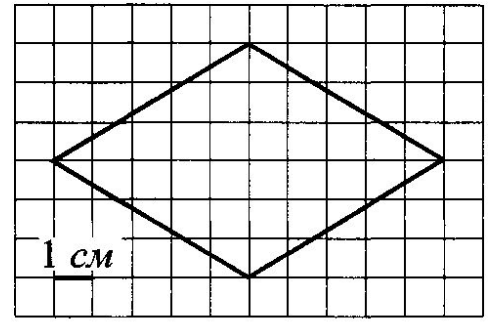



! Квадрат является ромбом.

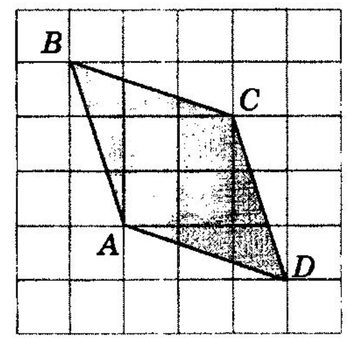
! Ромб является параллелограммом и обладает его свойствами.

# Примеры задач

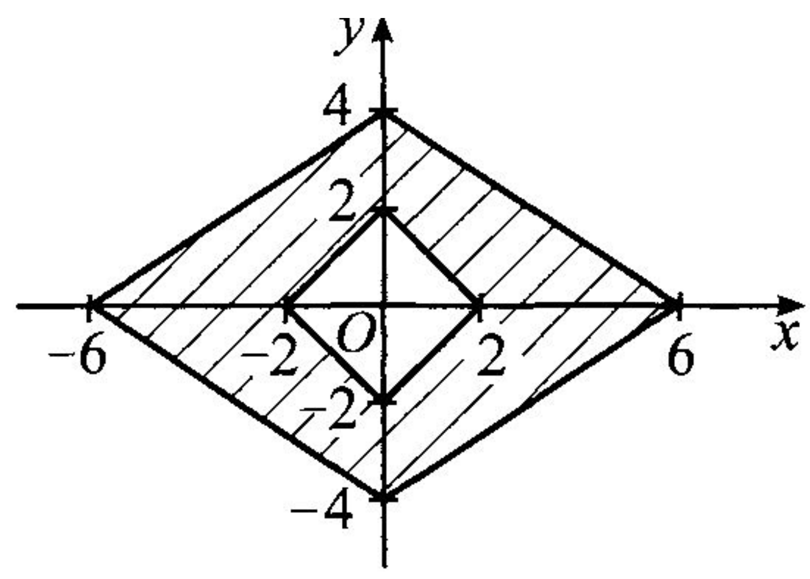
1. Найдите площадь ромба, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.




2. Найдите площадь ромба, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

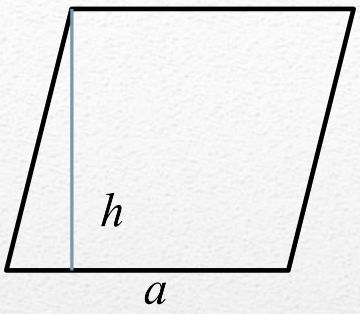



3. Найдите площадь закрашенной фигу изображённой на координатной плоскости.



# Площадь параллелограмма

- **Параллелограмм** – четырёхугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны, т.е. лежат на параллельных прямых.




**Свойства параллелограмма**:

- Противоположные стороны попарно равны и параллельны.
- Противоположные углы попарно равны.
- Диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

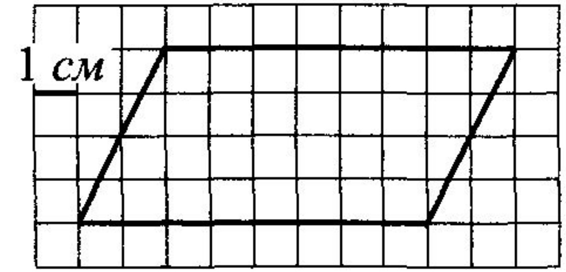
- **Площадь параллелограмма** равна произведению длины его стороны ($a$) на высоту ($h$), проведённую к этой стороне:

$$\boxed{S = ah}$$

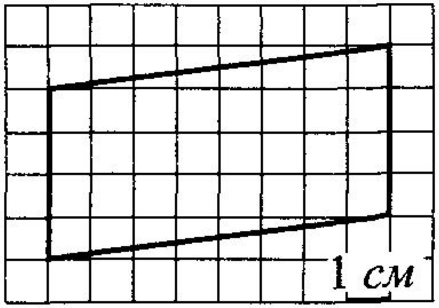
! Прямоугольник, квадрат, ромб – это четырехугольники, которые являются параллелограммом. Они обладают свойствами параллелограмма.

# Примеры задач

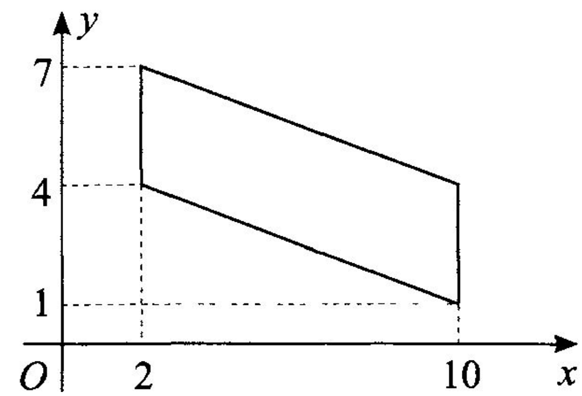
1. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.




2. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

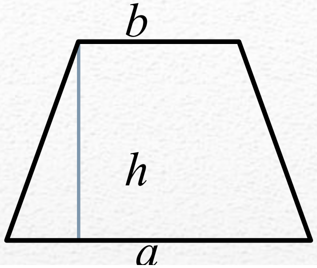



3. Найдите площадь фигуры, изображённой на координатной плоскости.



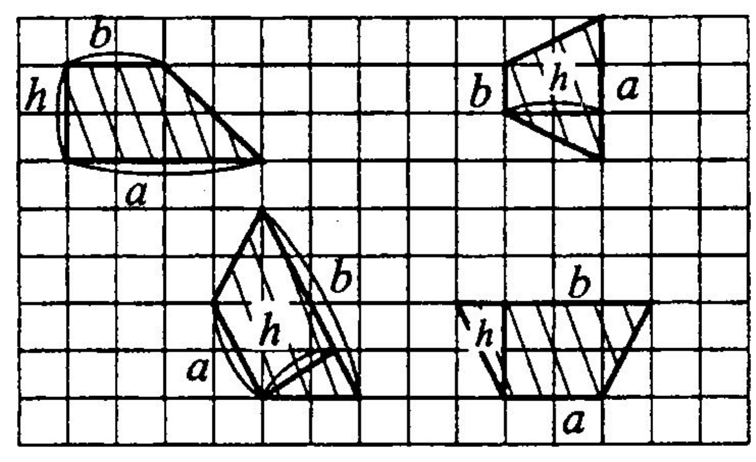
# Площадь трапеции

- **Трапеция** – четырёхугольник, две противоположные стороны которого параллельны между собой, а две другие не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются **основаниями**, а непараллельные – **боковыми сторонами**.



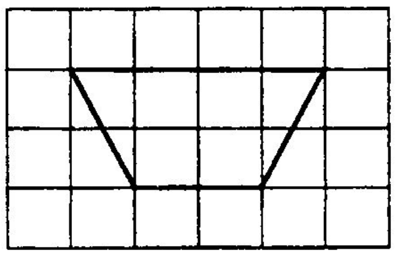

- **Площадь трапеции** равна половине произведения суммы оснований (a + b) на высоту (h):

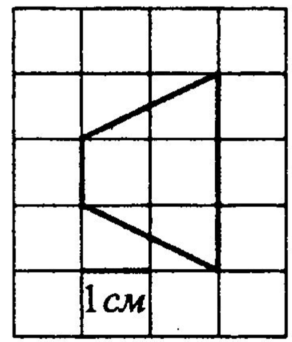
$$S = \frac{(a+b)h}{2}$$

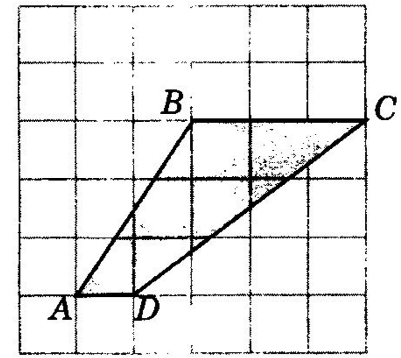


# Примеры задач

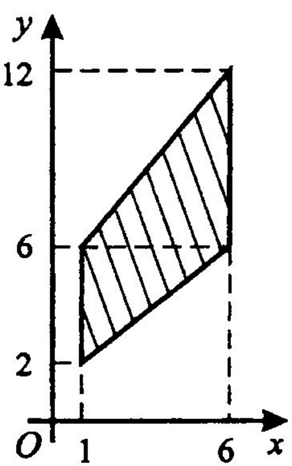
1. Найдите площади трапеций, изображённых на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

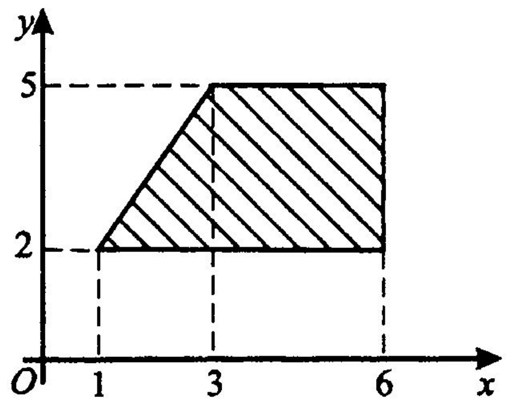


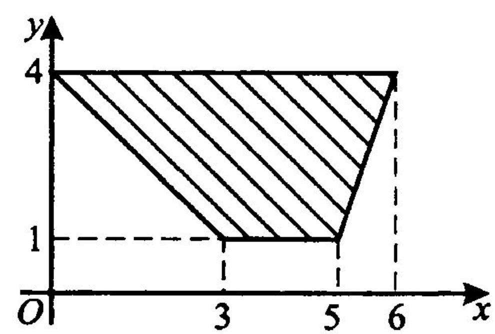



2. Найдите площадь трапеций, изображённых на координатной плоскости.

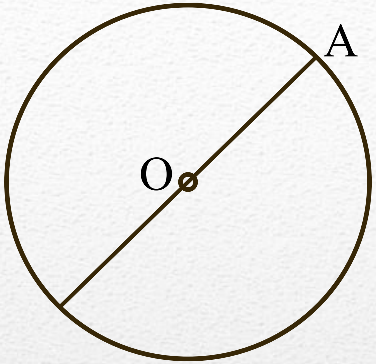


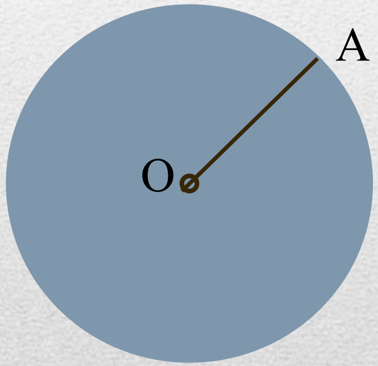



# Площадь круга

- **Окружность** – замкнутая плоская кривая, все точки которой одинаково удалены от данной точки (центра), лежащей в той же плоскости, что и кривая.




- **Круг** – множество точек плоскости, удаленных от заданной точки этой плоскости (центр круга — O) на расстояние, не превышающее заданное (**радиус круга**).



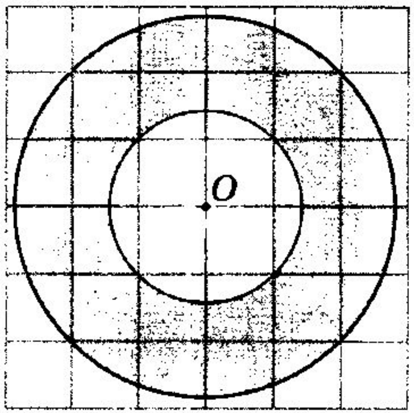

- **Площадь круга** равна произведению числа π на квадрат радиуса:

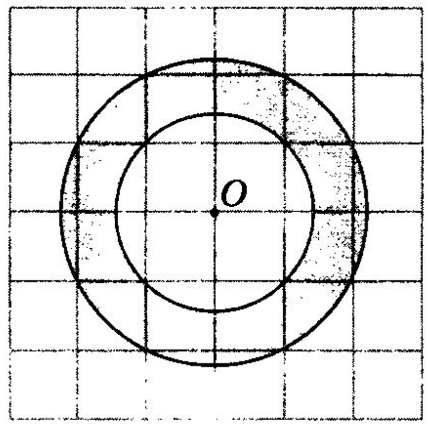
$$\boxed{S = \pi R^2}$$

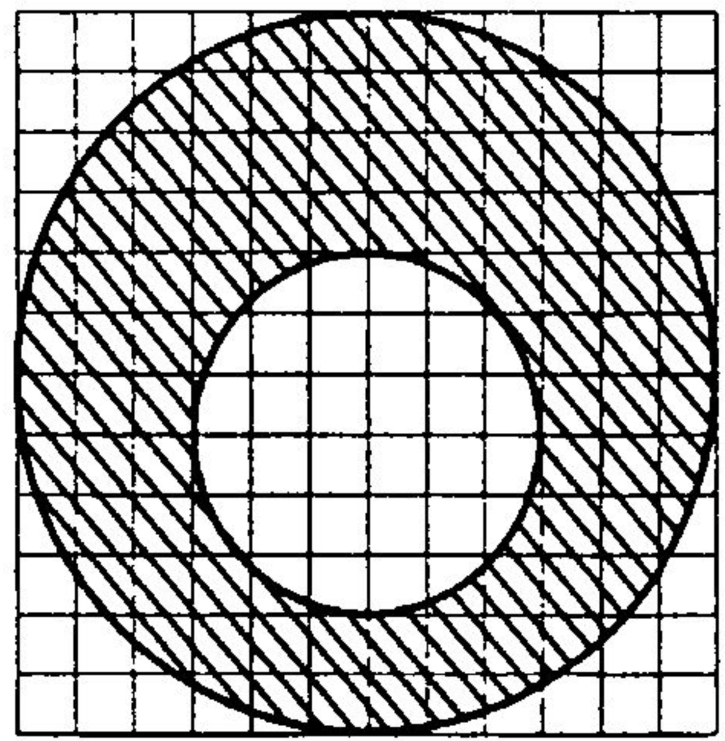
$$\boxed{S = \frac{\pi D^2}{4}}$$

# Примеры задач

1. Найдите площади заштрихованных фигур, изображённых на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

- 



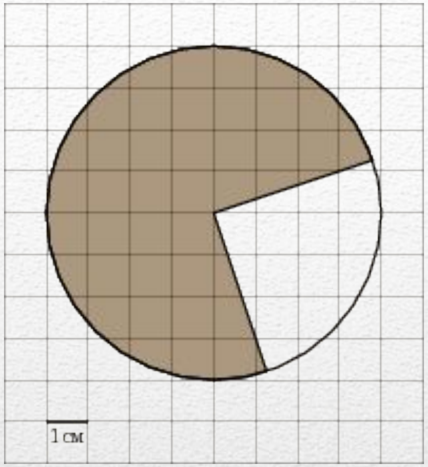


# Площадь кругового сектора

- **Круговой сектор** – часть круга, лежащая внутри соответствующего центрального угла.

  $\boldsymbol{\varphi}$ – соответствующий центральный угол,

  $\boldsymbol{l}$ – длина дуги сектора



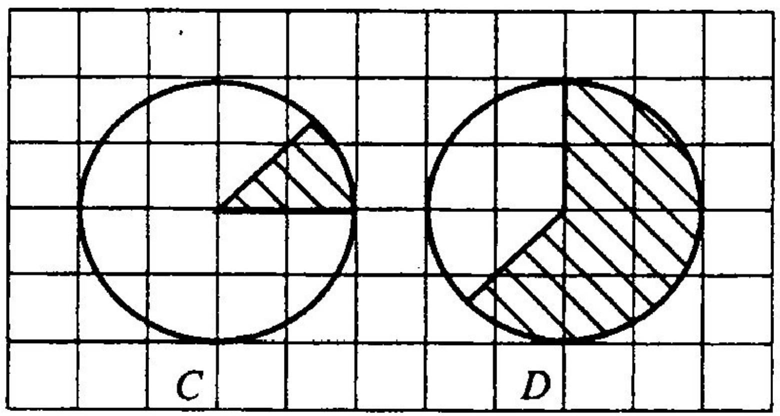

- **Площадь кругового сектора:**

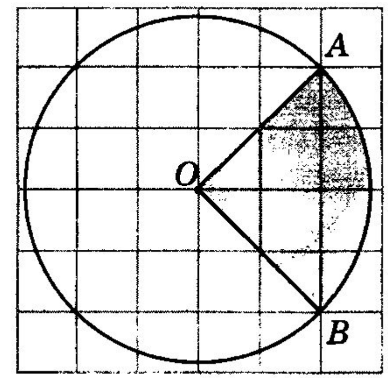
$$\boldsymbol{S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2 \varphi}{360}}$$

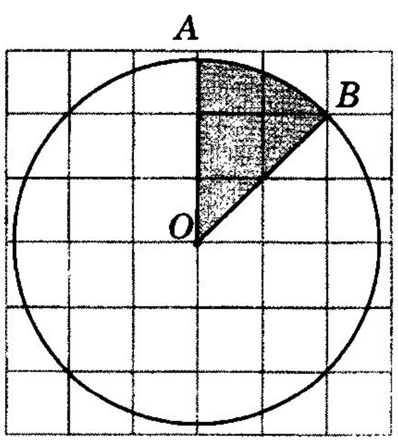
$$\boldsymbol{S_{\text{сек}} = \frac{1}{2} l \cdot R}$$

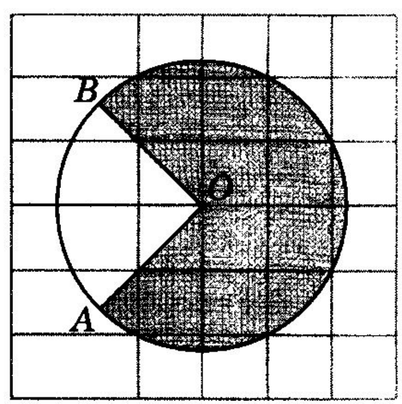
# Примеры задач

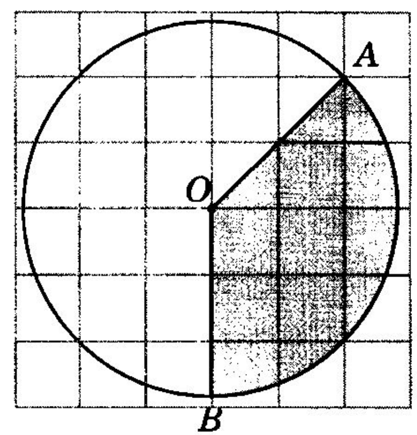
1. Найдите площади заштрихованных фигур, изображённых на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см × 1 см. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

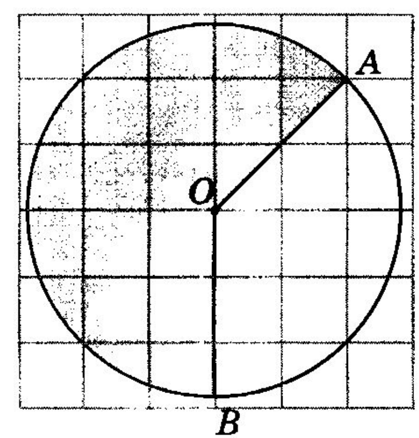


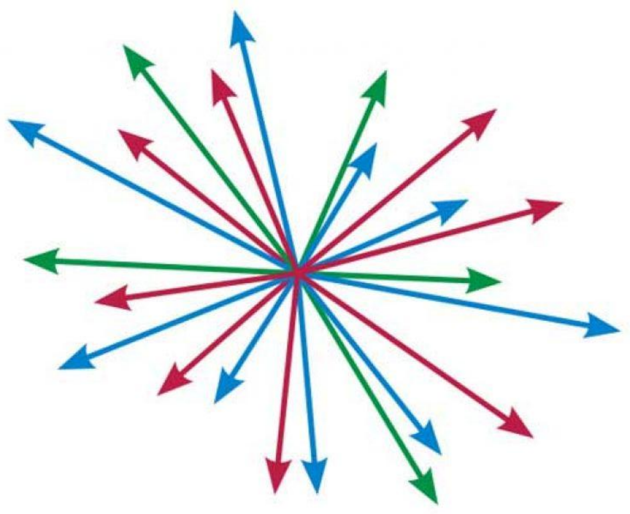



B5
B8

# Элементы планиметрии



## Координаты и векторы

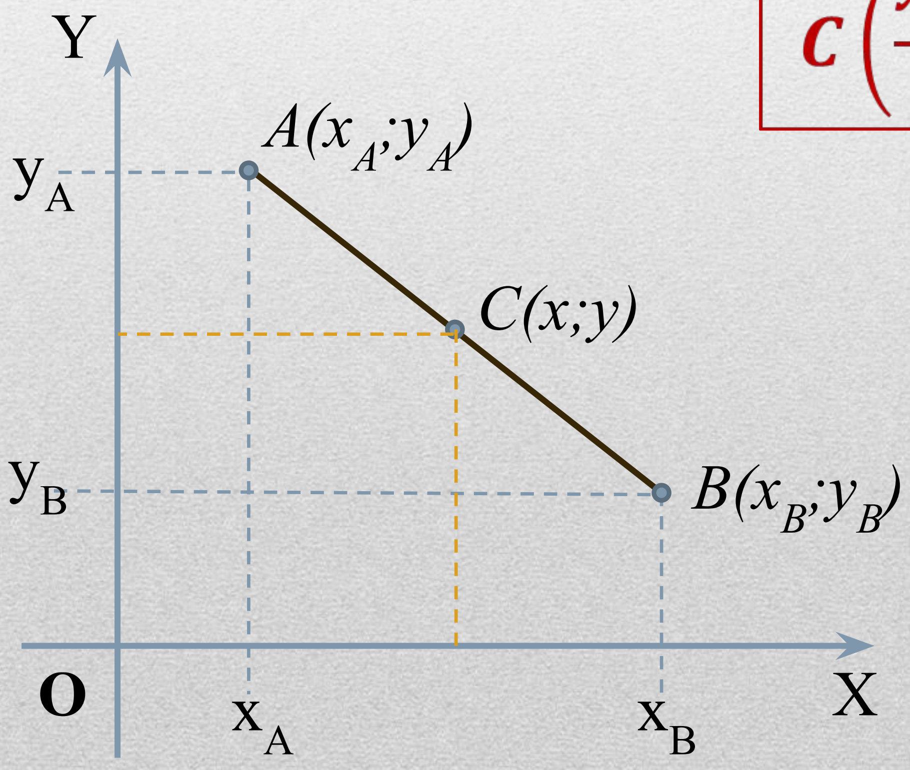
# Координаты точек

- **Расстояние между точками** $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

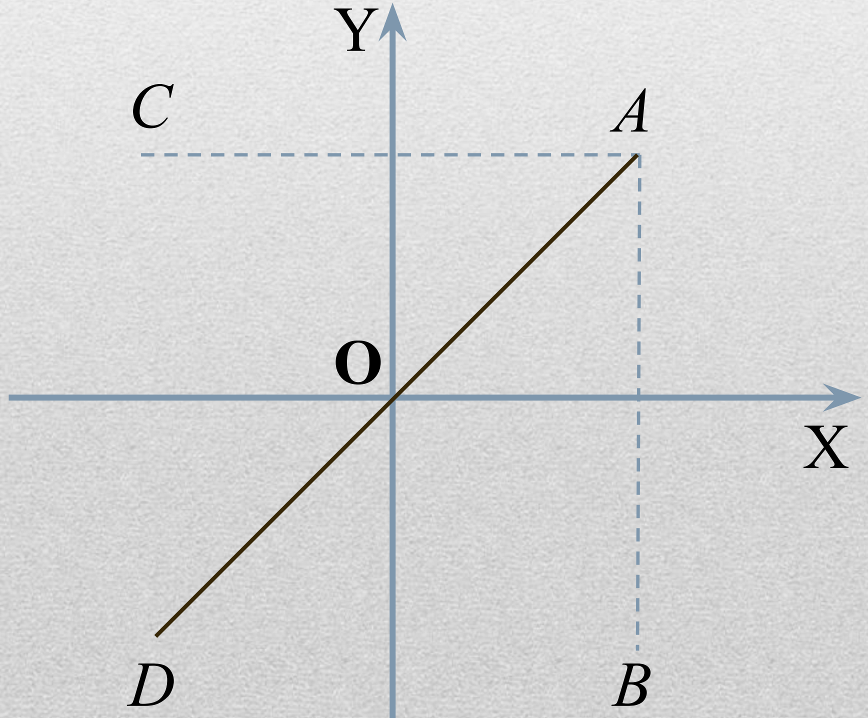
- **Середина C отрезка AB**, где $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$:

$$C\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$



# Координаты точек

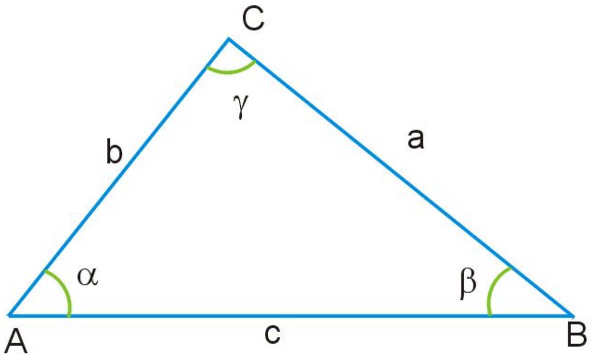
1. Если точки А и В симметричны относительно оси Ох (очи абсцисс), то их ординаты



# Треугольник

- **Треуго́льник** – многоугольник с тремя сторонами, или замкнутая ломаная, состоящая из трёх звеньев.

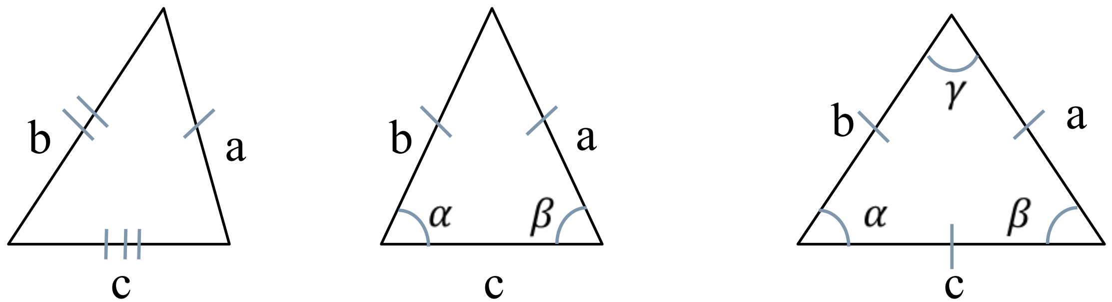
- **Основные элементы треугольника ABC:**
*Вершины* – точки A, B, и C;
*Стороны* – отрезки a = BC, b = AC и c = AB, соединяющие вершины;
*Углы* – α , β, γ образованные тремя парами сторон. Углы часто обозначают так же, как и вершины, – буквами A, B и C.



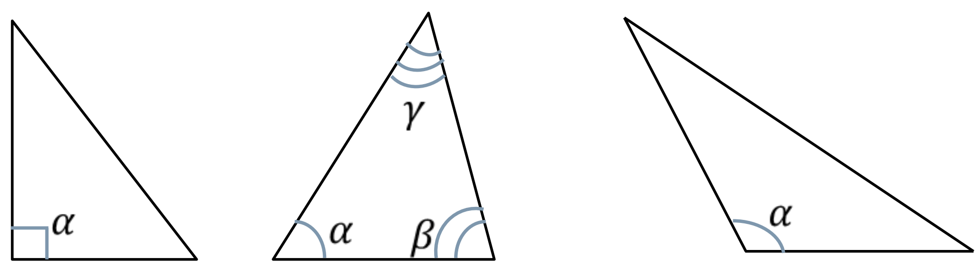

- Угол, образованный сторонами треугольника и лежащий в его внутренней области, называется **внутренним углом**, а смежный к нему является **смежным углом** треугольника.

# Виды треугольников

- Кроме основных элементов в треугольнике рассматривают и другие отрезки, обладающие интересными свойствами: **высоты**, **медианы**, **биссектрисы** и **средние линии**, которые связаны с **видами треугольников**.
- **По сторонам** выделяют разносторонний (произвольный), равнобедренный и равносторонний (правильный) треугольники.



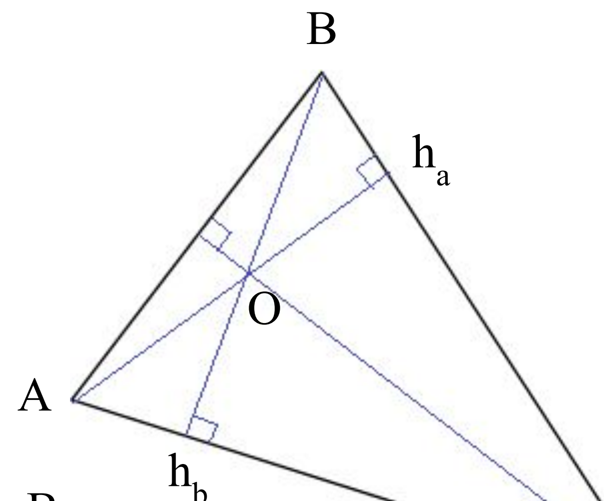

- **По углам** выделяют прямоугольный, остроугольный и тупоугольный треугольники.

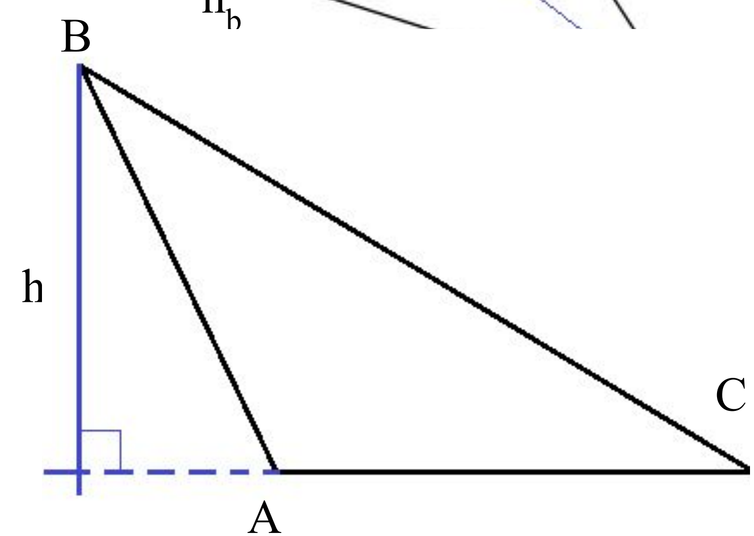


# Высота треугольника

- **Высота треугольника** – это перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противоположную сторону.
- **Свойства высоты треугольника:**

1. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобные исходному треугольнику.
2. В остроугольном треугольнике две его высоты отсекают от него подобные треугольники.
3. Если треугольник остроугольный, то все основания высот принадлежат сторонам треугольника, а у тупоугольного треугольника две высоты попадают на продолжение сторон.
4. Три высоты в остроугольном треугольнике пересекаются в одной точке и эту точку называют ортоцентром треугольника.



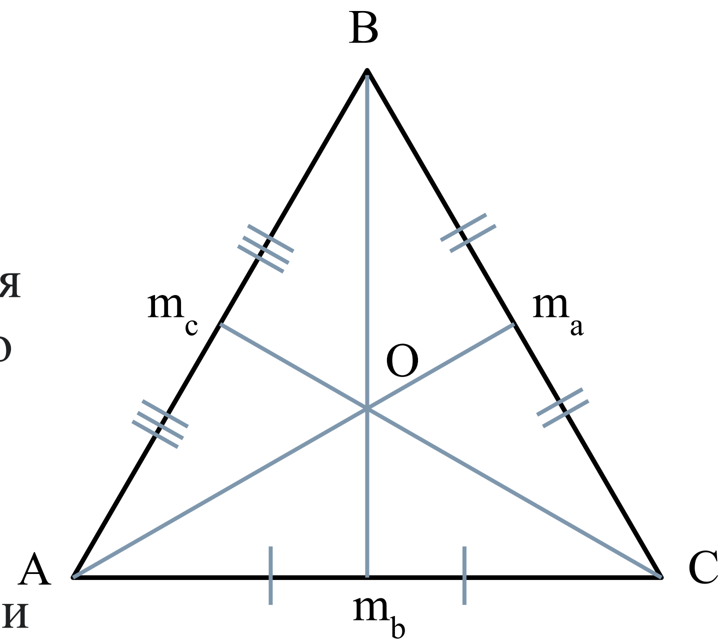



# Медиана треугольника

- **Медиана треугольника** (от лат. *mediana* – «средняя») – это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.

- **Свойства медианы треугольника:**

1. Медиана разбивает треугольник на два треугольника одинаковой площади.
2. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины. Эта точка называется центром тяжести треугольника.
3. Весь треугольник разделяется своими медианами на шесть равновеликих треугольников.

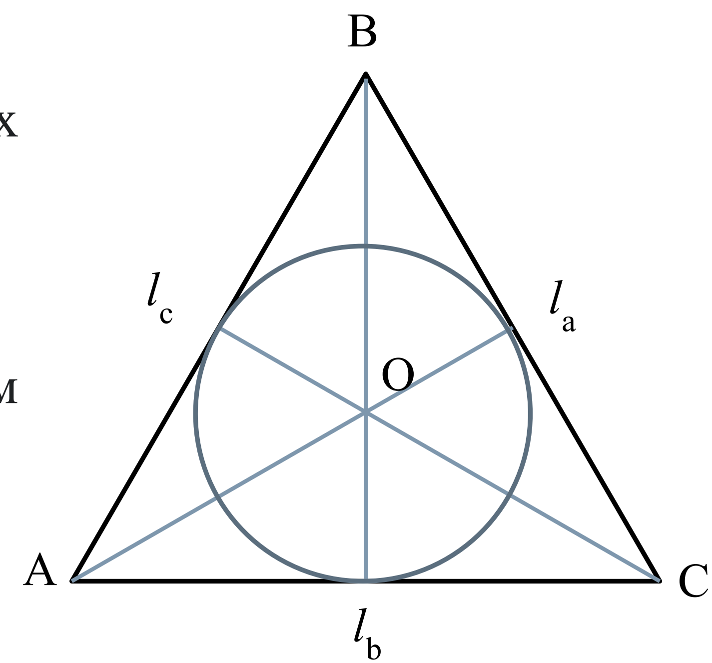


# Биссектриса треугольника

- **Биссектриса треугольника** (от лат. *bis* – «дважды» и *seko* – «рассекаю») называют заключенный внутри треугольника отрезок прямой, который делит пополам его угол.

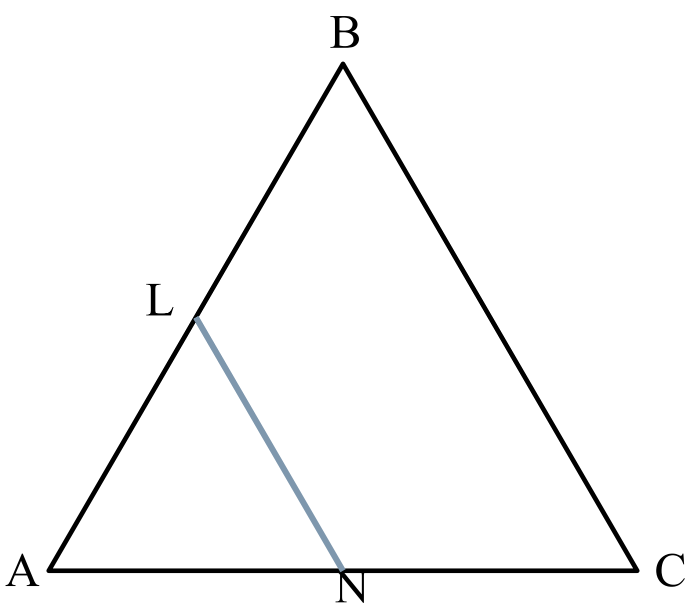
- **Свойства биссектрисы треугольника:**

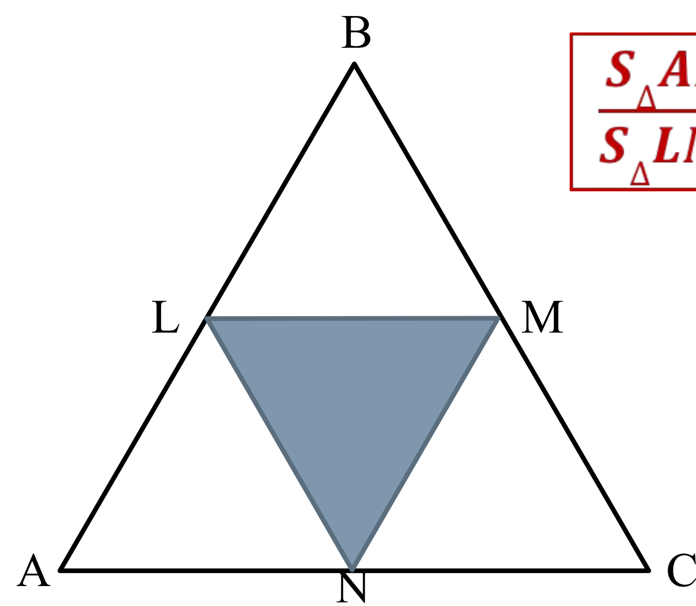
1. Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону в отношении, равном отношению двух прилежащих сторон.
2. Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке. Это точка называется центром вписанной окружности.
3. Биссектрисы внутреннего и внешнего углов перпендикулярны.



# Средняя линия треугольника

- **Средняя линия треугольника** – это отрезок, соединяющие середины двух сторон.
- Средняя линия треугольника параллельна одной из сторон треугольника и равна её половине.
- Три средние линии треугольника образуют «вписанный» в него треугольник, называемый **серединным**. Его площадь в четыре раза меньше площади данного треугольника.

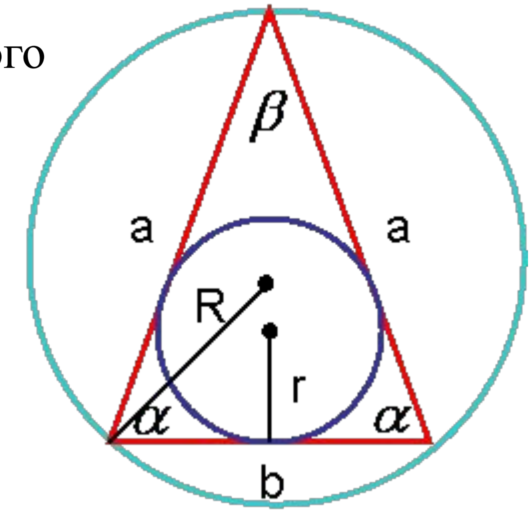



$$\frac{S_{\Delta}ABC}{S_{\Delta}LMN} = 4$$

# Равнобедренный треугольник

- **Равнобедренный треугольник** – треугольник, в котором две стороны равны между собой. По определению, правильный треугольник также является равнобедренным.
  - a – длина двух равных сторон равнобедренного треугольника,
  - b – длина третей стороны,
  - α и β – соответствующие углы,
  - R – радиус описанной окружности,
  - r – радиус вписанной окружности.

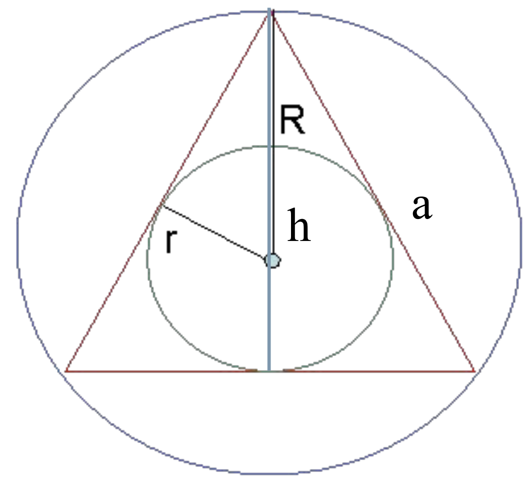



- **Свойства равнобедренного треугольника:**

1. Углы, противолежащие равным сторонам равнобедренного треугольника, равны между собой.
2. Биссектрисы, медианы и высоты, проведённые из этих углов, равны.
3. Биссектриса, медиана и высота, проведенные к основанию совпадают между собой.
4. Центры вписанной и описанной окружностей лежат на этой линии.
5. Углы, противолежащие равным сторонам, всегда острые .

# Равносторонний треугольник

- **Правильный треугольник** или **равносторонний треугольник** – правильный многоугольник с тремя сторонами. Все стороны равны




$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

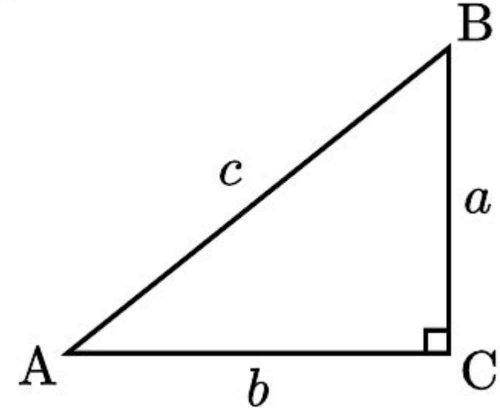
$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

# Прямоугольный треугольник

- Треугольник называют **прямоугольным**, если у него есть прямой угол.




- **Свойства прямоугольного треугольника:**
  1. Прямоугольный треугольник имеет две взаимно перпендикулярные стороны, называемые катетами; третья его сторона называется гипотенузой.
  2. По свойствам перпендикуляра и наклонных гипотенуза длиннее каждого из катетов (но меньше их суммы).
  3. Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна прямому углу.
  4. Две высоты прямоугольного треугольника совпадают с его катетами.
  5. Центр описанной окружности прямоугольного треугольника лежит в середине гипотенузы.
  6. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла на гипотенузу, является радиусом описанной около этого треугольника окружности.