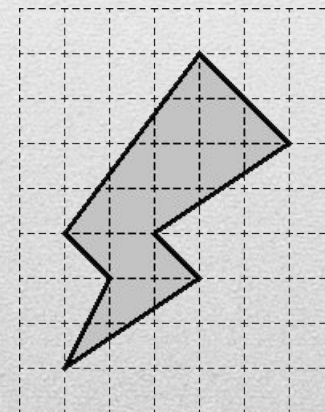
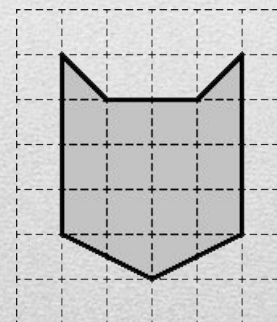
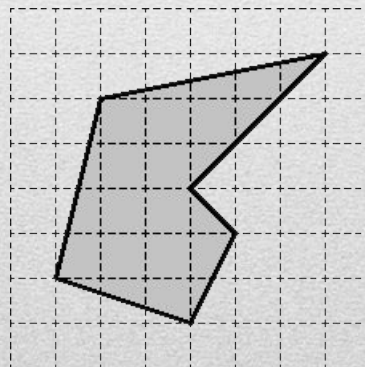
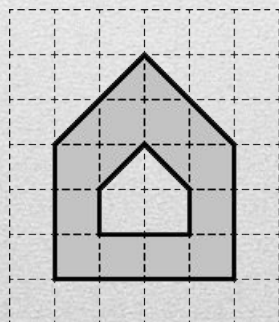
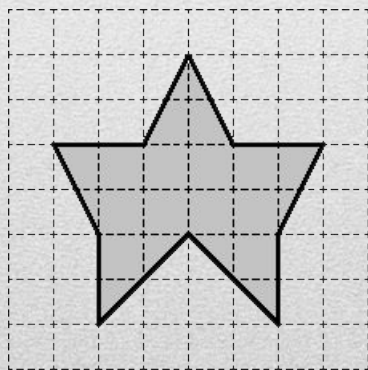


Элементы планиметрии

Планиметрия – это

- ❑ от латинского *planum* — «плоскость»,
 - ❑ от древне-греческого **μετρέω** — «измеряю»
 - ❑ **раздел евклидовой геометрии**, изучающий двумерные (одноплоскостные) фигуры (т.е. фигуры, которые можно расположить в пределах одной плоскости).
-

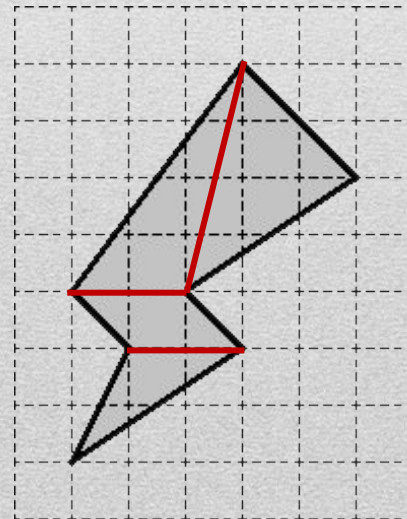
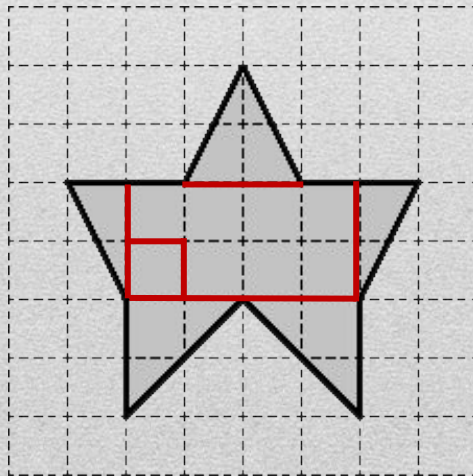
Элементы планиметрии



Площади

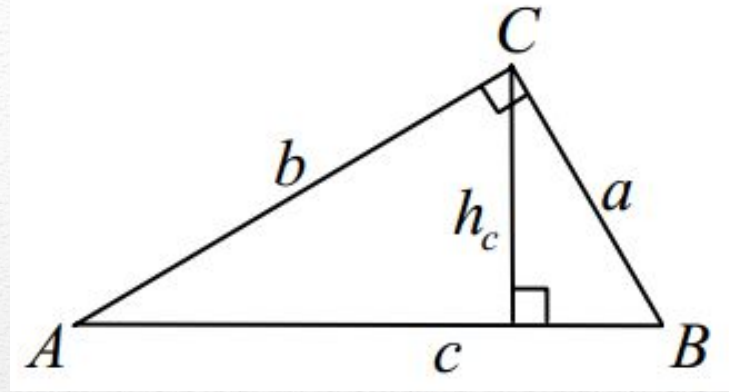
Площади плоских фигур

- **Площадь плоской фигуры** – это аддитивная числовая характеристика фигуры, целиком принадлежащей одной плоскости.
- **Аддитивность** (от латинского *additivus* – прибавляемый) – свойство величин, состоящее в том, что значение величины, соответствующее целому объекту, равно сумме объемов составляющих его частей.
- Аддитивность площади означает, что площадь фигуры равна сумме площадей её частей, если этих частей конечное число.



Прямоугольный треугольник

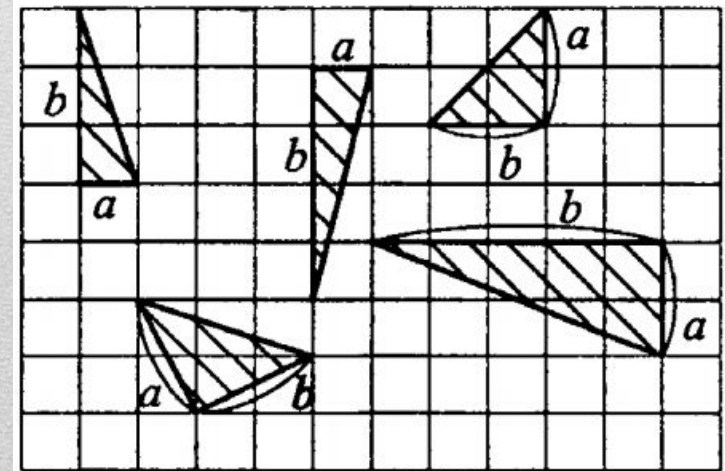
! В прямоугольном треугольнике есть прямой угол, равный 90° . Сторона напротив прямого угла называется **гипотенузой**. Две прилежащие к прямому углу стороны называют **катетами**.



- **Теорема Пифагора** – одна из основополагающих теорем евклидовой геометрии, устанавливающая соотношение между сторонами прямоугольного треугольника.
- **Теорема Пифагора** : в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы (c) равен сумме квадратов катетов (a и b).
- **Площадь** прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов:

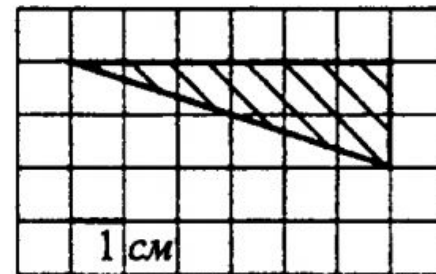
$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$S = \frac{ab}{2}$$

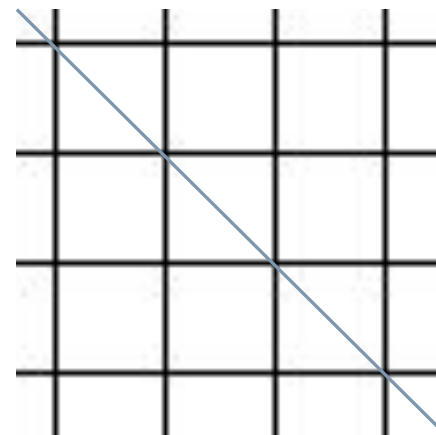


Примеры задач

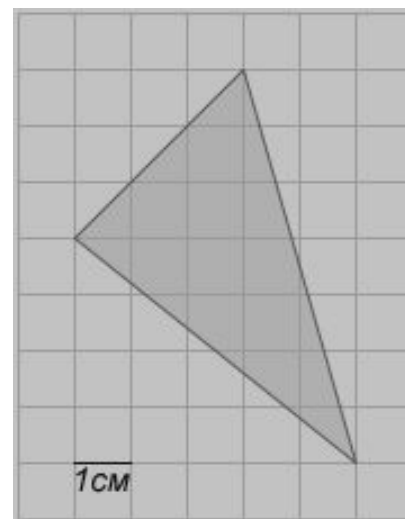
1. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



2. Найдите диагональ квадрата $1\text{ см} \times 1\text{ см}$; $2\text{ см} \times 2\text{ см}$; $3\text{ см} \times 3\text{ см}$.

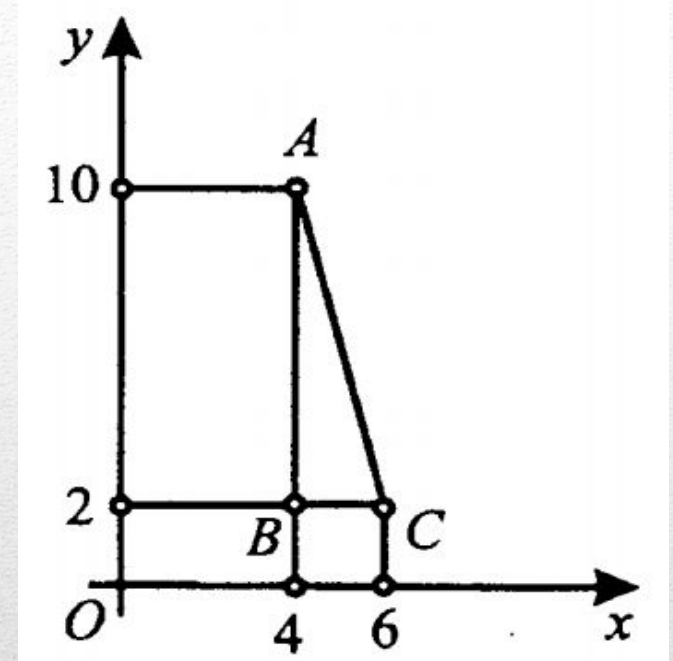


3. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Прямоугольный треугольник

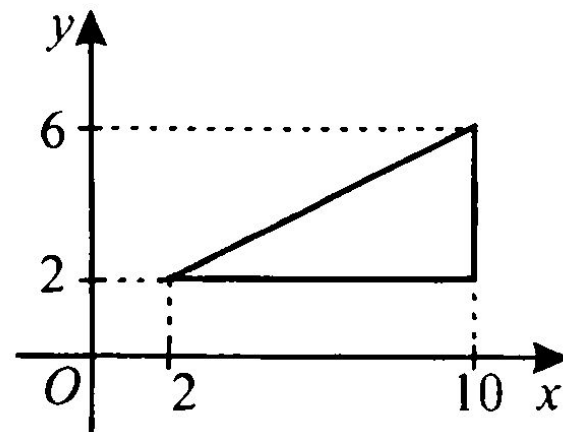
- Любая точка на координатной плоскости характеризуется двумя числами – **координатами**: абсциссой и ординатой.
- Если у двух точек одинаковые абсциссы или одинаковые ординаты, то соответствующие отрезки параллельны осям координат. В таких случаях длину отрезка можно найти, если вычесть различающиеся координаты точек.
- Например: $AB \parallel Oy$, а значит $AB = 10 - 2 = 8$
 $BC \parallel Ox$, а значит $BC = 6 - 4 = 2$
AC можно найти по теореме Пифагора, рассмотрев $\triangle ABC$



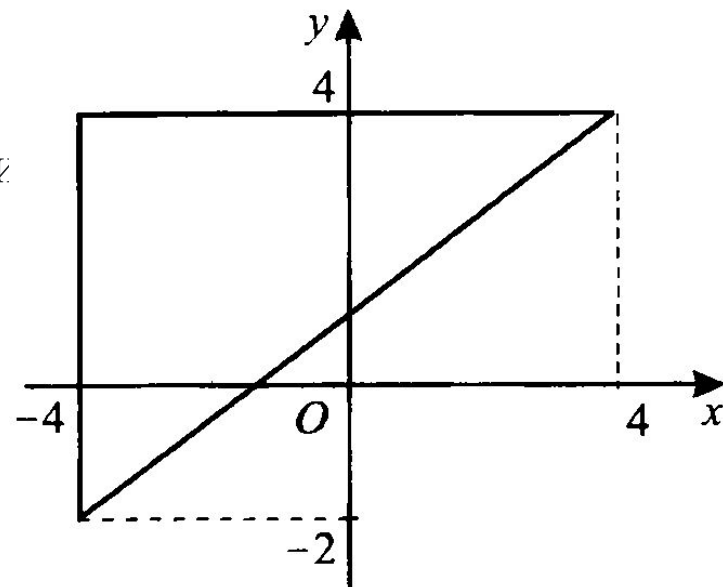
$A(4;10)$, $B(4; 2)$, $C(6;2)$

Примеры задач

1. Найдите площадь треугольника, изображённого на координатной плоскости.



2. Найдите площадь треугольника, изображённого на координатной плоскости.

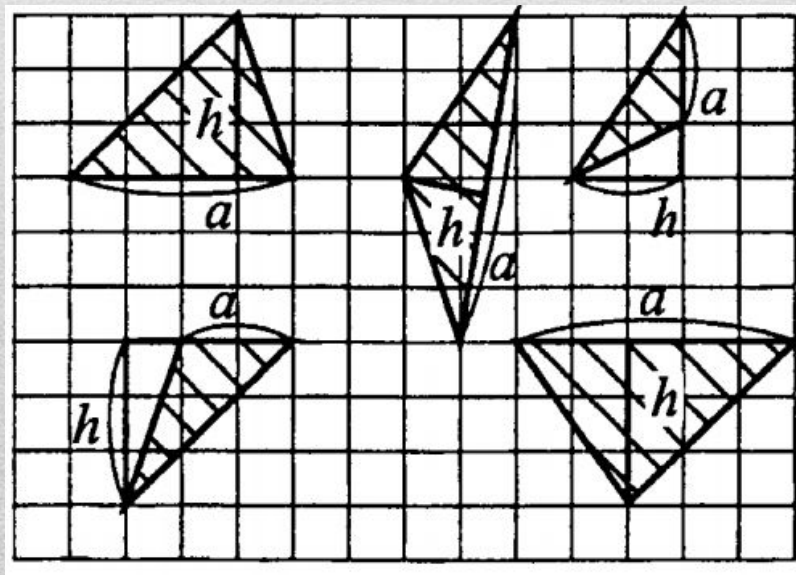


Площадь произвольного треугольника

- Площадь произвольного треугольника равна половине произведения длины его стороны (a) на высоту (h), проведенную к этой стороне:

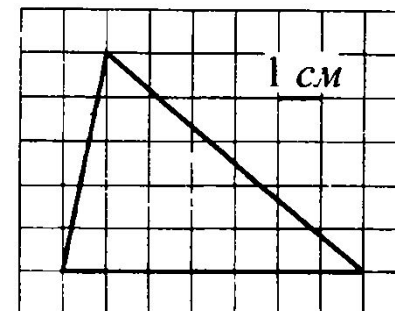
$$S = \frac{ah}{2}$$

- Как правило, в качестве высоты и основания удобно брать те стороны, которые проходят по линиям клеточной бумаги (или же проходит параллельно осям координат).

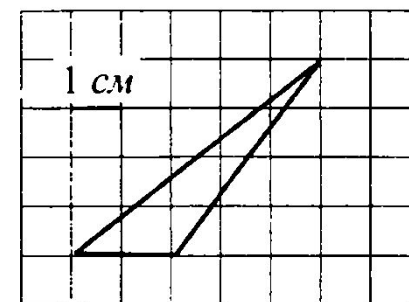


Примеры задач

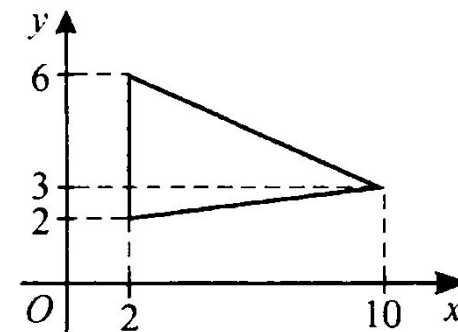
1. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$.
Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



2. Найдите площадь треугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$.
Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

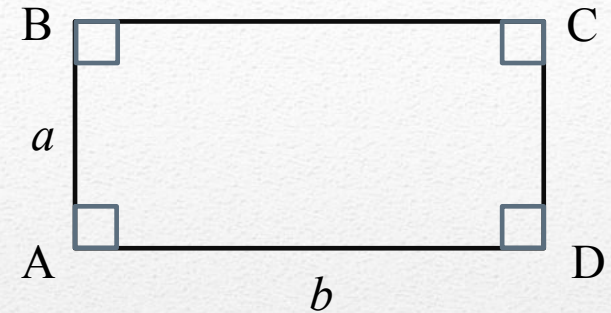


3. Найдите площадь треугольника, изображённого на координатной плоскости.

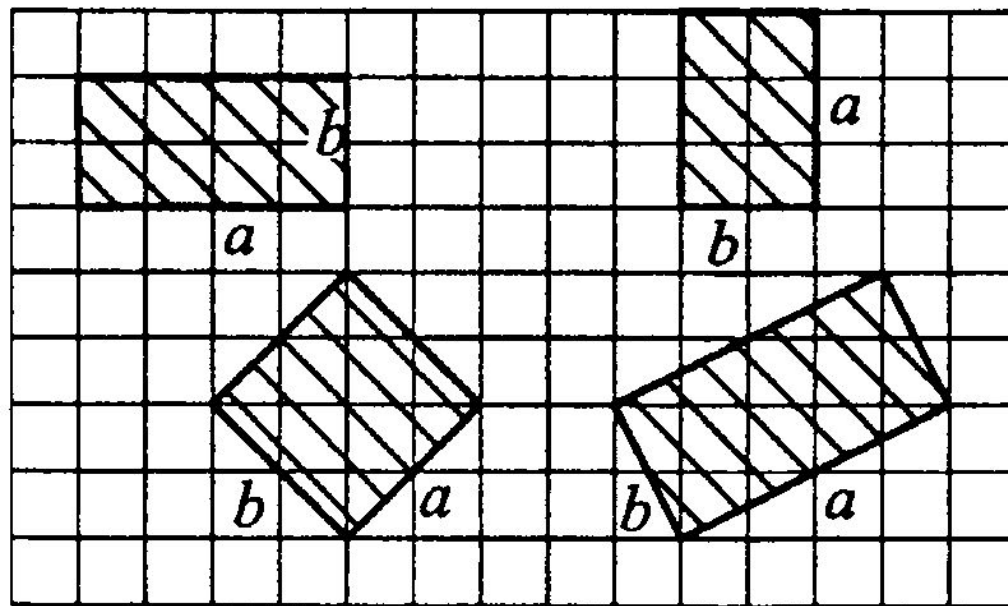


Площадь прямоугольника (квадрата)

- **Прямоугольник** – четырёхугольник, у которого все углы прямые (равны 90 градусам). Противоположные стороны прямоугольника попарно равны.
- **Площадь прямоугольника** равна произведению его смежных сторон:



$$S = ab$$

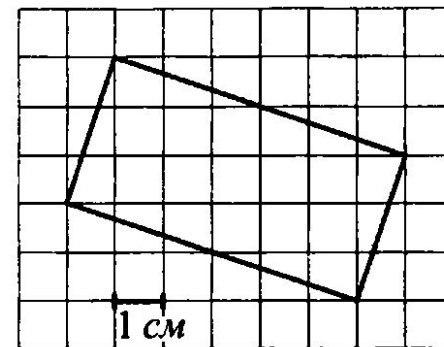


- ! **Прямоугольник**, все стороны которого равны, называется **квадратом**.
- ! **Площадь квадрата** равна квадрату его стороны:

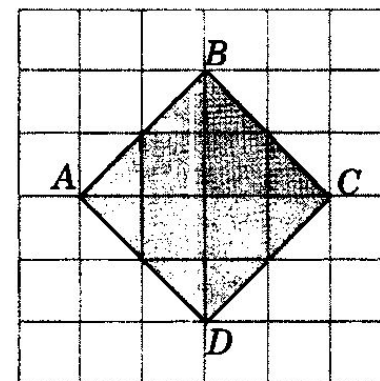
$$S = a^2$$

Примеры задач

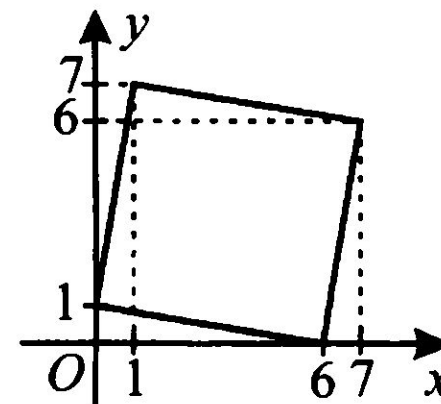
1. Найдите площадь прямоугольника, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



2. Найдите площадь квадрата, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$.
• Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



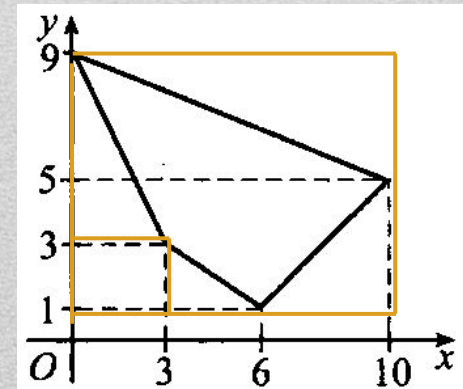
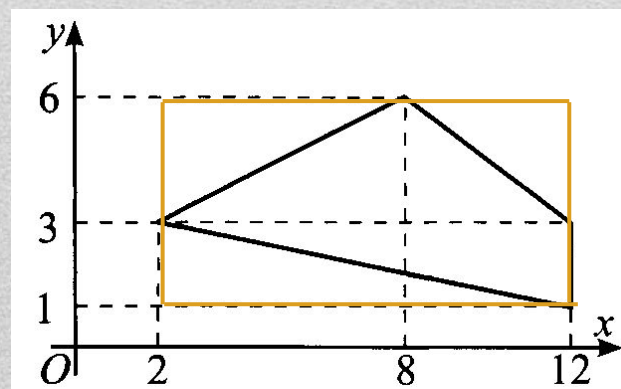
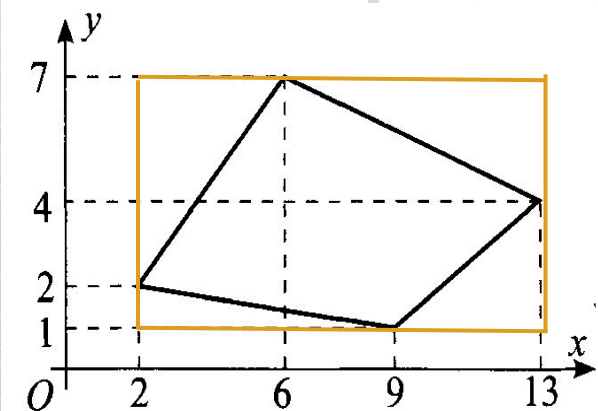
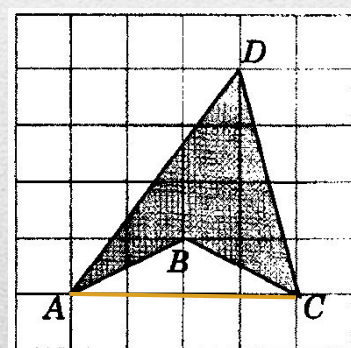
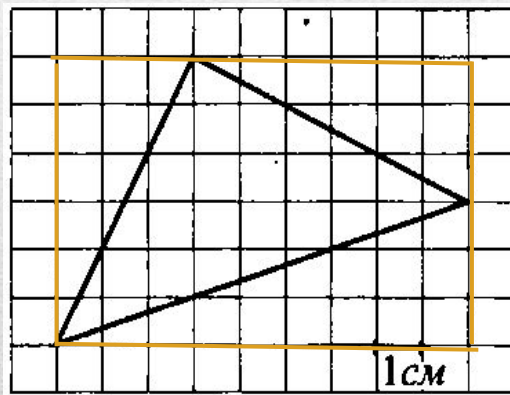
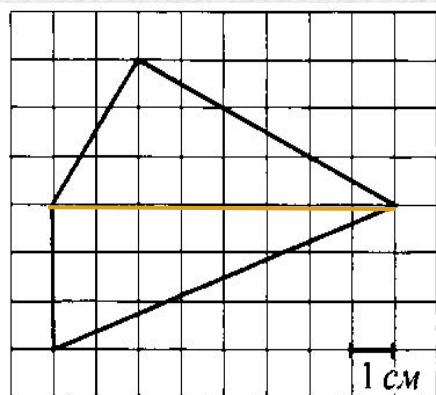
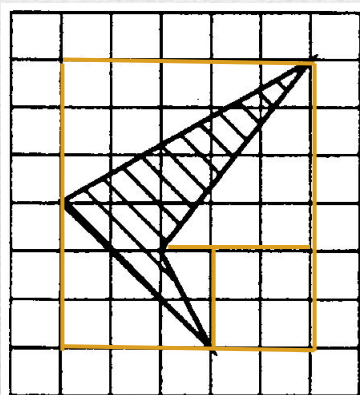
3. Найдите площадь фигуры, изображённой на координатной плоскости.



Площадь произвольного многоугольника

- Для нахождения площади произвольного многоугольника необходимо **разбить** фигуру на треугольники и прямоугольники **ИЛИ** **достроить** до треугольника или прямоугольника.

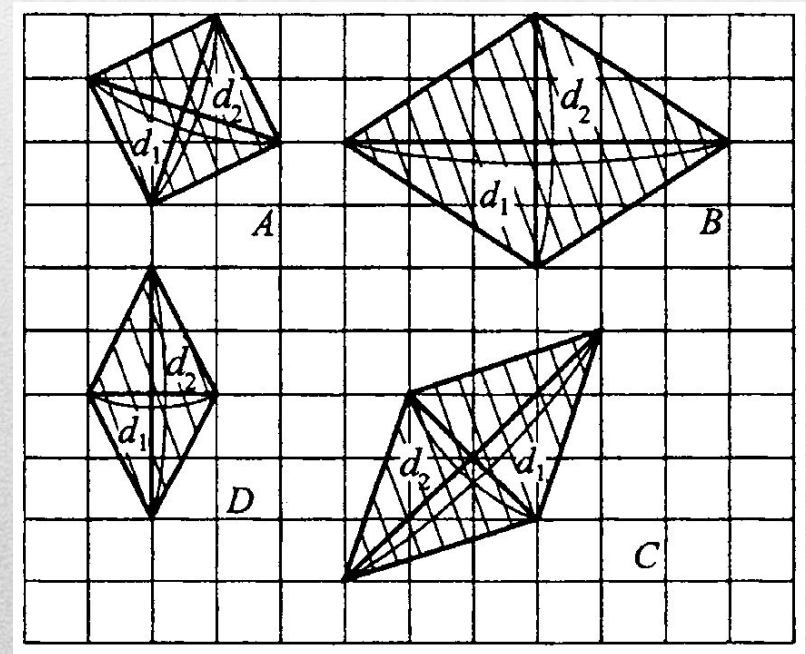
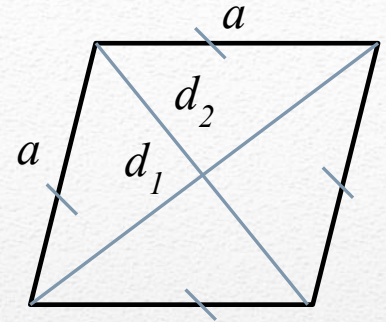
Примеры произвольных многоугольников:



Площадь ромба

- **Ромб** – это четырехугольник, у которого все стороны равны. В ромбе диагонали взаимно перпендикулярны и делятся пополам точкой пересечения.
- **Площадь ромба** равна половине произведения его диагоналей:

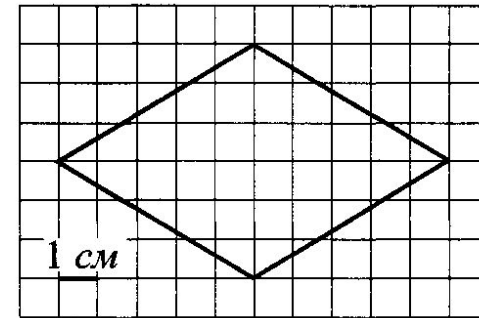
$$S = \frac{d_1 d_2}{2}$$



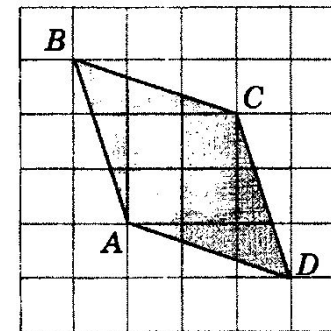
- ❗ Квадрат является ромбом.
- ❗ Ромб является параллелограммом и обладает его свойствами.

Примеры задач

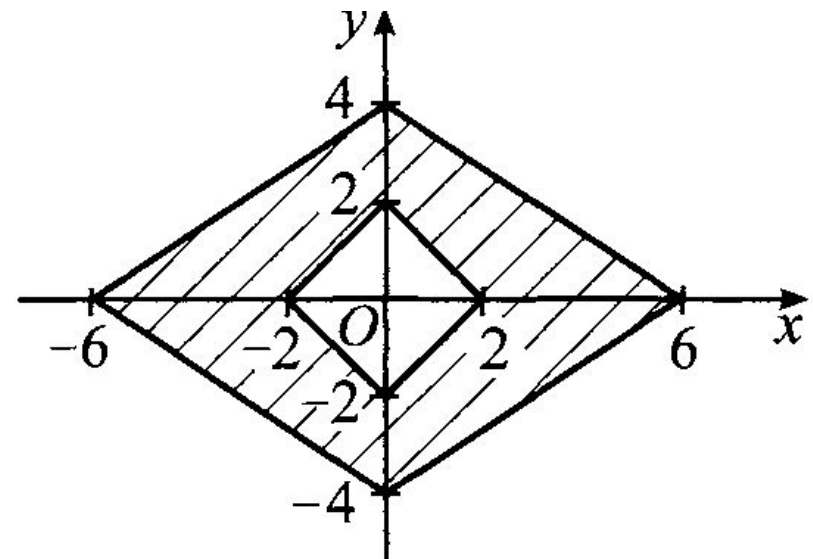
1. Найдите площадь ромба, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



2. Найдите площадь ромба, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

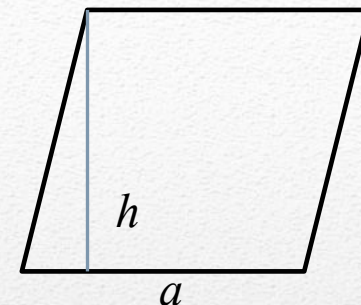


3. Найдите площадь закрашенной фигуры изображённой на координатной плоскости.



Площадь параллелограмма

- **Параллелограмм** – четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны, т.е. лежат на параллельных прямых.



Свойства параллелограмма:

- Противоположные стороны попарно равны и параллельны.
 - Противоположные углы попарно равны.
 - Диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
- **Площадь параллелограмма** равна произведению длины его стороны (a) на высоту (h), проведённую к этой стороне:

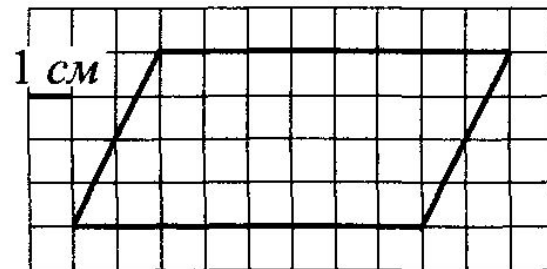
$$S = ah$$



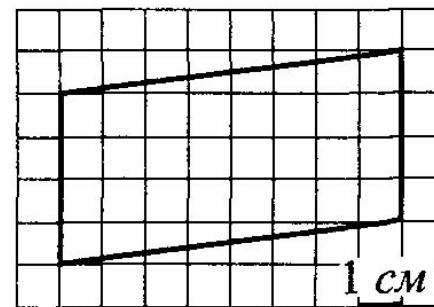
Прямоугольник, квадрат, ромб – это четырёхугольники, которые являются параллелограммом. Они обладают свойствами параллелограмма.

Примеры задач

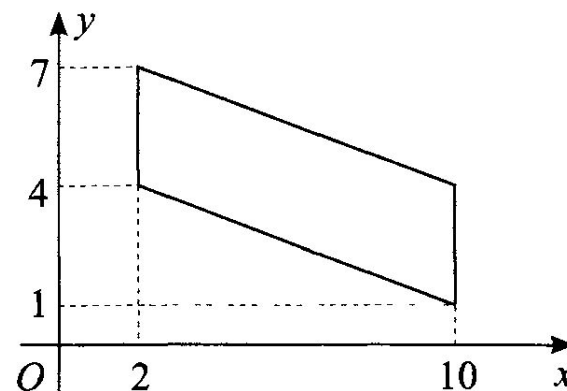
1. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



2. Найдите площадь параллелограмма, изображённого на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

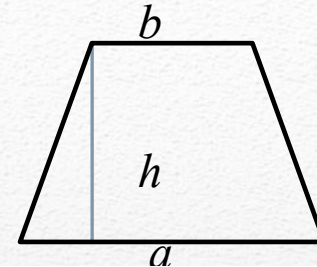


3. Найдите площадь фигуры, изображённой на координатной плоскости.



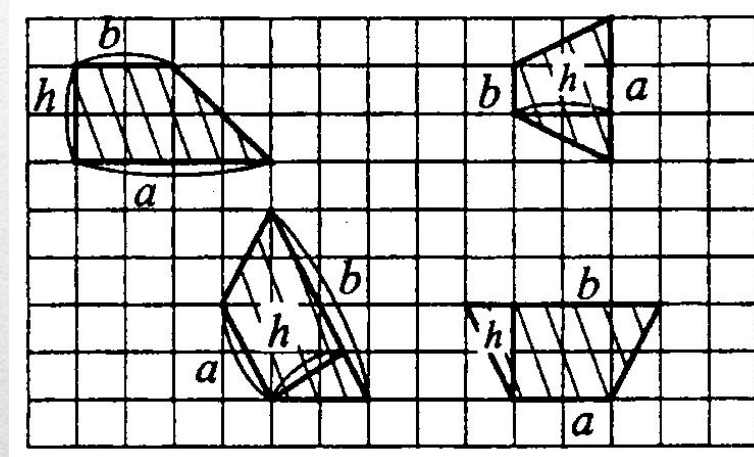
Площадь трапеции

- **Трапеция** – четырёхугольник, две противоположные стороны которого параллельны между собой, а две другие не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются **основаниями**, а непараллельные – **боковыми сторонами**.



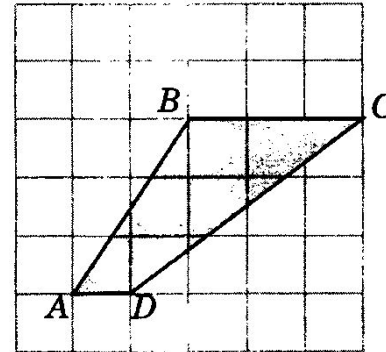
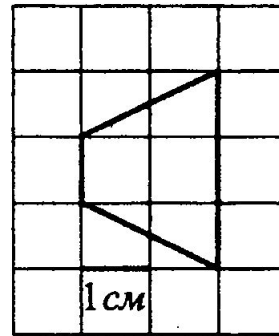
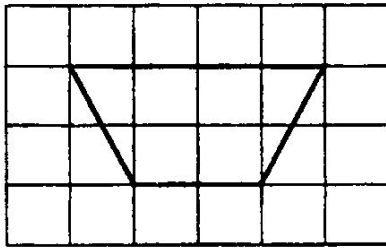
- **Площадь трапеции** равна половине произведения суммы оснований ($a + b$) на высоту (h):

$$S = \frac{(a + b)h}{2}$$

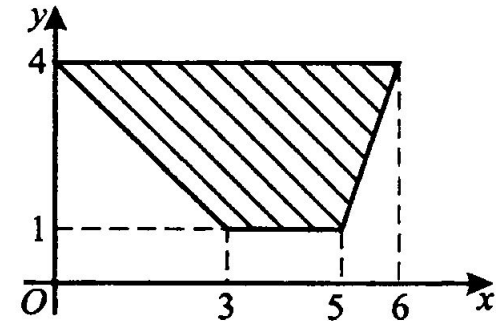
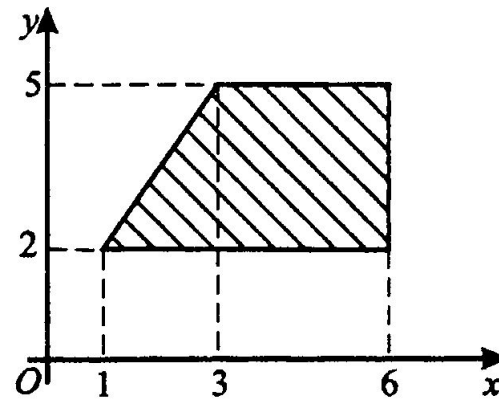
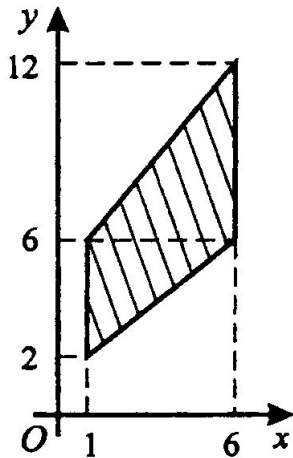


Примеры задач

1. Найдите площади трапеций, изображённых на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



2. Найдите площадь трапеций, изображённых на координатной плоскости.

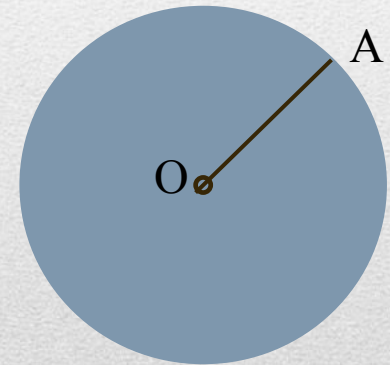
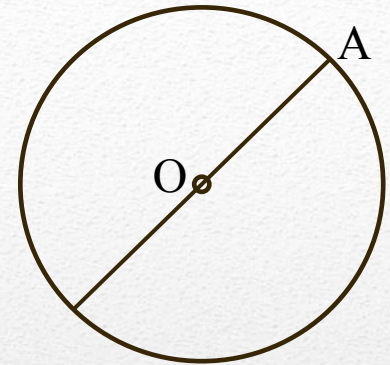


Площадь круга

- **Окружность** – замкнутая плоская кривая, все точки которой одинаково удалены от данной точки (центра), лежащей в той же плоскости, что и кривая.
- **Круг** – множество точек плоскости, удаленных от заданной точки этой плоскости (центр круга — O) на расстояние, не превышающее заданное (радиус круга).
- **Площадь круга** равна произведению числа π на квадрат радиуса:

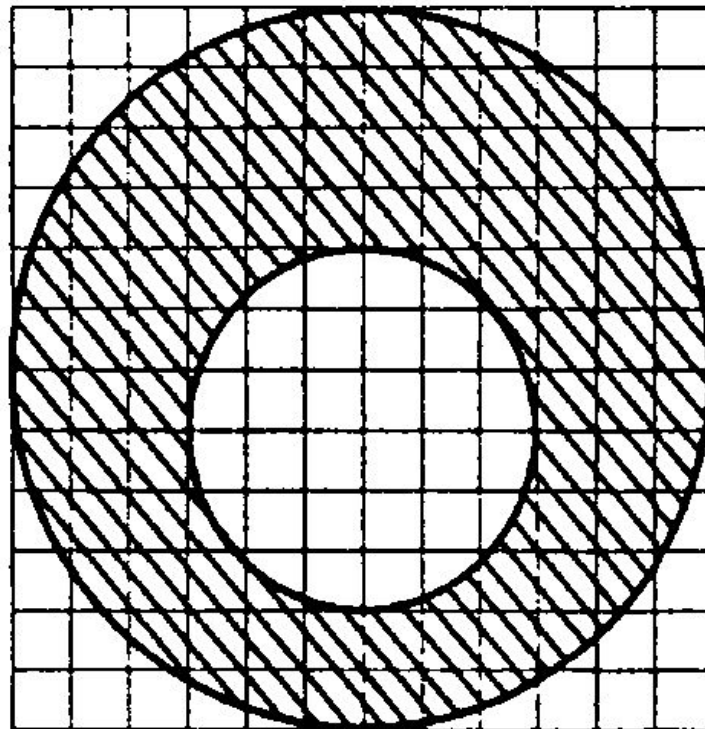
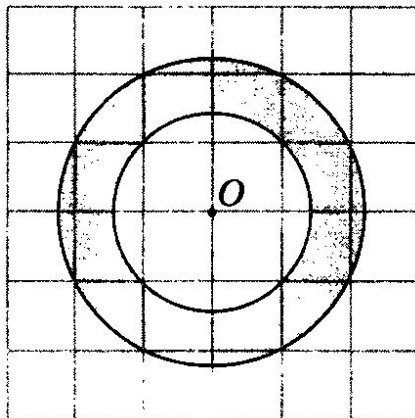
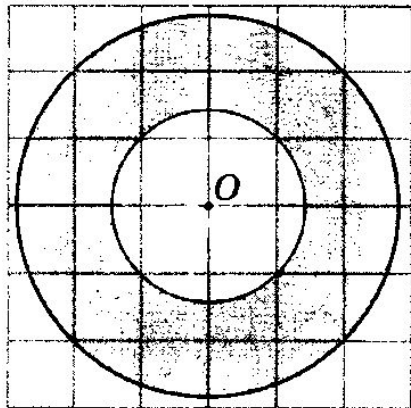
$$S = \pi R^2$$

$$S = \frac{\pi D^2}{4}$$



Примеры задач

1. Найдите площади заштрихованных фигур, изображённых на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

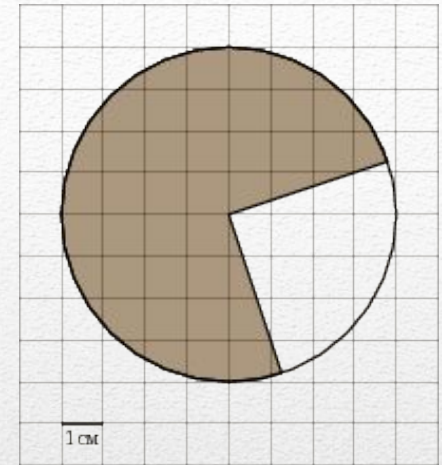


Площадь кругового сектора

- **Круговой сектор** – часть круга, лежащая внутри соответствующего центрального угла.

φ – соответствующий центральный угол,

l – длина дуги сектора



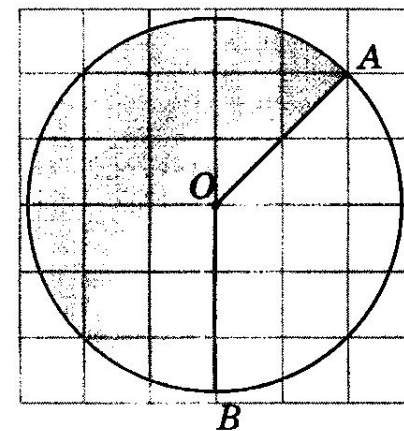
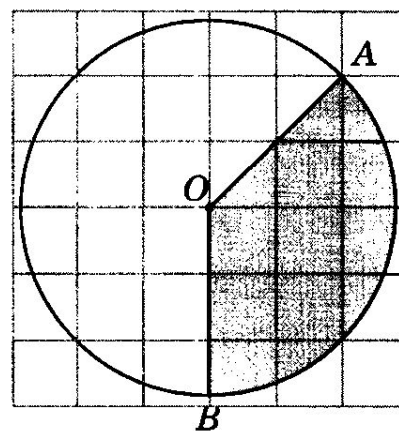
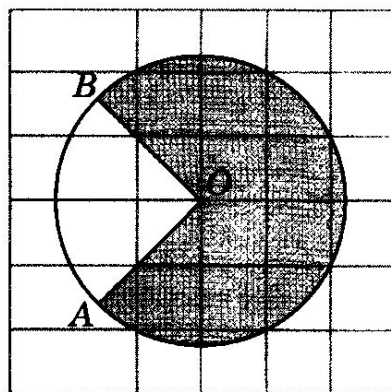
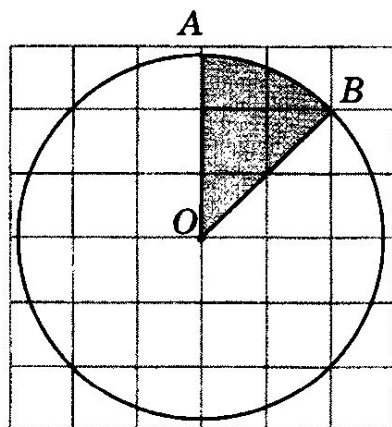
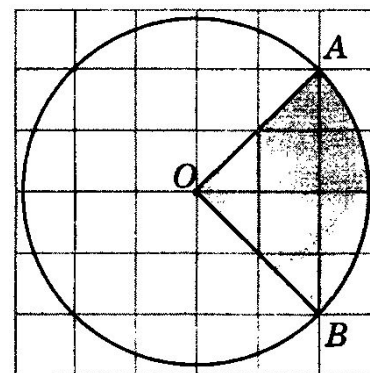
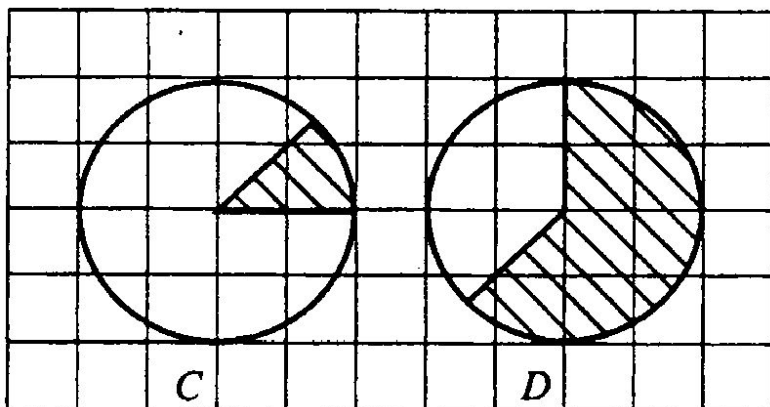
- **Площадь кругового сектора:**

$$S_{\text{сек}} = \frac{\pi R^2 \varphi}{360}$$

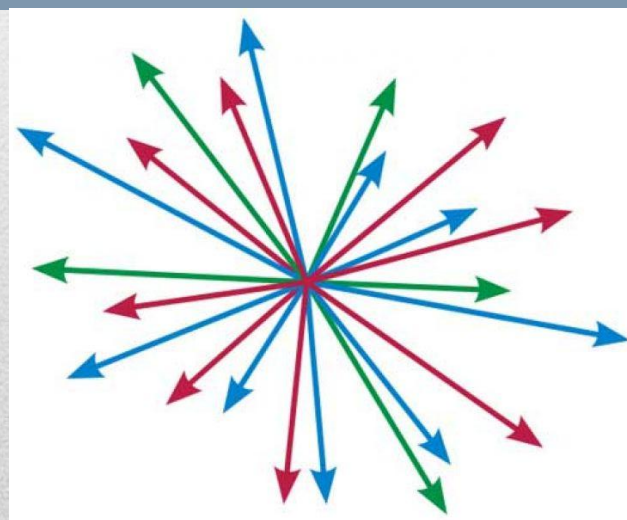
$$S_{\text{сек}} = \frac{1}{2} l \cdot R$$

Примеры задач

1. Найдите площади заштрихованных фигур, изображённых на клетчатой бумаге с размером клетки $1\text{ см} \times 1\text{ см}$. Ответ дайте в квадратных сантиметрах.



Элементы планиметрии



Координаты и векторы

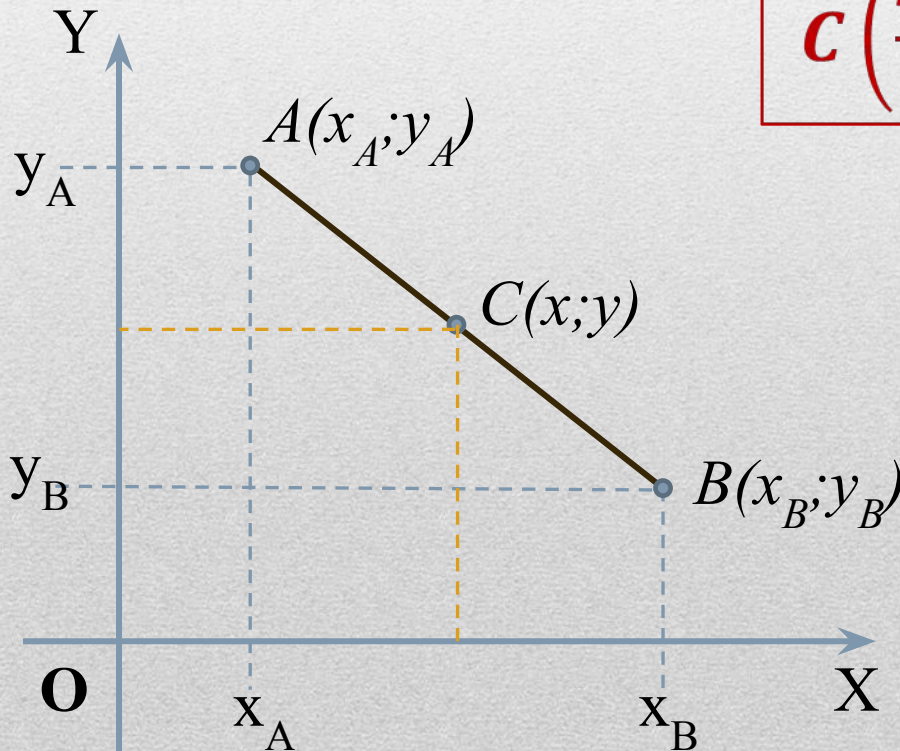
Координаты точек

- Расстояние между точками $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

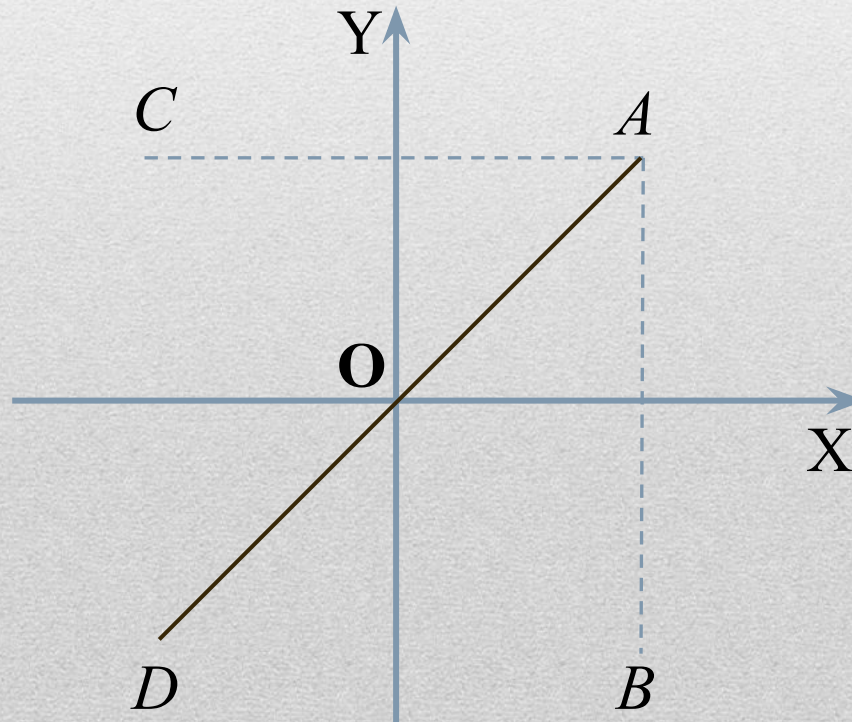
- Середина C отрезка AB , где $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$:

$$C\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$



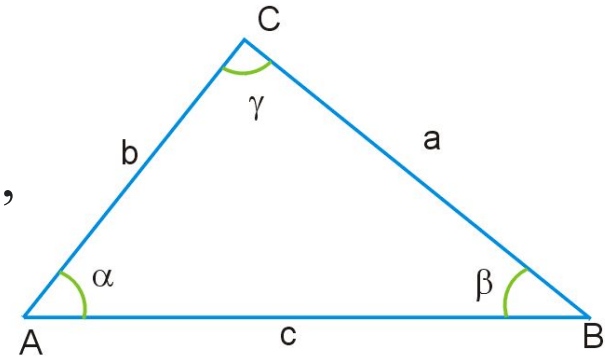
Координаты точек

1. Если точки A и B симметричны относительно оси Ox (оси абсцисс), то их ординаты



Треугольник

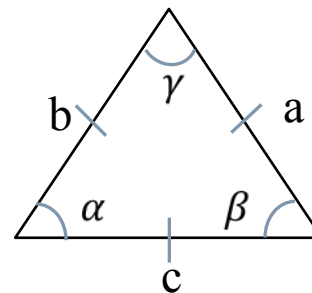
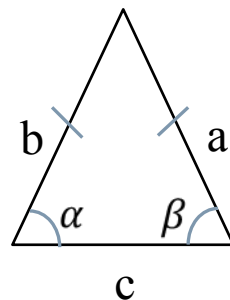
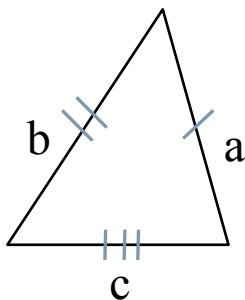
- **Треуго́льник** – многоугольник с тремя сторонами, или замкнутая ломаная, состоящая из трёх звеньев.
- **Основные элементы треугольника ABC:**
 - Вершины* – точки A, B, и C;
 - Стороны* – отрезки $a = BC$, $b = AC$ и $c = AB$, соединяющие вершины;
 - Углы* – α , β , γ образованные тремя парами сторон. Углы часто обозначают так же, как и вершины, – буквами A, B и C.
- Угол, образованный сторонами треугольника и лежащий в его внутренней области, называется **внутренним углом**, а смежный к нему является **смежным углом** треугольника.



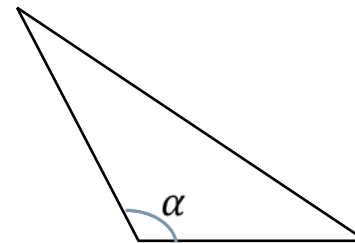
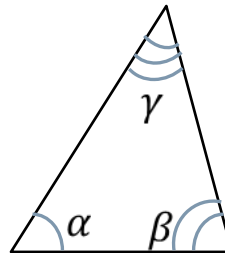
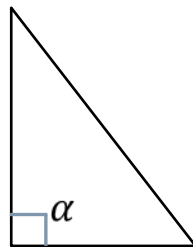


Виды треугольников

- Кроме основных элементов в треугольнике рассматривают и другие отрезки, обладающие интересными свойствами: высоты, медианы, биссектрисы и средние линии, которые связаны с **видами треугольников**.
- По сторонам** выделяют разносторонний (произвольный), равнобедренный и равносторонний (правильный) треугольники.

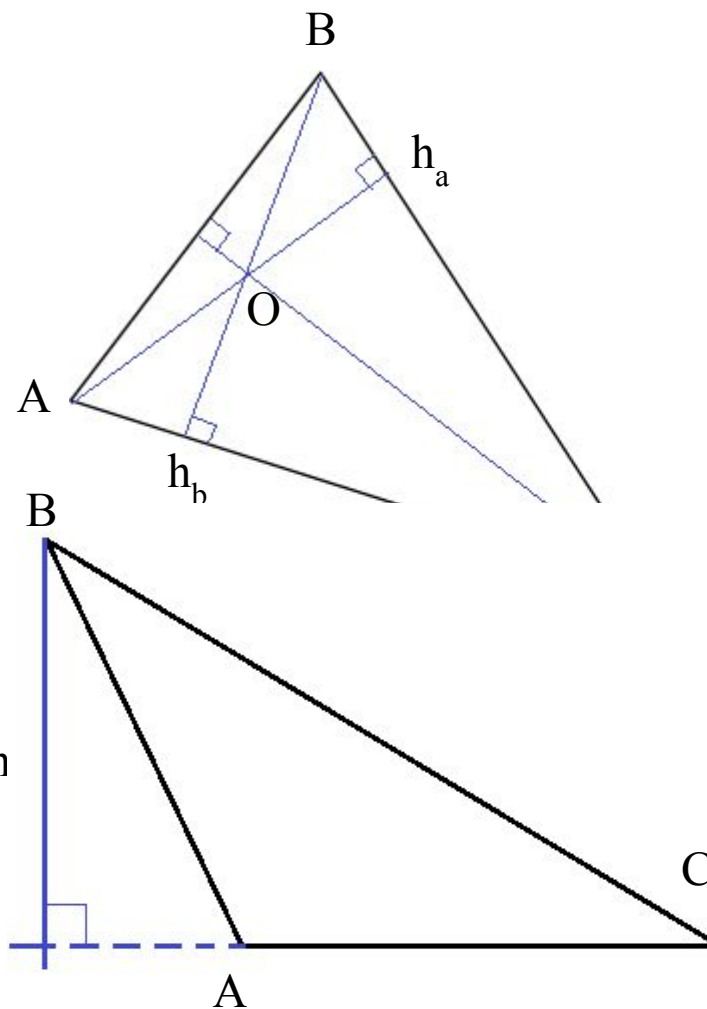


- По углам** выделяют прямоугольный, остроугольный и тупоугольный треугольники.



Высота треугольника

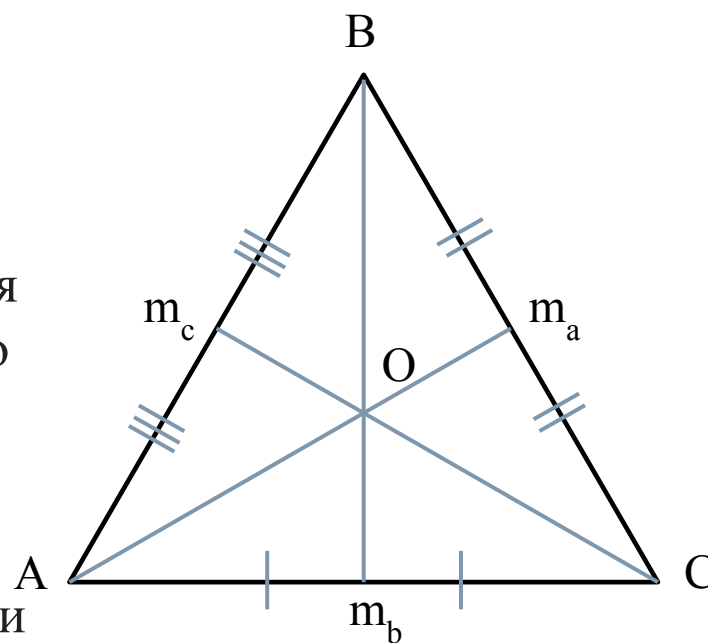
- **Высота треугольника** – это перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противоположную сторону.
- **Свойства высоты треугольника:**
 1. В прямоугольном треугольнике высота, проведенная из вершины прямого угла, разбивает его на два треугольника, подобные исходному треугольнику.
 2. В остроугольном треугольнике две его высоты отсекают от него подобные треугольники.
 3. Если треугольник остроугольный, то все основания высот принадлежат сторонам треугольника, а у тупоугольного треугольника две высоты попадают на продолжение сторон.
 4. Три высоты в остроугольном треугольнике пересекаются в одной точке и эту точку называют ортоцентром треугольника.



Медиана треугольника

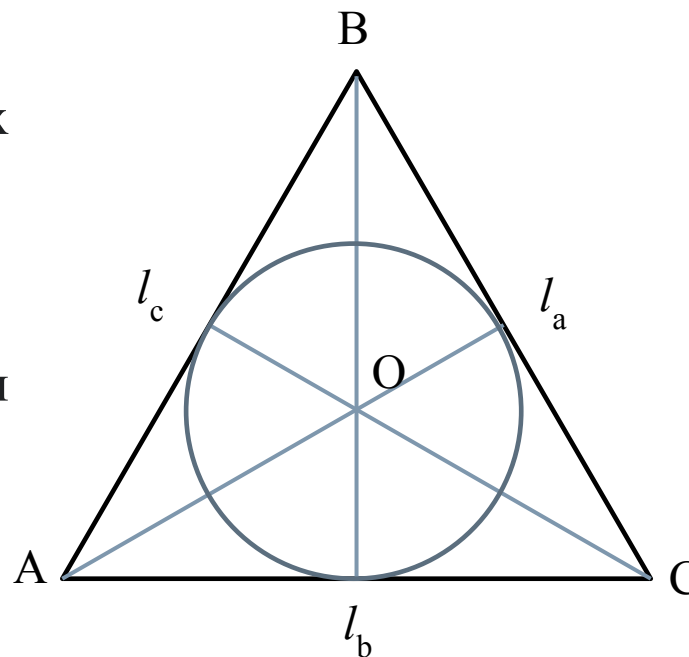
- **Медиана треугольника** (от лат. *mediana* – «средняя») – это отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.
- **Свойства медианы треугольника:**

1. Медиана разбивает треугольник на два треугольника одинаковой площади.
2. Медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит каждую из них в отношении 2:1, считая от вершины. Эта точка называется центром тяжести треугольника.
3. Весь треугольник разделяется своими медианами на шесть равновеликих треугольников.



Биссектриса треугольника

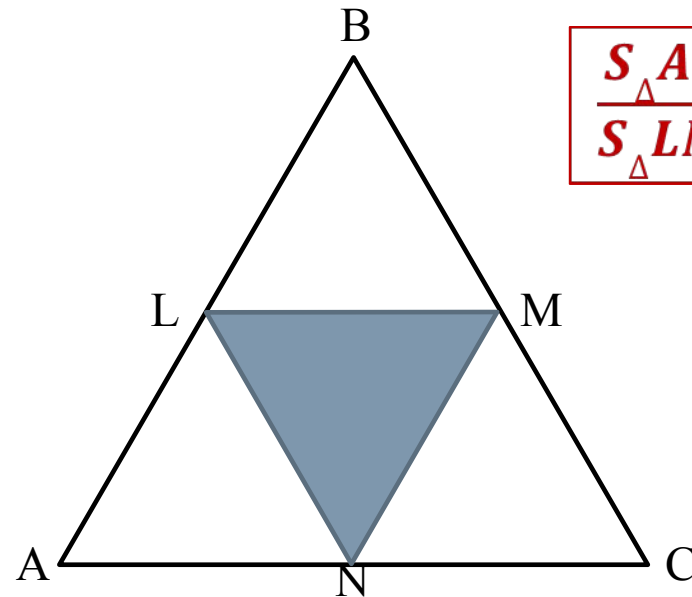
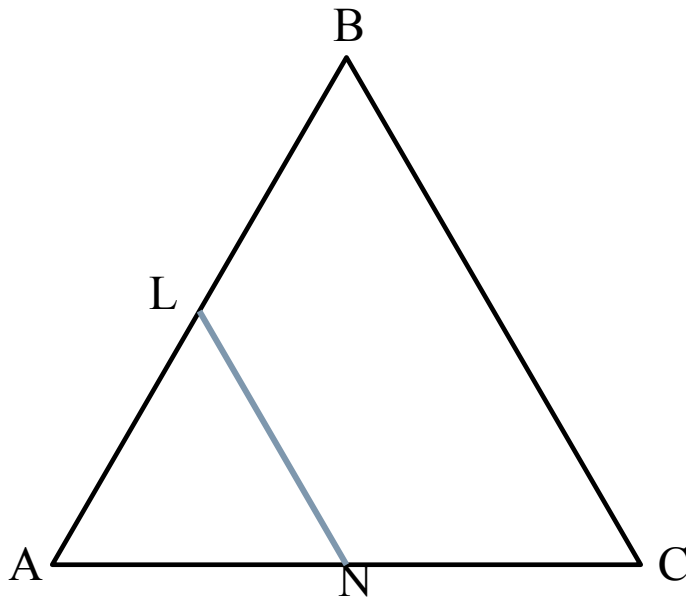
- **Биссектриса треугольника** (от лат. *bis* – «дважды» и *seko* – «рассекаю») называют заключенный внутри треугольника отрезок прямой, который делит пополам его угол.
- **Свойства биссектрисы треугольника:**
 1. Биссектриса угла треугольника делит противоположную сторону в отношении, равном отношению двух прилежащих сторон.
 2. Биссектрисы внутренних углов треугольника пересекаются в одной точке. Это точка называется центром вписанной окружности.
 3. Биссектрисы внутреннего и внешнего углов перпендикулярны.





Средняя линия треугольника

- **Средняя линия треугольника** – это отрезок, соединяющие середины двух сторон.
- Средняя линия треугольника параллельна одной из сторон треугольника и равна её половине.
- Три средние линии треугольника образуют «вписанный» в него треугольник, называемый **серединным**. Его площадь в четыре раза меньше площади данного треугольника.



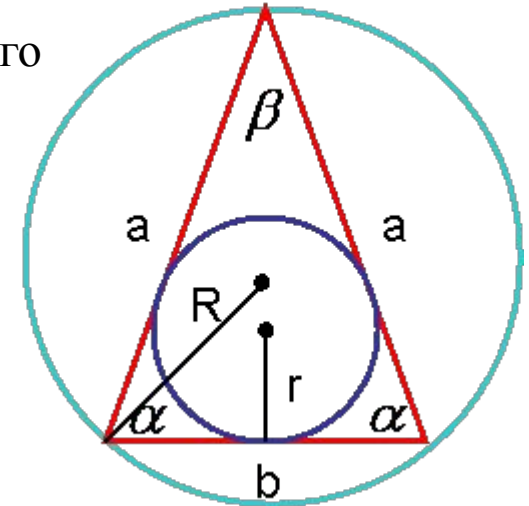
$$\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle LMN}} = 4$$



Равнобедренный треугольник

- **Равнобедренный треугольник** – треугольник, в котором две стороны равны между собой. По определению, правильный треугольник также является равнобедренным.

- a – длина двух равных сторон равнобедренного треугольника,
- b – длина третьей стороны,
- α и β – соответствующие углы,
- R – радиус описанной окружности,
- r – радиус вписанной окружности.



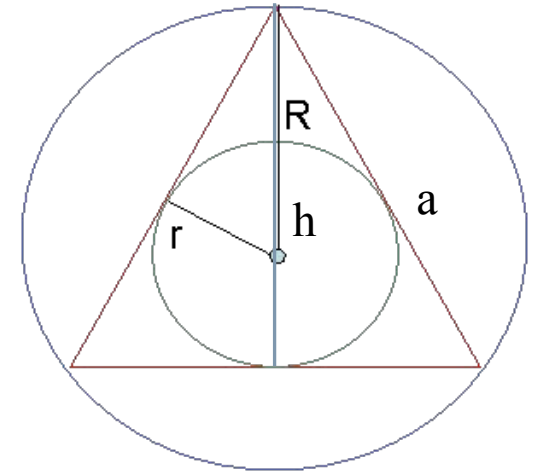
- **Свойства равнобедренного треугольника:**

1. Углы, противолежащие равным сторонам равнобедренного треугольника, равны между собой.
2. Биссектрисы, медианы и высоты, проведённые из этих углов, равны.
3. Биссектриса, медиана и высота, проведенные к основанию совпадают между собой.
4. Центры вписанной и описанной окружностей лежат на этой линии.
5. Углы, противолежащие равным сторонам, всегда острые .



Равносторонний треугольник

- Правильный треугольник или равносторонний треугольник – правильный многоугольник с тремя сторонами. Все стороны равны.



$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$R = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$



Прямоугольный треугольник

- Треугольник называют **прямоугольным**, если в него есть прямой угол.

- **Свойства прямоугольного треугольника:**

1. Прямоугольный треугольник имеет две взаимно перпендикулярные стороны, называемые катетами; третья его сторона называется гипотенузой.
2. По свойствам перпендикуляра и наклонных гипотенуза длиннее каждого из катетов (но меньше их суммы).
3. Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна прямому углу.
4. Две высоты прямоугольного треугольника совпадают с его катетами.
5. Центр описанной окружности прямоугольного треугольника лежит в середине гипотенузы.
6. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла на гипотенузу, является радиусом описанной около этого треугольника окружности.

